应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非自治无穷维动力系统的惯性流形*

王宗信① 范先令② 朱正佑③

(程昌钧推荐, 1997 年 3 月 24 日收到)

摘 要

本文讨论非自治无穷维动力系统的解的长时间行为. 在谱间隙条件成立的情况下, 对一类非自治发展方程证明了惯性流形的存在性.

关键词 非自治方程 谱间隙条件 惯性流形
中图分类号 O175

§1. 引 言

近 20 年来, 自治的无穷维动力系统得到了深入的研究和系统的发展[1~4]. 相比较而言, 非自治的无穷维动力系统的研究就发展缓慢一些, 其主要困难在于, 自治的无穷维动力系统的解产生的半流具有半群性质, 而非自治的无穷维动力系统的解产生的半流不具有半群性质. 这样, 在研究非自治无穷维动力系统时, 就不能沿用自治的无穷维动力系统的方法, 而需要我们建立新的理论和方法. 文献[5~9]对非自治无穷维动力系统的吸引子的存在性及维数估计进行了讨论. 然而, 吸引子通常是一个很复杂的集合, 它不能清晰地描述非自治无穷维动力系统的解的长时间行为. 因此, 目前人们关注的问题是: 非自治无穷维动力系统的解的长时时间行为能否由有限维的光滑流形来刻划?

本文就是对这一问题进行研究, 并且, 我们给出一个肯定的回答.

§2. 准备和主要结果

设 H 是一个 Hibert 空间, 具有范数 $|\cdot|$ 和内积 $(\cdot, \cdot)$, A 是 H 中稠定的自伴无界正定线性算子, 定义域为 $D(A) = \{u \in H; Au \in H\}$, A 是从 $D(A)$ 到 H 上的同构映射, 且 A^{-1} 在 H 中是紧的. 因此, 存在一组构成标准正交基的特征向量 $\{W_j\}_{j\in N}$ 和特征值 $\{\lambda_j\}_{j\in N}$:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_j \leqslant \dots, \qquad \lambda_j \to +\infty, \text{当 } j \to \infty$$

和通常一样, 我们由 A 可得到分数幂算子 $A^s (s \in R)$, 和分数幂空间 $D(A^s)$, 它们具有范数

---

* 国家自然科学基金资助项目(17671040)

① 复旦大学数学研究所, 上海 200433
② 兰州大学数学系, 兰州 73000
③ 上海大学数学系, 上海 200072

$|\cdot|_s = |A^s \cdot|$, 特别地, $D(A^0) = H$.

本文讨论如下非自治的发展方程:

$$\frac{du}{dt} + Au + F(u) = f(t) \tag{2.1}$$

$$u|_{t=\tau} = u_\tau \qquad (\tau \in R) \tag{2.2}$$

其中, F 是从$D(A^{\gamma+\alpha})$ 到 $D(A^\gamma)$ 的Lipschitz 函数, $\gamma \geqslant 0$, $\alpha \in [0, 1/2]$, f 是从R 到$D(A^\gamma)$ 的 Lipschitz 函数, 且存在正常数 M 使得:

$$|F(x) - F(y)|_\gamma \leqslant M|x - y|_{\gamma+\alpha} \qquad (\forall x, y \in D(A^{\gamma+\alpha})) \tag{2.3}$$

$$|F(x)|_\gamma \leqslant M(1 + |x|_{\gamma+\alpha}) \qquad (\forall x \in D(A^{\gamma+\alpha})) \tag{2.4}$$

$$|f(t_1) - f(t_2)|_\gamma \leqslant M|t_1 - t_2| \qquad (\forall t_1, t_2 \in R) \tag{2.5}$$

$$|f(t)|_\gamma \leqslant M \qquad (\forall t \in R) \tag{2.6}$$

由(2.3)我们知, 对 $u_\tau \in D(A^{\gamma+\alpha})$, 问题(2.1) ~ (2.2) 存在唯一解 $u(t)$:

$$u \in C([\tau, +\infty), D(A^{\gamma+\alpha})) \cap L^2((\tau, T), D(A^{\gamma+\alpha+1/2})) \qquad (\forall T > \tau) \tag{2.7}$$

因此, 映射 $P(t, \tau)u_\tau = u(t)(t \geqslant \tau)$, 构成一个过程, 满足:

$$P(\tau, \tau) = I \qquad (\forall \tau \in R)$$

$$P(t, s) \cdot P(s, \tau) = P(t, \tau) \qquad (\forall t, s, \tau \in R, t \geqslant s \geqslant \tau)$$

考虑到算子 A, 我们假设线性方程:

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \qquad u(0) = u_0$$

在 H 定义一个强连续线性半群$\{e^{-At}\}_{t\geqslant 0}$, 满足:

$$e^{-At}D(A^\gamma) \subset D(A^{\gamma+\alpha}) \qquad (\forall t > 0)$$

设 P_n 表示从H 到$\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$ 张成的空间上的投影, $Q_n = I - P_n$, 则 P_nH 和 Q_nH 在 e^{-At} 作用下是不变的, 其中 $t \geqslant 0$. $\{e^{-At}\}_{t\geqslant 0}$ 在 P_nH 上可扩张成群$\{e^{-At}\}_{t\in R}$, 且有:

$$|e^{-At}Q_n|_{L(D(A^\gamma), D(A^{\gamma+\alpha}))} \leqslant \left(\frac{1}{t^\alpha} + \lambda_{n+1}^\alpha\right) e^{-\lambda_{n+1}t} \qquad (t > 0) \tag{2.8}$$

定义 方程(2.1) ~ (2.2) 的惯性流形是指满足如下性质的有限维 Lpschitz 流形 $M \subset D(A^{\gamma+\alpha}) \times R$:

(i) $P(t, \tau)\pi M_\tau \subset \pi M_t \qquad (\forall t, \tau \in R, t \geqslant \tau)$ (2.9)

其中, $M_s = M \cap (D(A^{\gamma+\alpha}) \times \{s\})(\forall s \in R)$, π 表示从$D(A^{\gamma+\alpha}) \times R$ 到$D(A^{\gamma+\alpha})$ 的投影, $\pi(u, t) = u$, $\forall (u, t) \in D(A^{\gamma+\alpha}) \times R$.

(ii) M 以指数速率吸引(2.1) ~ (2.2) 的所有轨道, 即: 对任意 $u_\tau \in D(A^{\gamma+\alpha})$, $\exists\ \delta > 0$, $c > 0$, 成立:

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(P(t, \tau)u_\tau, \pi M_t) &= \inf_{m \in \pi M_t} |u(t) - m|_{\gamma+\alpha} \\ &\leqslant ce^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{dist}(u_\tau, \pi M_\tau) \qquad (\forall t \geqslant \tau)\end{aligned} \tag{2.10}$$

为了方便, 以下记 P 表示从$D(A^{\gamma+\alpha})$ 到$\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$ 张成的空间的投影, $Q = I - P$, 我们知, P, Q 和A^s 可交换($\forall s \in R$), 且成立:

$$|A^{\gamma+\alpha}p| \leqslant \lambda_n^\alpha |A^\gamma p| \qquad (\forall p \in PD(A^{\gamma+\alpha}), \alpha \geqslant 0) \tag{2.11}$$

$$|A^{\gamma+\alpha}q| \geqslant \lambda_{n+1}^\alpha |A^\gamma q| \qquad (\forall q \in QD(A^{\gamma+\alpha}), \alpha \geqslant 0) \tag{2.12}$$

如果 $u(t)$ 是(2.1)～(2.2)的解, 记 $u = p + q, p = p(t) = Pu(t), q = q(t) = Qu(t)$, 则 p 和 q 分别是 $PD(A^{\gamma+\alpha})$ 和 $QD(A^{\gamma+\alpha})$ 上的如下方程的解:

$$\frac{dp}{dt} + Ap + PF(p+q) = Pf(t) \tag{2.13}$$

$$p|_{t=\tau} = Pu\tau \tag{2.14}$$

$$\frac{dq}{dt} + Aq + QF(p+q) = Qf(t) \tag{2.15}$$

$$q|_{t=\tau} = Qu\tau \tag{2.16}$$

设 $b \in (0, +\infty)$, 我们定义如下集合 F_b:

$$F_b = \left\{\phi: PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R \to QD(A^{\gamma+\alpha}), \mathrm{Lip}\phi \leqslant b, |\phi|_\infty \leqslant b\right. \tag{2.17}$$

其中

$$\mathrm{Lip}\phi = \sup\left\{\frac{|\phi(p_1, t_1) - \phi(p_2, t_2)|_{\gamma+\alpha}}{|p_1 - p_2|_{\gamma+\alpha} + |t_1 - t_2|}, p_j \in PD(A^{\gamma+\alpha}), t_j \in R, j = 1, 2\right.$$

$$|\phi|_\infty = \sup\left\{\frac{|\phi(p, t)|_{\gamma+\alpha}}{1 + |p|_{\gamma+\alpha}}, p \in PD(A^{\gamma+\alpha}), t \in R\right.$$

集合 F_b 在度量 $|\cdot|_\infty$ 下是完备度量空间· 给定 $\phi \in F_b, (p\tau, \tau) \in PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R$, 我们考虑如下初值问题:

$$\frac{dp}{dt} + Ap + PF(p + \phi(p(t))) = Pf(t) \tag{2.18}$$

$$p|_{t=\tau} = p\tau \tag{2.19}$$

由(2.3), (2.5)和 $\phi \in F_b$ 知, 映射 $(p, t) \to PF(p + \phi(p, t)) - Pf(t)$ 是 Lipschitz 续的· 因为 $PD(A^{\gamma+\alpha})$ 是有限维的, 从常微分方程的标准定理可知, (2.18)～(2.19)存在唯一解 $p = p(t, \phi, p\tau, \tau)(t \in R)$·

现在我们考虑方程

$$\frac{dq}{dt} + Aq + QF(p(t) + \phi(p(t), t)) = Qf(t) \tag{2.20}$$

这里 $p(t)$ 是(2.18)～(2.19)的解· 如果 $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant 2M((1+b)/b)\cdot(\Gamma(1-\alpha)+1)(\lambda_{n+1}^\alpha + \lambda_n^\alpha)$, 则从引理2.1(见下面)知, (2.20)具有唯一解 $q \in C(R, QD(A^{\gamma+\alpha}))$, 我们记这个解为 $q(t) = q(t, \phi, p\tau, \tau)$· 特别地, $q(\tau) = q(\tau, \phi, p\tau, \tau)$ 属于 $QD(A^{\gamma+\alpha})$ 有意义, 函数:

$$(p\tau, \tau) \in PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R \mapsto q(\tau, \phi, p\tau, \tau) \in QD(A^{\gamma+\alpha}) \tag{2.21}$$

将 $PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R$ 映到 $QD(A^{\gamma+\alpha})$, 我们记此函数为 $T\phi$· 由此, 我们诱导出一个映射 T, 它将 F_b 映射到集合 F, F 是所有 $PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R$ 到 $QD(A^{\gamma+\alpha})$ 的函数组成的集合· 下面几节的工作, 是要证明映射还是从 F_b 到自身的压缩映射, 因此, 存在 T 的不动点 $\Phi \in F_b$, 函数 Φ 的图像 M

$$M = \left\{(p + \Phi(p, t), t): (p, t) \in PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R\right. \tag{2.22}$$

便是我们要寻找的惯性流形·

定理 1 假设上面条件, 特别(2.3)、(2.4)、(2.5)、(2.6)成立, b 给定, $0 < b < 1/8$, 且:

$$\lambda_{n+1}^\alpha \geqslant \frac{10}{9} M \lambda_1^{2\alpha-1} \tag{2.23}$$

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant 4M\,\frac{1+b}{b}(\Gamma(1-\alpha)+1)(\lambda_{n+1}^\alpha + \lambda_n^\alpha) \tag{2.24}$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Γ 函数. 则过程 $\{P(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 存在一个 $(n+1)$ 维惯性流形 $M=\operatorname{graph}\Phi(\Phi\in F_b)$.

注 2.1 如果问题(2.1)~(2.2)存在一个惯性流形 $M=\operatorname{graph}\Phi$, 则, 它的长时间行为可由下列有限维常微分方程来描述:

$$\frac{dp}{dt}+Ap+PF(p+\Phi(p,t))=Pf(t) \tag{2.25}$$

$$p|_{t=\tau}=p_\tau=Pu_\tau$$

我们将这个常微分方程称作问题(2.1)~(2.2)的惯性形式.

在本节的最后, 我们证明前面用过的引理 2.1.

引理 2.1 设 $p(t)$ 是(2.18)~(2.19)的解, 条件(2.24)成立, 则存在唯一的函数 $q\in C(R,QD(A^{\gamma+\alpha}))$, 满足:

$$|q(t_0)|_{\gamma+\alpha}\leqslant ce^{(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)(\tau-t_0)}\qquad(\text{当 } t_0\leqslant\tau\text{时}) \tag{2.26}$$

c 为正常数, 和

$$\frac{dq}{dt}+Aq+QF(p(t)+\Phi(p(t),t))=Qf(t) \tag{2.27}$$

证明 先证唯一性.

设 $q_1(t)$, $q_2(t)$ 是满足(2.26)、(2.27)的两个函数. 令 $q(t)=q_1(t)-q_2(t)$, 则, 我们有

$$\frac{dq}{dt}+Aq(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}|A^{\gamma+\alpha}q|^2+2\lambda_{n+1}|A^{\gamma+\alpha}q|^2\leqslant 0$$

再由 Gronwall 引理, 得

$$|A^{\gamma+\alpha}q(t)|^2\leqslant|A^{\gamma+\alpha}q(t_0)|^2e^{-\lambda_{n+1}(t-t_0)}\qquad(t_0\leqslant\tau,\ \forall t\in R)$$

再由(2.26), 得

$$|A^{\gamma+\alpha}q(t)|^2\leqslant 2ce^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^\alpha)(t-t_0)}e^{(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)(\tau-t)}$$

令 $t_0\to-\infty$, 则有, $|A^{\gamma+\alpha}q(t)|^2=0(\forall t\in R)$. 唯一性得证.

存在性: 设

$$q(t)=\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}\sigma(s)\,ds\qquad(t\in R) \tag{2.28}$$

其中, $\sigma(s)=-QF(p(s)+\Phi(p(s),s))+Qf(s)$, 我们要证明 $q(t)$ 即是所求的函数, 为此, 我们先证明积分式(2.28)在 $QD(A^{\gamma+\alpha})$ 中有定义.

1) 当 $t\leqslant\tau$ 时, 用 $A^{\gamma+\alpha}p(t)$ 乘(2.18), 利用(2.11)、(2.4), 我们得,

$$\frac{d}{ds}|p|_{\gamma+\alpha}\geqslant-(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)|p|_{\gamma+\alpha}-(M(1+b)\lambda_n^\alpha+M\lambda_n^\alpha)$$

从 s 到 τ 积分 $(s\leqslant t\leqslant\tau)$, 得

$$|p(s)|_{\gamma+\alpha}\leqslant 2(1+|p_\tau|_{\gamma+\alpha})e^{-(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)(s-\tau)} \tag{2.29}$$

现在, 利用(2.4)、(2.6)、(2.8)以及上式, 我们得,

$$|A^{\gamma+\alpha}q(t)|\leqslant\int_{-\infty}^t|e^{-(t-s)A}Q|_{L(D(A^\gamma),D(A^{\gamma+\alpha}))}|\sigma(s)|_\gamma ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_{-\infty}^{t}\left(M(1+b)(1+|p(s)|_{\gamma+\alpha})+M\right)\left(\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{-\lambda_{n+1}(t-s)}ds\\
&\leqslant M(2+b)\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sigma^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{-\lambda_{n+1}\sigma}d\sigma+2M(1+b)(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})\\
&\quad\cdot\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sigma^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^{\alpha})\sigma}\,(e^{(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(\tau-t)}d\sigma\\
&\leqslant M(2+b)(\Gamma(1-\alpha)+1)\lambda_{n+1}^{\alpha-1}+2M(1+b)(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})\\
&\quad\cdot((\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^{\alpha})^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\\
&\quad+(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^{\alpha})^{-1}\lambda_{n+1}^{\alpha})\cdot e^{(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(\tau-t)}\\
&\leqslant b(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})\cdot e^{(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(\tau-t)}\\
&<\infty
\end{aligned}
$$

2) 当 $t>\tau$ 时,

$$
\begin{aligned}
q(t)&=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)A}\sigma(s)\,ds\\
&=\int_{-\infty}^{\tau}e^{-(t-s)A}\sigma(s)\,ds+\int_{\tau}^{t}e^{-(t-s)A}\sigma(s)\,ds
\end{aligned}
$$

第二项积分显然是有界的, 第一项积分也和 1) 的证法一样, 证明其有界•

这样, 由 1), 2) 我们就得到

$$
|A^{\gamma+\alpha}q(t)|<+\infty\qquad(\forall t\in R)\tag{2.30}
$$

因此, 积分式(2.28) 有意义•

关于 $q(t)$ 是(2.27) 的解及 $q(t)\in C(R,QD(A^{\gamma+\alpha}))$ 是标准的• 引理 2.1 得证•

注 2.2 由引理 2.1 我们可得 $T\phi(p\tau,\tau)=q(t,\phi,p\tau,\tau)$ 的一个积分表示:

$$
T\phi(p\tau,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}e^{-(\tau-s)A}(-QF(p(s)+\phi(p(s),s))+Qf(s))\,ds
$$
$$
((p\tau,\tau)\in PD(A^{\gamma+\alpha})\times R,\ \phi\in F_b)\tag{2.31}
$$

§ 3. 映射 T 的性质

引理 3.1 在定理 1 的假设之下, 对所有 $\phi\in F_b$, 有

$$
|T\phi|_{\infty}\leqslant b\tag{3.1}
$$

证明 设 $(p\tau,t)\in PD(A^{\gamma+\alpha})\times R$, 利用(2.4)、(2.6)、(2.8)、(2.29)、(2.31)、(2.24), 我们有:

$$
\begin{aligned}
|T\phi(p\tau,t)|_{\gamma+\alpha}&\leqslant\int_{-\infty}^{\tau}|e^{-(\tau-s)A}Q|_{L(D(A^{\gamma}),D(A^{\gamma+\alpha}))}|(-QF(p(s)\\
&\quad+\phi(p(s),s))+Qf(s)|_{\gamma}ds\\
&\leqslant 2M(1+b)\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{1}{(\tau-s)^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{-\lambda_{n+1}(\tau-s)}ds+2M(1+b)(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})\\
&\quad\cdot\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{(\tau-s)^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha}\right)e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(\tau-s)}ds\\
&\leqslant(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})2M(1+b)(\Gamma(1-\alpha)+1)\left(\frac{\lambda_{n+1}^{\alpha}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^{\alpha}}+\lambda_{n+1}^{\alpha-1}\right)\\
&\leqslant(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})b
\end{aligned}\tag{3.2}
$$

由度量$|\cdot|_\infty$的定义和(3.2), 我们得(3.1)

引理 3.2 在定理 1 的假设下, 对所有 $\Phi\in F_b$, 任意 $p_{\tau_1}, p_{\tau_2}\in PD(A^{\gamma+\alpha})(\tau_1, \tau_2\in R)$, 我们有

$$|T\Phi(p_{\tau_1},\tau_1)-T\Phi(p_{\tau_2},\tau_2|_{\gamma+\alpha}\leqslant b(|p_{\tau_1}-p_{\tau_2}|_{\gamma+\alpha}+|\tau_1-\tau_2|)\tag{3.3}$$

证明 给定 $\Phi\in F_b$, $(p_{\tau_1},\tau_1), (p_{\tau_2},\tau_2)\in PD(A^{\gamma+\alpha})\times R$. 我们分别考虑如下方程的解, $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp_0}{dt}+Ap_0+PF(p_0+\Phi(p_0,t))=Pf(t)\\&p_0|_{t=\tau_1}=p_{\tau_1}\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp_1}{dt}+Ap_1+PF(p_1+\Phi(p_1,t))=Pf(t)\\&p_1|_{t=\tau_1}=p_{\tau_2}\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp_2}{dt}+Ap_2+PF(p_2+\Phi(p_2,t))=Pf(t)\\&p_2|_{t=\tau_2}=p_{\tau_2}\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

令 $h=\tau_2-\tau_1$, $p(t)=p_2(t+h)$, 则 $p(t)$ 满足:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp(t)}{dt}+Ap(t)+PF(p(t)+\Phi(p(t),t+h))=Pf(t+h)\\&p|_{t=\tau_1}=p_{\tau_2}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

令 $p(t)^1=p_1(t)-p_2(t+h)=p_1(t)-p(t)$, 则 $p(t)^1$ 满足:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp^1}{dt}+Ap^1+PF(p_1+\Phi(p_1,t))-PF(p+\Phi(p,t+h))\\&\quad=PF(t)-Pf(t+h)\\&p^1|_{t=\tau_1}=0\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

用 $A^{2(\gamma+\alpha)}p(t)^1$ 乘(3.8), 得:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p^1|^2_{\gamma+\alpha}+|A^{1/2+\gamma+\alpha}p^1|^2=-(A^\gamma(PF(p_1+\Phi(p_1,t))$$
$$-PF(p+\Phi(p,t+h))), A^{\alpha+\gamma+\alpha}p^1)+(A^\gamma(Pf(t)-Pf(t+h)), A^\alpha A^{\gamma+\alpha}p^1)$$

利用(2.3)、(2.5)、(2.11), 我们得

$$\frac{d}{dt}|p^1|_{\gamma+\alpha}\geqslant-(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)|p^1|_{\gamma+\alpha}-M(1+b)\lambda_n^\alpha|h|\tag{3.9}$$

从 t 到 τ_1 积分 $(t\leqslant\tau_1)$, 得

$$|p(t)^1|_{\gamma+\alpha}\leqslant|h|e^{-(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)(t-\tau_1)}\qquad(t\leqslant\tau_1)\tag{3.10}$$

令 $p(t)^2=p_0(t)-p_1(t)$, 则 $p(t)^2$ 满足:

$$\frac{dp^2}{dt}+Ap^2+PF(p_0+\Phi(p_0,t))-PF(p_1+\Phi(p_1,t))=0$$
$$p^2|_{t=\tau_1}=p_{\tau_1}-p_{\tau_2}$$

利用(2.3)、(2.11), 用同样的方法, 可得

$$|p(t)^2|_{\gamma+\alpha} \leqslant |p_{\tau_1} - p_{\tau_2}|_{\gamma+\alpha} e^{-(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(t-\tau_1)} \qquad (t \leqslant \tau_1) \tag{3.11}$$

现在,利用(2.3)、(2.5)、(2.8)、(2.31)、(3.10)、(3.11),我们得,

$$\begin{aligned}
&|T\Phi(p_{\tau_1}, \tau_1) - T\Phi(p_{\tau_2}, \tau_2)|_{\gamma+\alpha} \\
&\leqslant |T\Phi(p_{\tau_1}, \tau_1) - T\Phi(p_{\tau_2}, \tau_1)|_{\gamma+\alpha} + |T\Phi(p_{\tau_2}, \tau_1) - T\Phi(p_{\tau_2}, \tau_2)|_{\gamma+\alpha} \\
&\leqslant \left| \int_{-\infty}^{\tau_1} e^{-(\tau_1 - s)A} (QF(p_0 + \Phi(p_0, s)) - QF(p_1 + \Phi(p_1, s)))\, ds \right|_{\gamma+\alpha} \\
&\quad + \left| \int_{-\infty}^{\tau_1} e^{-(\tau_1 - s)A} (QF(p_1 + \Phi(p_1, s)) - QF(p_2(s+h) + \Phi(p_2(s+h), s+h)) \right. \\
&\quad \left. + Qf(s) - Qf(s+h))\, ds \right|_{\gamma+\alpha} \\
&\leqslant M(1+b)|p_{\tau_1} - p_{\tau_2}|_{\gamma+\alpha} \int_{-\infty}^{\tau_1} \left(\frac{1}{(\tau_1 - s)^{\alpha}} + \lambda_{n+1}^{\alpha} \right) e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(\tau_1 - s)}\, ds \\
&\quad + M(1+b)|h| \int_{-\infty}^{\tau_1} \left(\frac{1}{(\tau_1 - s)^{\alpha}} + \lambda_{n+1}^{\alpha} \right) e^{-\lambda_{n+1}(\tau_1 - s)}\, ds \\
&\quad + M(1+b)|h| \int_{-\infty}^{\tau_1} \left(\frac{1}{(\tau_1 - s)^{\alpha}} + \lambda_{n+1}^{\alpha} \right) e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(\tau_1 - s)}\, ds \\
&\leqslant M(1+b)(\Gamma(1-\alpha)+1)\left(2\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n - M(1+b)\lambda_n^{\alpha}} + \lambda_{n+1}^{\alpha-1} \right) \\
&\quad \cdot (|p_{\tau_1} - p_{\tau_2}|_{\gamma+\alpha} + |\tau_2 - \tau_1|) \\
&\leqslant b(|p_{\tau_1} - p_{\tau_2}|_{\gamma+\alpha} + |\tau_2 - \tau_1|)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

这样,我们得到(3.3)·

引理3.3 在定理1的假设下,我们有:

$$|T\Phi_1 - T\Phi_2|_{\infty} \leqslant \eta |\Phi_1 - \Phi_2|_{\infty} \qquad (\forall \Phi_1, \Phi_2 \in F_b) \tag{3.13}$$

这里
$$\eta = \frac{3b}{2} < 1 \tag{3.14}$$

证明 给定 $\Phi_1, \Phi_2 \in F_b$, $(p_\tau, \tau) \in PD(A^{\gamma+\alpha}) \times R$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ 分别表示下列方程的解:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_1}{dt} + Ap_1 + PF(p_1 + \Phi_1(p_1, t)) = Pf(t) \\
&p_1|_{t=\tau} = p_\tau
\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_2}{dt} + Ap_2 + PF(p_2 + \Phi_2(p_2, t)) = Pf(t) \\
&p_2|_{t=\tau} = p_\tau
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

和(2.29)式一样,我们可得

$$|p_1(t)|_{\gamma+\alpha} \leqslant 2(1 + |p_\tau|_{\gamma+\alpha}) e^{-(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^{\alpha})(t-\tau)} \qquad (t \leqslant \tau) \tag{3.17}$$

令 $p(t) = p_1(t) - p_2(t)$,则 $p(t)$ 满足:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt} + Ap + PF(p_1 + \Phi_1(p_1, t)) - PF(p_2 + \Phi_2(p_2, t)) = 0 \\
&p|_{t=\tau} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

记 d^{∞} 表示 $|\Phi_1 - \Phi_2|_{\infty}$,利用(2.3)、(2.11)、(3.17),我们得

$$\frac{d}{dt}|p|_{\gamma+\alpha} \geqslant -(\lambda_n + M(1+b)\lambda_n^{\alpha})|p|_{\gamma+\alpha}$$

$$-3M\lambda_n^\alpha(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})\cdot d^\infty\cdot e^{-(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)(t-\tau)}$$

从 t 到 τ 积分, $t\leqslant\tau$, 得

$$\begin{aligned}|p(t)|_{\gamma+\alpha}&\leqslant(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})\cdot d^\infty\cdot 3M\lambda_n^\alpha(\tau-t)e^{-(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha)(t-\tau)}\\&\leqslant(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})d^\infty e^{-(\lambda_n+M(1+b)\lambda_n^\alpha+3M\lambda_n^\alpha)(t-\tau)}\end{aligned}\tag{3.19}$$

现在,利用(2.3)、(2.8)、(2.31)、(3.17)、(3.19),得

$$\begin{aligned}&|T\Phi_1(p\tau,\tau)-T\Phi_2(p\tau,\tau)|_{\gamma+\alpha}\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\tau}|e^{-(\tau-s)A}(QF(p_1+\Phi_1(p_1,s))-QF(p_2+\Phi_2(p_2,s)))|_{\gamma+\alpha}ds\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\tau}|e^{-(\tau-s)A}Q|_{L(D(A^\gamma),D(A^{\gamma+\alpha}))}(M(1+b)|p_1-p_2|_{\gamma+\alpha}+Md^\infty(1+|p_1|_{\gamma+\alpha})ds\\&\leqslant M(1+b)(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})d^\infty\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}+\lambda_{n+1}^\alpha\right)e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^\alpha-3M\lambda_n^\alpha)(\tau-s)}ds\\&\quad+3M(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})d^\infty\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}+\lambda_{n+1}^\alpha\right)e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^\alpha)(\tau-s)}ds\\&\leqslant3M(1+b)(\Gamma(1-\alpha)+1)\left(\frac{\lambda_{n+1}^\alpha}{\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^\alpha-3M\lambda_n^\alpha}\right.\\&\quad\left.+\frac{\lambda_{n+1}^\alpha}{\lambda_{n+1}-\lambda_n-M(1+b)\lambda_n^\alpha}\right)(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})d^\infty\\&\leqslant\frac{3b}{2}(1+|p\tau|_{\gamma+\alpha})d^\infty\end{aligned}$$

引理 3.3 得证•

§4. 定理 1 的证明

引理 3.1、3.2 说明, 映射 T 将 F_b 映射到 F_b 自身; 引理 3.3 说明, 映射 T 还是从 F_b 到自身的严格压缩映射• 由压缩映象原理知, 映射 T 有唯一的不动点 $\Phi\in F_b$• 从而, 函数 Φ的图像 M 在过程$\{p(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$作用下是不变的(即(2.29)式成立, $P(t,\tau)\pi M_\tau\subset\pi M_t$, $t\geqslant\tau$)• 为了完成定理 1 的证明, 我们还需证明函数 Φ的图像 M 以指数速率吸引(2.1)~(2.2)的所有轨道• 这一点可以和[1, p432]的证明同理得到, 实事上, [1]中讨论的半流是从固定的时刻 $t=0$ 出发, 而我们这里讨论的半流是从固定的时刻 $t=\tau$, $\tau\in R$, 出发• 把固定的 τ 看作 0, 就和[1]的证法一样, 证得 Φ的图像 M 满足(2.10)•

最后, 定理 1 得证•

参 考 文 献

1 R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer_Verlag, New York (1988).

2 J. Hale, Asymptotic behavior of dissipative systems, Math. Surveys and Monographs, **25**, Am. Math. Soc., Providence (1988).

3 A. R. Bernal, Inertial manifold for dissipative semiflows in Banach spaces, Applicable Analysis, **37** (1990), 95—141.

4 A. Debussche and R. Temam, Convergent families of approximate inertial manifold, J. Math.

Pures Appl., **73**(5) (1994), 489—522.

5 C. M. Dafermos, Semi_flows associated with compact and uniform processes, Math. Systems Theory, **8** (1974), 142—149.

6 G. R. Sell, Non_autonomous differential equations and topological dynamics, Ⅰ, Ⅱ, Trans. Amer. Math. Soc., **127** (1967), 241—263.

7 V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension, J. Math. Pures Appl., **73**(3) (1994), 297—333.

8 T. Gill and W. Zachary, Dimensionabity of invariant sets for Nonautonomous processes, SIAM J. Math. Anal., **23**(5) (1992), 1204—1229.

9 A. Haraux, Attractors of asymptotically compact process and applications to nonlinear partial differential equations, Comm. Partial Differential Equations, **13** (1988), 1383—1414.

10 M. W. Smiley, Global attractors and approximate inertial manifold for nonautonomous dissipative equations, Applicable Analysis, **50** (1993), 217—241.

11 M. W. Smiley, Regularity and asymptotic behavior of solutions of nonautonomous differential equations, Journal of Dynamics and Differential Equations, **7**(2) (1995), 237—262.

Inertial Manifolds for Nonautonomous Infinite Dimensional Dynamical Systems

Wang Zongxing

(Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Fan Xianling

(Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

Zhu Zhengyou

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

In this paper, the long time behavior of nonautonomous infinite dimensional dynamical systems is discussed. Under the spectral gap condition, It is proved that there exist inertial manifolds for a class of nonautonomous evolution equations.

Key words nonautonomous equations, the spectral gap condition, inertial manifold