

# 矩形铁磁板的磁弹性弯曲与稳定性<sup>\*</sup>

周又和<sup>①</sup> 王省哲<sup>①</sup> 郑晓静<sup>①</sup>

(叶开沅推荐, 1997 年 1 月 3 日收到)

## 摘 要

本文对于在外加磁场中的矩形软铁磁弹性板的磁弹性弯曲现象进行了定量模拟; 建立了能反映磁弹性相互耦合作用的数值计算程序; 揭示了铁磁板弯曲变形与磁(场)力的非线性特征关系, 并据此讨论了磁弹性失稳临界磁场随倾斜角变化的规律。

**关键词** 矩形薄板 磁弹性 弯曲与失稳 非线性 数值模拟

**中图分类号** O44, O344

## § 1. 引 言

目前, 有关铁磁介质结构磁弹性相互作用有两类实验结果: 一类是铁磁材料的悬臂梁式板在均匀横向磁场中的磁弹性屈曲<sup>[1]</sup>(即: 负磁刚度现象); 另一类是具有低磁化系数的铁磁材料悬臂梁式板在均匀面内纵向磁场中的固有频率上升<sup>[2]</sup>(即: 正磁刚度现象)。为了对这两类实验进行理论分析和理论模拟, 已提出的定理分析的典型理论模型大致有: 基于物理微观模型而直观建立的体力偶模型<sup>[1]</sup>、体力模型<sup>[3]</sup>; 基于 Maxwell 应力张量的公理化模型<sup>[4-6]</sup>和基于变分原理的模型<sup>[7]</sup>等。数值结果表明: 在这些理论模型中, 没有一个模型能同时适用于对上述两种实验的描述。而且, 除文[7]的模型能给出对第二类实验<sup>[2]</sup>的较合理的理论模拟外, 其它理论模型均只能对板的磁弹性失稳(即: 第一类实验)进行定量模拟。然而, 实际工程结构往往处在复杂分布的磁场环境, 如: 斜磁场中。最近, 作者等人<sup>[8]</sup>运用变分原理, 导出能同时描述两类不同性质实验的理论模型, 这为理论定理模拟复杂磁场环境中的磁弹性力学行为奠定了基础。

本文将基于这一理论模型<sup>[8]</sup>, 对处在斜磁场中的矩形铁磁弹性板的磁弹性弯曲, 运用有限元法建立反映磁—力耦合作用的数值计算程序, 定量模拟弯曲变形与外加磁场的非线性特征关系, 并讨论斜磁场的倾斜角对磁弹性板强度问题和稳定问题的影响。

## § 2. 磁弹性耦合作用的控制方程

对于处在外加静磁场  $B_0$  中的长为  $a$ 、宽为  $b$ 、厚度为  $h$  的矩形铁磁板, 当不考虑静电场、静

\* 国家自然科学基金、国家教委优秀年轻教师基金、国家教委留学回国人员科研基金、国家杰出青年科学基金资助

① 兰州大学力学系, 兰州 730000

电荷及其电流的影响时,由静磁学知:存在一磁标势 $\phi$ ,且

$$\mathbf{H} = - \text{grad} \phi \quad (2.1)$$

由 Maxwell 方程,可得到有关磁场的控制方程(见文[8]):

$$\Delta^2 \phi = 0 \quad (\text{在 } \Omega^+ \text{ 内}) \quad (2.2)$$

$$\Delta^2 \phi = 0 \quad (\text{在 } \Omega^- \text{ 内}) \quad (2.3)$$

$$\phi = \phi, \quad \mu_r \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (\text{在 } S \text{ 上}) \quad (2.4)$$

$$- \text{grad} \phi = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \quad (\text{在 } S_0 \text{ 上}) \quad (2.5)$$

这里  $\Omega^+$  表示铁磁板变形后所占的区域,  $\Omega^-$  为真空区域,  $S$  为包围  $\Omega^+$  的表面且外法向为  $\mathbf{n}$ ;  $\mu_0$  和  $\mu_r$  分别为真空的磁极化系数与铁磁介质的相对磁极化系数;  $S_0$  为包围但远离铁磁板的某一封闭曲面。

对于矩形铁磁板,取直角坐标系  $Oxy$  面位于板变形前的中面且  $x$ 、 $y$  轴分别沿板的两边。于是,板在磁力作用下的变形方程为:

$$D \Delta^2 w(x, y) = q_z^{(em)}(x, y) \quad (0 < x < a, 0 < y < b) \quad (2.6)$$

其中  $q_z^{(em)}(x, y) = \frac{\mu_0 \mu_r X}{2} \left\{ \left[ H_n^+ \left( x, y, \frac{h}{2} \right) \right]^2 - \left[ H_n^- \left( x, y, \frac{h}{2} \right) \right]^2 \right\}$ , 当  
 $\left. \begin{array}{l} \text{基金} \\ \text{过系} \end{array} \right\} - \frac{\mu_0 X}{2} \left\{ \left[ H_t^+ \left( x, y, \frac{h}{2} \right) \right]^2 - \left[ H_t^- \left( x, y, -\frac{h}{2} \right) \right]^2 \right\}$  基金 (2.6)

这里  $\Delta^2$  为二维拉氏算子。相应的边界条件与经典板的边界条件一致。

由于磁场计算与板变形后的构型有关,因此板磁弹性问题的控制方程(2.2)~(2.7)呈非线性,反映了磁场与变形的非线性耦合作用。

### § 3. 磁弹性弯曲解的存在性

对于位于倾斜磁场中的铁磁板, Moon<sup>[9]</sup> (1970) 通过对其体力耦模型在对磁场摄动解耦处理后,未能对板的弯曲变形给予描述。这里,我们将依前节给出的理论模型,证实对于倾斜磁场情形,铁磁板的未变形状态,即零弯曲解( $w \equiv 0$ )将不可能是其磁弹性力学控制方程的解,从而得出:方程(2.2)~(2.7)可以描述叙述板在倾斜磁场中的弯曲变形。

对于板未变形情形,当  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^{(1)} = B_{0z} \mathbf{k}$  时,设磁场方程(2.2)~(2.5)的解为  $\mathbf{H}^{(1)}$ ; 而当  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^{(2)} = B_{0x} \mathbf{i} + B_{0y} \mathbf{j}$  时,设磁场方程的解为  $\mathbf{H}^{(2)}$ 。显然,磁场此时具有如下对称特征:

$$\left. \begin{array}{l} H_z^{(1)}(x, y, z) = H_z^{(1)}(x, y, -z) \\ H_x^{(1)}(x, y, z) = -H_x^{(1)}(x, y, -z) \\ H_y^{(1)}(x, y, z) = -H_y^{(1)}(x, y, -z) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} H_z^{(2)}(x, y, z) = -H_z^{(2)}(x, y, -z) \\ H_x^{(2)}(x, y, z) = H_x^{(2)}(x, y, -z) \\ H_y^{(2)}(x, y, z) = H_y^{(2)}(x, y, -z) \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

于是,由迭加原理可以得到在任意外加磁场  $\mathbf{B}_0 = B_{0x} \mathbf{i} + B_{0y} \mathbf{j} + B_{0z} \mathbf{k}$  作用下,磁场在  $z$  坐标对称点处的磁场分量表达式,再将其代入磁力分式(2.7)中得:

$$q_z^{em}(x, y) = 2\mu_0 \mu_r X \mathbf{H}_n^{(1)} \cdot \mathbf{H}_n^{(2)} - 2\mu_0 X \mathbf{H}_t^{(1)} \cdot \mathbf{H}_t^{(2)} \quad (3.3)$$

从而在  $\mathbf{B}_0^{(1)} \neq \mathbf{0}$  和  $\mathbf{B}_0^{(2)} \neq \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{H}^{(1)} \neq \mathbf{0}$  和  $\mathbf{H}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ . 进一步, 在一般情形下,  $q_z^{(em)} \neq \mathbf{0}$ . 这表明: 对于此种情形  $w \equiv 0$  不可能是其磁弹性问题(2.2)~(2.7)的解, 亦即必存在磁弹性相互作用的弯曲解. 有关其定量分析将由下节的计算程序给出.

### § 4. 磁弹性弯曲解的数值计算

#### 4.1 考虑铁磁板变形的磁场有限元分析

对于具有弹性变形的铁磁介质的磁场方程(2.2)~(2.5), 其磁能泛函可表示为:

$$F[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\Omega^+(w)} \mu_0 \mu_r (\text{rot } \phi)^2 dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-(w)} \mu_0 (\text{rot } \phi)^2 dv + \oint_{S_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \phi ds \quad (4.1)$$

对于一给定变形构型的板, 其真实磁场对应于(4.1)式泛函的极小值. 对三维空间进行有限单元划分, 且板的中和面和表面均位于单元的表面, 取八节点的六面体单元后, 形状函数在局部坐标系  $(\xi, \eta, \zeta)$  中表示为:

$$N_i^e = \frac{1}{8} (1 + \xi_i) (1 + \eta_i) (1 + \zeta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (4.2)$$

于是, 对于单元体内任一点, 其势函数可用节点(单元顶点)的势函数值表示为:

$$\phi = \sum_{i=1}^8 N_i^e \phi_i^e = [N]_e [\phi]_e \quad (4.3)$$

其中  $[N]_e = [N_1^e, N_2^e, \dots, N_8^e]$ ,  $[\phi]_e = [\phi_1^e, \phi_2^e, \dots, \phi_8^e]^T$  (4.4)

将(4.1)式按单元体逐个积分, 并将(4.3)代入后得到

$$F[\phi] = \sum_e \frac{1}{2} [\phi]_e^T [K]_e [\phi]_e - \sum_{e_0} [\phi]_{e_0}^T [B_0]_{e_0} \quad (4.5)$$

这里单元  $e$  的刚度矩阵  $[K]_e$  和在边界  $S_0$  上非齐次项  $[B_0]_{e_0}$  分别为

$$[K]_e = \begin{cases} \int_{\Omega_e} \mu_0 [\text{rot } N]_e^T [\text{rot } N]_e dv & (\Omega_e \in \Omega) \\ 0 \int_{\Omega_e} \mu_0 \mu_r [\text{rot } N]_e^T [\text{rot } N]_e dv & (\Omega_e \in \Omega^+) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$[B_0]_{e_0} = \int_{S_{e_0}} \mu_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ([N]_{e_0}^T ds \quad (S_{e_0} \in S_0) \quad (4.7)$$

于是由泛函的极值条件和(4.5)式不难得到计算磁场的代数方程

$$[K][\phi] = [B_0] \quad (4.8)$$

这里,  $[\phi]$  为全体节点处磁势函数值组成的列阵,  $[K]$  为整体刚度矩阵,  $[B_0]$  是与外加磁场有关的非齐次项. 由(4.1)知: 泛函的积分区域与板的变形有关, 从而(4.8)式中的刚度矩阵  $[K]$  将与板的挠度相关, 即:

$$[K] = [K([\mathbf{w}])] \quad (4.9)$$

其中,  $[\mathbf{w}]$  为由板中面各节点挠度值构成的列阵. 当板的构型一定, 即  $[\mathbf{w}]$  一定时, 由(4.8)便可确定相应的磁场分布.

#### 4.2 铁磁板弹性变形的有限元解

考虑到弯曲内力在实际应用中的重要性, 为了提高精度, 我们采用以横向挠度和弯矩作为

基本未知量的混合有限元法来计算薄板的挠曲变形<sup>[10]</sup>。取磁场计算中的立方体单元在板中面处的矩形面为相应的板单元,在得到各单元的广义刚度矩阵方程

$$\text{明 对} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}_e = [\mathbf{A}]_e \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{Qw}]_e & [\mathbf{A}_{QM}]_e \\ [\mathbf{A}_{Qw}]_e & [\mathbf{A}_{QM}]_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}_e \quad (4.10)$$

后,经组装并考虑板的边界条件,可得到用于确定挠度和弯矩的矩阵方程

$$[\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = [\mathbf{P}] \quad \mu_r \quad (4.11)$$

这里,  $[\mathbf{A}]$  为混合法的总体刚度矩阵,  $[\mathbf{w}]$  为中面节点处的横向挠度列阵,  $[\mathbf{M}]$  为弯矩内力列阵,  $[\mathbf{P}]$  为与横向外载(2.7)和板边挠角有关的列阵,

$$[\mathbf{A}_{Qw}]_e = \frac{Eh^3}{24ab(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{A}_{QM}]_e = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & -\alpha & \beta \\ \alpha & \beta & -\alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta & \alpha & -\beta \\ -\alpha & -\beta & \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad (4.12a, b)$$

$$[\mathbf{A}_{Qw}]_e = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta & \beta & -\beta \\ -\alpha & -\alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta & -\beta & \beta \end{bmatrix}, [\mathbf{A}_{QM}]_e = \frac{4ab}{Eh^3} \begin{bmatrix} -4 & 3\nu & -2 & 3\nu \\ 3\nu & -4 & 3\nu & -2 \\ -2 & 3\nu & -4 & 3\nu \\ 3\nu & -2 & 3\nu & -4 \end{bmatrix} \quad (4.12c, d)$$

其中,  $\alpha = a/2b$ ,  $\beta = b/2a$  而  $a, b$  分别为板的长度和宽度。

由于横向磁力与磁场强度成非线性关系,从而磁场方程(4.8)式与板挠曲变形方程(4.11)是非线性耦合。为了求解其非线性,我们采用具有物理意义的迭代过程。首先假定板的一微小变形状态(给定迭代初值  $[\mathbf{w}]$ );由(4.8)式求出对应的磁场分布;然后由(2.7)计算横向磁力,使(4.11)式的右边已知;再由(4.11)求出新的挠度(迭代后的  $[\mathbf{w}]$ );用迭代后的  $[\mathbf{w}]$  取代迭代前的  $[\mathbf{w}]$ 。重复这一过程,直到精度条件

$$|[\mathbf{w}] - [\mathbf{w}]| < \varepsilon$$

为止。这样就得到在某一外加磁场  $\mathbf{B}_0$  作用下磁弹性弯曲解。其次,随着  $\mathbf{B}_0$  的增大,挠度迭代初值的选择将采用步进法。如果在某一  $\mathbf{B}_0$  值下获得了磁弹性弯曲挠度  $[\mathbf{w}]$ ,则当  $\mathbf{B}_0$  的大小有一较小增量  $\Delta B_0$  后,迭代过程的迭代初值将选取前一  $\mathbf{B}_0$  值所对应的  $[\mathbf{w}]$ ,这样,可保证迭代过程在  $\mathbf{B}_0$  较大时仍收敛。计算表明,这种处理方式是有效的。

## § 5. 数值算例与结果

这里,我们对图1所示的铁磁弹性矩形板在斜磁场中的磁弹性弯曲进行数值模拟。取板的弹性模量  $E = 1.2 \times 10^5 \text{MPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.3$ ,斜磁场  $\mathbf{B}_0 = B_{0x} \mathbf{i} + B_{0z} \mathbf{j}$ ,倾角记为  $\alpha$ ,铁磁板的相对磁导率  $\mu_r = 1.0 \times 10^4$ ,板的几何尺寸为  $0.1\text{m} \times 0.1\text{m} \times 0.001\text{m}$ 。

图2给出了板在  $y$  方向简支、另一对边自由时处于斜磁场中发生磁弹性弯曲变形的挠曲面。其挠曲变形关于  $x$  方向板的对称轴是对称的,这与原问题关于该轴构成对称问题相一致;而挠曲变形关于  $y$  方向板的对称轴是反对称的。对于四边简支矩形板,也有类似的变形特征。图3为其在  $x$  方向中面对称轴上板的变形曲线。图4和图5分别给出了板的最大挠

度随外加磁场  $B_0$  的变化曲线。结果表明: 在相同大小的外磁场作用下, 同一铁磁性板的变形与其磁场的倾斜程度有关, 即: 板磁弹性变形随倾角的增大而增长。其次, 随着外加磁场大小的增加, 由于磁弹性耦合作用板将在某一临界磁场值附近出现磁弹性失稳, 即: 微小磁场值的增加导致发生很大挠度。图 4 和图 5 的结果表明: 斜磁场倾斜角的增加将导致其磁弹性失稳临界磁场值的下降。因此, 对位于倾斜磁场中板的磁弹性相互作用问题, 其强度计算和稳定性分析都与倾角有关, 并且倾角的增加使结构的安全性能降低。这值得引起结构安全设计的注意。

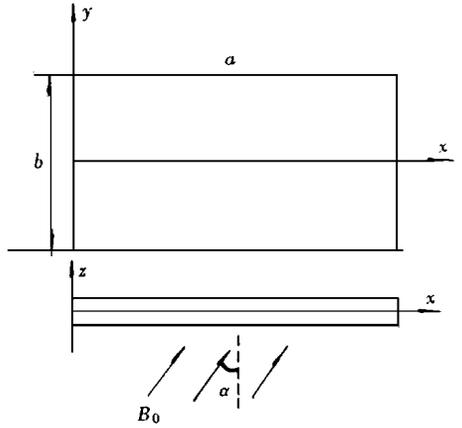


图 1 板与磁场示意图

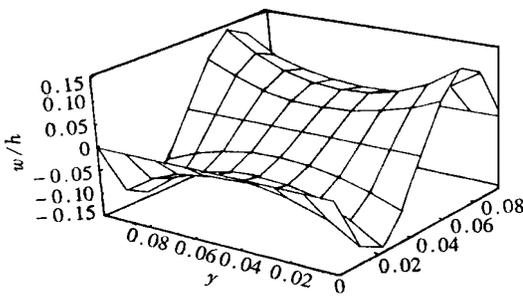


图 2 两边自由、两对边简支方板变形图  
( $B_0^* = 14.16134$   $\alpha = 3^\circ$ )

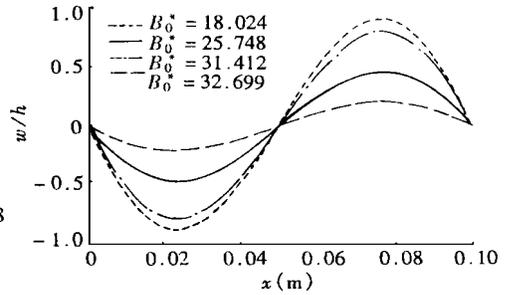


图 3 周边简支方板中截面上挠度与磁场的变化关系( $\alpha = 5^\circ$ )

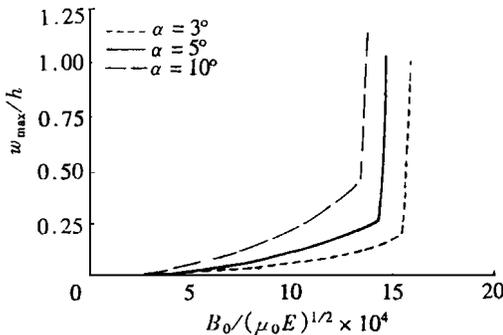


图 4 一对边自由、一对边简支板最大挠度与磁场的刚度曲线

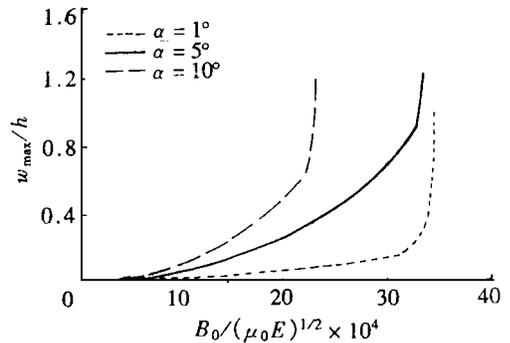


图 5 四边简支方板最大挠度与磁场的刚度曲线

## 参 考 文 献

- 1 F. C. Moon and Y. H. Pao, Magnetoelastic buckling of a thin plate, *ASME J. Appl. Mech.*, **35**(1) (1968), 53—58.
- 2 T. Takagi, J. Tani, Y. Matsubara and I. Mogi, Electromagneto\_mechanical coupling effects for non\_ ferromagnetic and ferromagnetic structures, *Proc. 2nd Int Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and Other Structures Surrounding the Fission Plasma Torus*, Ed. Miya, Tokai, Japan (1993), 81—90.
- 3 Zhou Youhe and X. J. Zheng, A theoretical model of magnetoelastic buckling for soft ferromagnetic thin plates, *Acta Mechanica Sinica*, **12**(3) (1996), 213—224.
- 4 Y. H. Pao and C. S. Yeh, A linear theory for soft ferromagnetic elastic solid, *Int. J. Eng. Sci.*, **11**(3) (1973), 415—436.
- 5 A. C. Eringen, *Mechanics of Continua*, Wiley, New York (1980).
- 6 A. A. F. Van de Ven, Magnetoelastic buckling of thin plates in a uniform transverse magnetic field, *J. Elasticity*, **8**(2) (1978), 279—312.
- 7 Y. H. Zhou and K. Miya, A theoretical prediction of natural frequency of a ferromagnetic beam\_plate with low susceptibility in in\_plane magnetic field, *ASME J. Appl. Mech.*, **65**(1) (1998).
- 8 Y. H. Zhou and X. J. Zheng, A general expression of magnetic force for soft ferromagnetic plates in complex magnetic fields, *Int. J. Eng. Sci.*, **35**(15) (1998), 1405—1417.
- 9 F. C. Moon, The mechanics of ferroelastic plates in a uniform magnetic field, *ASME. J. Appl. Mech.*, **37**(1) (1970), 153—158.
- 10 张允真、曹富新,《弹性力学及其有限元方法》,中国铁道出版社(1983).
- 11 Zhou Youhe, Zheng Xiaojing and Kenzo Miya, A generalized variational principle of magnetoelastic interaction for ferromagnetic thin plates and its applications, Presented at 19th ICTAM, Kyoto, Japan, August, 25—31, (1996).

## Magnetoelastic Bending and Stability of Soft Ferromagnetic Rectangular Plates

Zhou Youhe Wang Singzhe Zheng Xiaojing

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

### Abstract

In this paper, the phenomenon of magnetoelastic bending is theoretically simulated for soft ferromagnetic rectangular thin plates in applied magnetic fields. A numerical program of 3d FEM is established to capture the nonlinear coupling interaction between magnetic fields and bending deformation. After the nonlinear characteristic of the bending deflection and the magnetic (field) force is quantitatively displayed, we discuss the critical magnetic field and the effect of the incident angle of obliquely applied magnetic field on the critical field to the phenomenon of magnetoelastic instability.

**Key words** rectangular ferromagnetic plates, magnetoelasticity, bending and instability, nonlinearity, numerical simulation