

# 周期激励浅拱 1:2 内共振参数 平面定常运动分布\*

毕勤胜<sup>①</sup> 陈予恕<sup>①</sup>

(1996 年 6 月 20 日收到, 1997 年 5 月 12 日收到修改稿)

## 摘 要

本文研究了已具有静变形的受周期激励作用下浅拱在 1:2 内共振条件下的分岔特性, 进而按系统的运动形式将整个参数平面分成不同的区域, 得到了物理参数平面上浅拱的定常运动分布情况, 结合数值分析方法详细分析了系统在各个区域内特别是 Hopf 分岔区域内系统的动力学特性, 指出系统模态相互作用的规律及其通向混沌的过程。

**关键词** 浅拱 内共振 定常运动 分岔 混沌

**中图分类号** O323

## § 1. 引 言

假设受周期激励作用的浅拱具有一阶模态的基础上进行的动态特性研究已有许多成果问世<sup>[1,2]</sup>, 但当周期激励浅拱具有初静变形时, 系统的一阶模态和二阶模态会产生内共振, 此时单模态假设不成立, 系统两共振模态之间会产生相互作用, 系统的能量会在其低阶和高阶模态之间相互传递<sup>[3,4,5]</sup>, 为进一步分析系统能量传递规律及其在参数平面上的运动分布, 本文研究了在 1:2 内共振条件下系统的分岔特性, 进而按系统的运动形式将整个参数平面分成不同的区域, 得到了物理参数平面上浅拱的定常运动分布情况, 结合数值分析方法详细分析了系统在各个区域内特别是 Hopf 分岔区域内系统的动力学特性, 指出在 Hopf 分岔域内其 Hopf 分岔解会通过一系列的倍化周期分岔进入混沌, 在混沌域中稳定的周期一解窗口又会随着参数的变化通过倍周期分岔走向混沌, 在混沌域中还会发现有稳定的周期三窗口。

## § 2. 模型及运动方程

考虑图 1 所示的浅拱, 设浅拱在未加横向周期荷载  $p(x, t)$  前已有初始挠度  $w(x, t)$ , 加载后产生动态挠度为  $w(x, t)$ , 其无量纲运动方程为<sup>[5,7]</sup>

$$\ddot{q}_1 + \beta_1 \dot{q}_1 + (1 + 2q_0^2) q_1 - 3q_0 q_1^2 - 4q_0 q_2^2 + q_1^3$$

\* 国家自然科学基金和国家青年科学基金资助项目

① 天津大学力学系, 天津 300072

$$+ 4q_1q_2^2 - \lambda_0 + \rho \cos(\gamma t) = 0 \tag{2.1a}$$

$$\ddot{q}_2 + \beta_2 \dot{q}_2 + 16q_2 + 4q_2(q_1^2 + 4q_2^2 - 2q_0q_1) = 0 \tag{2.1b}$$

其中,  $q_0$  为静变形幅值,  $q_1, q_2$  分别为一、二阶模态幅值,  $\lambda_0$  为静变形荷载参数,  $\rho, \gamma$  分别为周期激励的幅值和频率, 定义  $Q_1 = q_1 - q_0, Q_2 = q_2$ , 当  $\rho = 0$ , 时有静态平衡点

$$Q_{10}^3 - Q_{10}(q_0^2 - 1) = \lambda_0 - q_0, Q_{20} = 0 \tag{2.2}$$

为方便起见, 重新定义  $q_1, q_2$ , 令

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{10} + \varepsilon q_1, & Q_2 &= Q_{20} + \varepsilon q_2 \\ \beta_1 &= \varepsilon \delta_1, & \beta_2 &= \varepsilon \delta_2, & \rho &= \varepsilon^2 \mu \end{aligned} \tag{2.3}$$

( $\varepsilon \ll 1$ )

将(2.3)、(2.2)代入(2.1)有

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \varepsilon [\delta_1 \dot{q}_1 + 3Q_{10}q_1^2 + 4Q_{10}q_2^2 \\ + \mu \cos(\gamma t)] + \varepsilon^2 (q_1^3 + 4q_1q_2^2) = 0 \end{aligned} \tag{2.4a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \varepsilon (\delta_2 \dot{q}_2 + 8Q_{10}q_1q_2) \\ + \varepsilon_2 (16q_2^3 + 4q_1^2q_2) = 0 \end{aligned} \tag{2.4b}$$

其中,  $\omega_1^2 = 3Q_{10}^2 + (1 - q_0^2), \omega_2^2 = 4[Q_{10}^2 + (4 - q_0^2)]$ , 图 2 中的实线是  $\omega_1 \approx 2\omega_2$ , 即产生 1:2 内共振的条件。

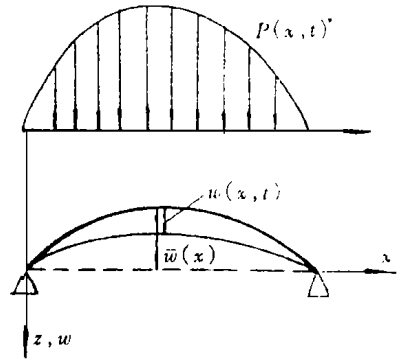


图 1 模型

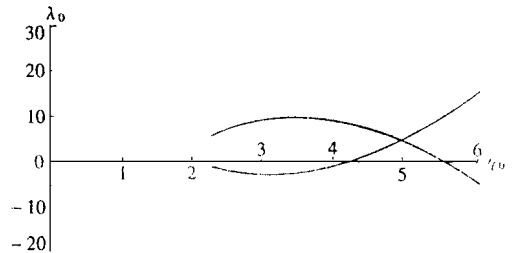


图 2 1:2 内共振条件

### § 3. 平均方程及其分岔

图 2 给出了  $q_0 - \lambda_0$  平面上系统(2.4a, b) 产生 1:2 内共振的条件, 即当  $(q_0, \lambda_0)$  选取在该实线上, 系统(2.4a, b) 将产生 1:2 内共振。设

$$\omega_1^2 = \gamma^2 - \varepsilon \sigma_1, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{4} \gamma^2 - \varepsilon \sigma_2 \tag{3.1}$$

令  $p_1 = q_1, p_2 = q_2$ , 且

$$q_i = \sqrt{2a_i} \cos(\omega_i t + \theta_i), p_i = -\sqrt{2a_i} \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (i = 1, 2) \tag{3.2}$$

由平均法可得

$$a_1 \dot{\theta}_1 = \varepsilon \left[ -\delta_1 a_1 + \frac{2Q_{10}}{\gamma} \frac{\sqrt{2a_1 a_2}}{\gamma} \sin(\theta_1 - 2\theta_2) + \mu \frac{\sqrt{2a_1}}{2\gamma} \sin \theta_1 \right] \tag{3.3a}$$

$$a_1 \theta_1 = \varepsilon \left[ -\frac{\sigma_1}{\gamma} a_1 + \frac{Q_{10}}{\gamma} \frac{\sqrt{2a_1 a_2}}{\gamma} \cos(\theta_1 - 2\theta_2) + \mu \frac{\sqrt{2a_1}}{4\gamma} \cos \theta_1 \right] \tag{3.3b}$$

$$a_2 \dot{\theta}_2 = \varepsilon \left[ -\delta_2 a_2 + \frac{8Q_{10}}{3} \frac{\sqrt{2a_1 a_2}}{\gamma} \sin(\theta_1 - 2\theta_2) \right] \tag{3.3c}$$

$$a_2 \theta_2 = \varepsilon \left[ -\frac{\sigma_2}{\gamma} a_2 + \frac{4Q_{10}}{\gamma} \frac{\sqrt{2a_1 a_2}}{\gamma} \cos(\theta_1 - 2\theta_2) \right] \tag{3.3d}$$

化到直角坐标, 令

$$u_i = \sqrt{2a_i} \cos(\theta_i), v_i = -\sqrt{2a_i} \sin(\theta_i) \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

将(3.4)代入(3.3a, b, c, d)有

$$u_1' = \varepsilon \left[ -\frac{\delta_1}{2} u_1 - \frac{\sigma_1}{Y} v_1 + \frac{2Q_{10}}{Y} u_2 v_2 \right] \quad (3.5a)$$

$$\lambda v_1' = \varepsilon \left[ \frac{\sigma_1}{Y} u_1 - \frac{\delta_1}{2} v_1 - \frac{\mu}{2Y} - \frac{Q_{10}}{Y} (u_2^2 - v_2^2) \right] \quad (3.5b)$$

$$u_2' = \varepsilon \left[ -\frac{\delta_2}{2} u_2 - \frac{\sigma_2}{Y} v_2 + \frac{4Q_{10}}{Y} (u_2 v_1 - u_1 v_2) \right] \quad (3.5c)$$

$$1 v_2' = \varepsilon \left[ \frac{\sigma_1}{Y} u_2 - \frac{\delta_2}{2} v_2 - \frac{4Q_{10}}{Y} (u_1 u_2 + v_1 v_2) \right] \quad (3.5d)$$

考虑(3.3a, b, c, d)的定常解, 令  $a_1' = a_2' = \theta_1' = \theta_2' = 0$ , 有以下几种情况·

(1) 单模态运动定常解 ( $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ )

$$a_1 = \frac{\mu^2}{2(\delta_1^2 Y^2 + 4\sigma_1^2)}, \quad \text{tg} \theta_1 = \frac{\delta_1 Y}{2\sigma_1} \quad (3.6)$$

(2) 复合模态运动定常解 ( $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ )

$$a_1 = \frac{\delta_2^2 Y^2 + 4\sigma_2^2}{128 Q_{10}^2}, \quad a_2 = a_2^\pm \left[ \frac{\left( \frac{\sigma_1 \sigma_2}{Y^2} - \frac{\delta_1 \delta_2}{4} \pm \sqrt{F} \right)}{8 Q_{10}^2} \right] \quad (3.7)$$

其中,  $F = \frac{4Q_{10}^2 \mu^2}{\omega^2} - \left[ \frac{\delta_1 \delta_2 + \sigma_1 \sigma_2}{2Y} \right]^2, \Lambda_0 = \left( \frac{\sigma_1 \sigma_2}{Y^2} - \frac{\delta_1 \delta_2}{4} \right),$  参见表 1·

表 1 解的情况

$\Lambda_0$	$F > 0$	$a_2$ 解的个数	$a_2$ 的解
$\Lambda_0 > 0$	$\Lambda_0 \geq F$	2	$\Lambda_0 \pm \sqrt{F}$
	$\Lambda_0 < F$	1	$\Lambda_0 + \sqrt{F}$
$\Lambda_0 < 0$	$ \Lambda_0  \leq F$	1	$\Lambda_0 + \sqrt{F}$
	$ \Lambda_0  > F$	0	

为研究定常解的稳定性, 考虑(3.5a, b, c, d), 令  $p = (u_1, v_1, u_2, v_2)^T, p_0 = (u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20})^T, p_0$  为定常解, 由(3.5a, b, c, d)有

$$p' = H(p) \quad (3.8)$$

令

$$p = p_0 + q \quad (3.9)$$

其中,  $p_0$  为(3.5a, b, c, d)的定常解, 即  $H(p_0) = 0$ , 将(3.9)代入(3.5a, b, c, d), 考虑一次近似有

$$q' = \left[ \frac{\partial H}{\partial p} \right]_{p=p_0} q \quad (3.10)$$

其中

$$J = [F_{ij}]^i = \left[ \frac{\partial H}{\partial p} \right]_{p=p_0} = \begin{bmatrix} -\frac{\delta_1}{2} & -\frac{\sigma_1}{Y} & \frac{2Q_{10}}{Y}v_{20} & \frac{2Q_{10}}{Y}u_{20} \\ \frac{\sigma_1}{Y} & -\frac{\delta_1}{2} & -\frac{2Q_{10}}{Y}u_{20} & \frac{2Q_{10}}{Y}v_{20} \\ -\frac{4Q_{10}}{Y}v_{20} & \frac{4Q_{10}}{Y}u_{20} & -\frac{\delta_2}{2} + \frac{4Q_{10}}{Y}v_{10} & -\frac{\sigma_2}{Y} - \frac{4Q_{10}}{Y}u_{10} \\ -\frac{4Q_{10}}{Y}u_{20} & -\frac{4Q_{10}}{Y}v_{20} & \frac{\sigma_2}{Y} - \frac{4Q_{10}}{Y}u_{10} & -\frac{\delta_2}{2} - \frac{4Q_{10}}{Y}v_{10} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

如果 Jacobi 矩阵  $J$  的所有特征值均具有负实部, 则定常解  $p_0 = (u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20})^T$  稳定, 令

$$\det(J - M) = \lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0 \quad (3.12)$$

由 Routh-Hurwitz 准则, 当(3.12)中

$$A_0 = \det(J) > 0, A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0 \\ A_1A_2A_3 - (A_0A_3^2 + A_1^2) > 0 \quad (3.13)$$

时, (3.12)中所有  $\lambda$  均具有负实部, 定常解稳定. 当(3.12)中

$$A_0 = 0, A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0 \quad (3.14)$$

时, 将具有一简单零特征值, 当(3.12)中

$$A_0 > 0, A_1 > 0, A_3 > 0, A_1A_2A_3 - (A_0A_3^2 + A_1^2) = 0 \quad (3.15)$$

将有一对纯虚特征值.

对于单模态运动定常解( $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ ), 考虑(3.11)式, 其 Jacobian 矩阵  $J$  的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\delta_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{Y}\right)^2} = 0 \quad (3.16)$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\delta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 - \frac{32a_1Q_{10}}{Y^2}} = 0 \quad (3.17)$$

设  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ , 故  $\lambda_{1,2}$  均具有负实部, 当

$$\left[ \left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 - \frac{32a_1Q_{10}}{Y^2} \right] < 0 \quad (3.18)$$

时,  $\lambda_{3,4}$  分别为零和一个具有负实部的值, 由(3.11)、(3.17)可知, 单模态定常解不可能由 Hopf 分岔导致失稳, 只能由简单分岔引起, 此时, 单模态运动会因(3.18)而导致复合模态运动.

• 见图 3 •

对于复合模态运动, 考虑(3.11)式, 其特征方程为

$$\det(J - M) = \lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0 \quad (3.19)$$

其中

$$A_3 = \delta_1 + \delta_2$$

$$A_2 = \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \delta_1\delta_2 + \left(\frac{\sigma_1}{Y}\right)^2 + \frac{32a_2Q_{10}^2}{Y^2}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}\delta_1^2\delta_2 + \delta_2\left[\left(\frac{\sigma_1}{Y}\right)^2 + \frac{16a_2Q_{10}^2}{Y^2}\right](\delta_1 + \delta_2)$$

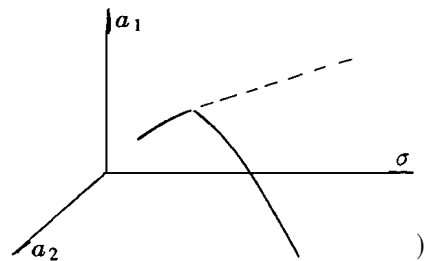


图 3 单模态运动到复合模态运动

$$A_0 = a_2 \left[ \frac{256 Q_{10}^4}{\gamma^4} a_2 + \frac{32 Q_{10}^2}{\gamma^2} \left( \frac{\delta_1 \delta_2}{4} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\gamma^2} \right) \right] \quad (3.20)$$

由于  $a_1, a_2$  表示振动幅值, 均为正数, 故  $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$ , 当

$$A_0 = a_2 \left[ \frac{256 Q_{10}^4}{\gamma^4} a_2 + \frac{32 Q_{10}^2}{\gamma^2} \left( \frac{\delta_1 \delta_2}{4} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\gamma^2} \right) \right] = 0 \quad (3.21)$$

时, 系统将产生鞍结分岔, 当

$$A_1 A_2 A_3 - (A_0 A_3 + A_1^2) = 0 \quad (3.22)$$

时, 系统将产生 Hopf 分岔, 鞍结分岔对应于系统定常解的跳跃和滞后, Hopf 分岔对应于系统的调幅运动。

(3.18)、(3.21)、(3.22) 所表示的这些转迁集将物理参数平面划分为不同的区域, 而在每一个区域中其定常解的性质不同, 特别是在其 Hopf 分岔的转迁集内, 系统具有十分丰富的动力学行为, 由于目前解析方法尚不完善, 为揭示系统的复杂动力学行为, 我们下面结合具体例子用数值方法加以说明。

### § 4. 数值分析

为进一步给出这些分岔转迁集及定常运动分布情况, 我们以数值例子加以分析。现取  $\delta_1 = \delta_2 = 0.1, Q_{10} = -\sqrt{24}, \mu = 0.8, \gamma = \sqrt{48}$ , 为了表明调谐参数  $\sigma_1, \sigma_2$  对系统响应的影响, 图 4 给出了在  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  参数平面上系统的分岔转迁集。

这些转迁集将  $(\sigma_1, \sigma_2)$  平面划分为 ①, ②, ③, ③', ③'', ④, ⑤ 八个区域。

在区域 ①, ②, ③, ③' 中只有单模态运动, 即  $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ , 且单模态运动是稳定的。

在区域 ③'', ④ 中单模态运动失稳, 产生复合模态振动, 即  $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ , 其中  $a_1$  是稳定的, 而  $a_2$  有两支,  $a_2 = a_2^\pm, (a^+ > a^- > 0)$ , 其中  $a^+$  是稳定的, 而  $a^-$  是不稳定的, 即  $a_2$  的上支是稳定的, 而下支是不稳定的, 且  $a_1$  随  $(\sigma_1, \sigma_2)$  而变化, 即没有饱和现象。

在区域 ④ 中单模态运动失稳, 是复合模态运动, 且  $a_1, a_2$  都只有一支, 是稳定的,  $a_1$  还具有饱和现象, 即在该区域中  $a_1$  不随  $(\sigma_1, \sigma_2)$  的变化而变化。

在区域 ⑤ 中复合模态运动失稳, 产生调幅运动, 即在区域 ⑤ 的边界上产生 Hopf 分岔, 区域 ⑤ 中的运动极为复杂, 下文将给出进一步的数值解。

在区域 ③ 到区域 ④, 区域 ③' 到区域 ④, 区域 ③'' 到区域 ④, 区域 ④ 到区域 ⑤ 的转迁边界上产生树枝分岔。在区域 ③' 到区域 ②, 区域 ③'' 到区域 ① 的边界上产生鞍结分岔。在区域 ④ 到区域 ⑤ 的边界上产生 Hopf 分岔。

图 5 给出了当  $\sigma_2 = 2.4$  时,  $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}$  随调谐参数  $\sigma_1$  变化的关系曲线及分岔转迁点。

当  $\sigma_1 < -3.15$  时, 单模态运动  $a_1 \neq 0, a_2 = 0$  稳定, 当  $\sigma_1 = -3.15$  时, 产生树枝分岔,

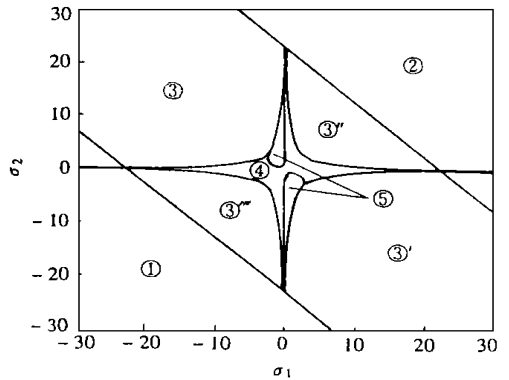


图 4  $(\sigma_1, \sigma_2)$  平面上的转迁集

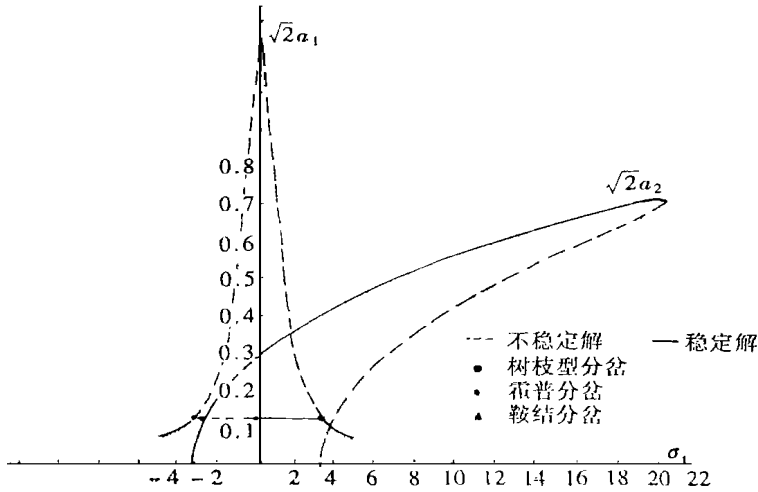


图5  $\sigma_2 = 2.4$  响应曲线

单模态运动失稳, 产生复合模态运动, 且  $a_1$  产生饱和现象, 即  $a_1$  不随  $\sigma_1$  变化而变化, 当  $\sigma_1$  增加到  $-2.74$  时, 复合模态运动  $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$  失稳, 产生超临界 Hopf 分岔, 当  $\sigma_1$  增加至  $-0.05$  时, 产生亚临界 Hopf 分岔, 复合模态运动又获稳定, 且  $a_1$  仍有饱和现象, 当  $\sigma_1$  增加到  $3.15$  时产生树枝分岔,  $a_1$  不再有饱和现象, 且产生  $a_2 \neq 0$  的不稳定解, 当  $\sigma_1$  增加到  $20.43$  是会产生鞍结分岔, 复合模态运动失稳, 产生单模态运动  $a_1 \neq 0$ 。

图6给出了当  $\sigma_1 = -2.4$  时,  $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}$  随调谐参数  $\sigma_2$  变化的关系曲线及其分岔转迁点。当  $\sigma_2 < -20.43$  时, 单模态运动  $a_1 \neq 0, a_2 = 0$  稳定, 当  $\sigma_2 = -20.43$  时, 产生鞍结分岔, 产生两支  $a_2^\pm \neq 0$  曲线, 且上支  $a_2^+$  是稳定的, 而  $a_2^-$  是不稳定的。当  $\sigma_2$  增加到  $-3.15$  时, 产生树枝分岔, 此时  $a_1$  失稳,  $a_2^-$  消失, 当  $\sigma_2$  增加到  $1.72$  时, 复合模态运动失稳, 产生亚临界 Hopf 分岔, 系统表现为调幅运动, 当  $\sigma_2$  增加到  $3.05$  时调幅运动失稳, 产生超临界 Hopf 分岔, 复合模态运动重新稳定, 当  $\sigma_2$  增加到  $3.25$  时复合模态运动失稳, 产生稳定的单模态运动  $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ 。

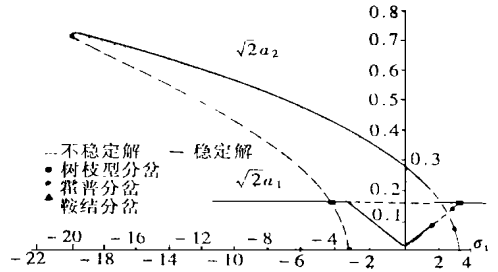


图6  $\sigma_1 = -2.4$  响应曲线

为了研究 Hopf 分岔域内的复杂动力学特性, 图 7、8、9、10 给出了  $\mu = 0.8, 0.5, 0.3, 0.1$  时  $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$  平面在  $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$  范围内的 Hopf 分岔转迁集, 另一转迁域在  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$  范围内与上述转迁集关于  $(\sigma_1, \sigma_2)$  轴对称, 在此不在画出, 参见图 4 中区域 ⑤。

从上图比较可以发现, 随着外激励  $\mu$  即相应周期激励  $\rho$  的减小, Hopf 分岔域也变小, 且 Hopf 分岔只发生在  $\sigma_1 \sigma_2 < 0$  的区内并且关于原点  $O$  有  $Z_2$  对称性。

在 Hopf 分岔域内, 系统产生调幅运动, 该运动随着  $\sigma_1, \sigma_2$  的变化将进一步走向更为复杂的动力学现象。

分析图 7(a) 所对应的 Hopf 分岔域内的动力学行为, 即取  $\mu = 0.8$ , 下面我们采用数值方法进行研究, 以揭示其在该区域内的动力学行为。

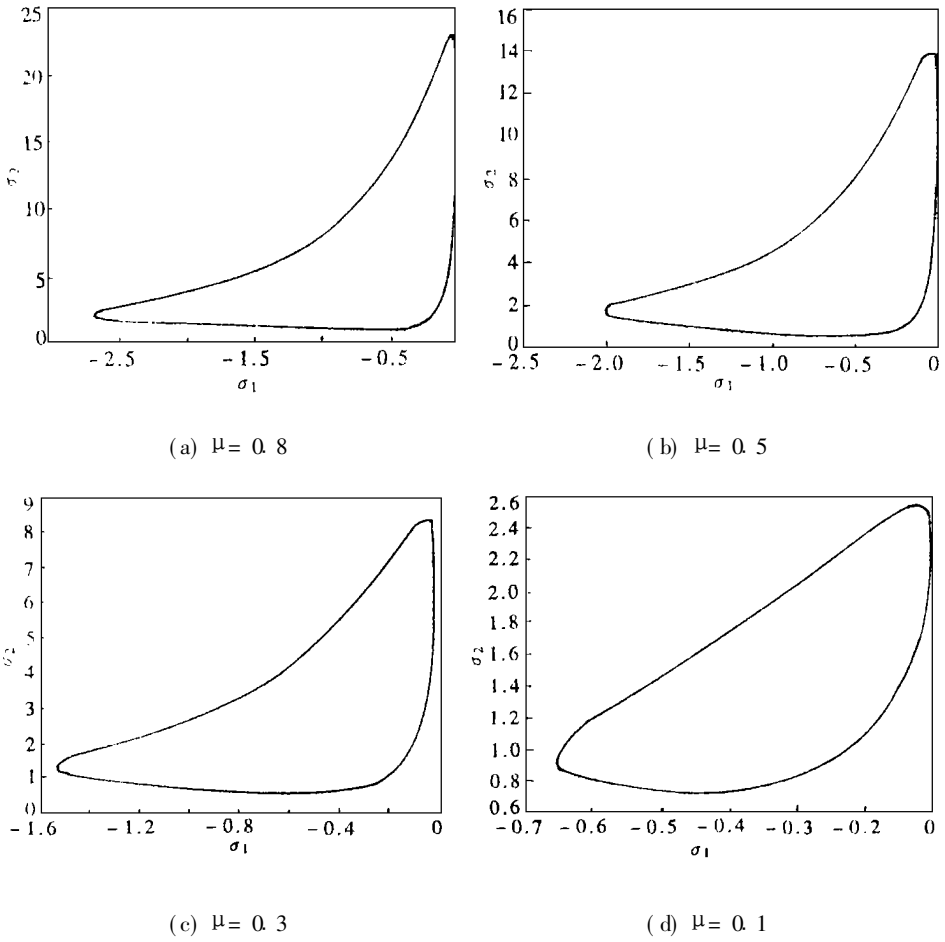


图7 Hopf 分岔转迁集

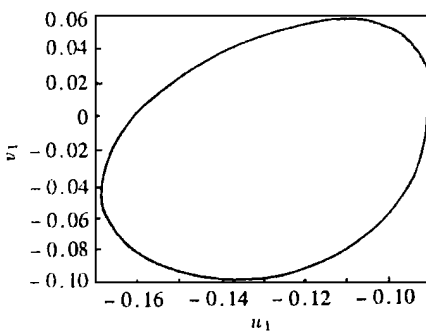


图8  $(u_1, v_1)$  相图

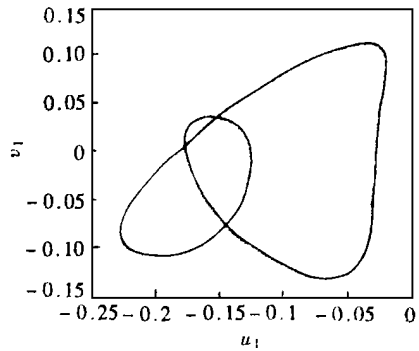
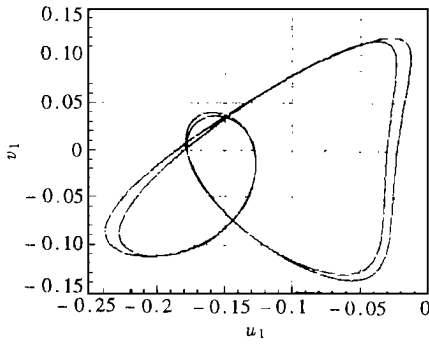
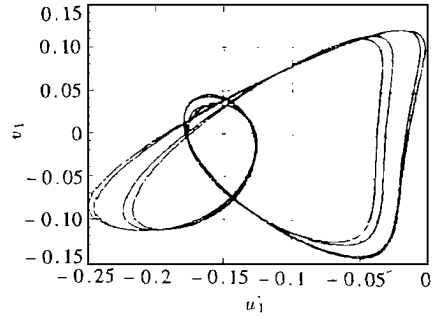
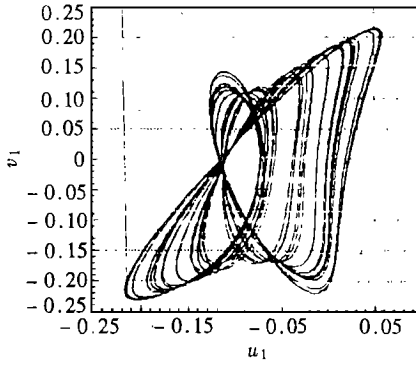
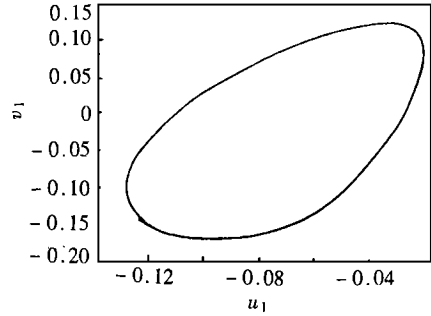
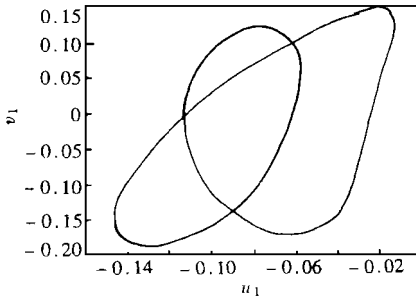
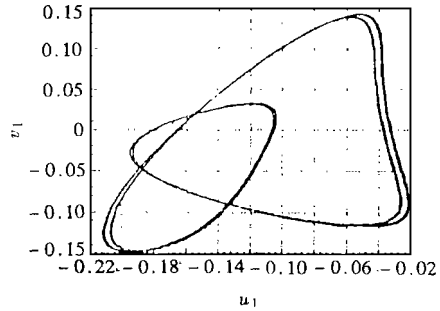


图9  $(u_1, v_1)$  相图

取  $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\gamma = \sqrt{48}$ ,  $Q_{10} = -\sqrt{24}$ , 对方程(3.5a, b, c, d) 进行计算。为进一步揭示其Hopf分岔域⑤内的复杂动力学现象, 现固定  $\sigma_2 = 3.04$ , 图8, 9, 10, 11, 12 分别给出了当  $\sigma_1 = -2.0, -1.8, -1.69, -1.66, -1.64$  时  $(u_1, v_1)$  不断地由倍化周期分岔导致混沌的过程。

当  $\sigma_1$  增加到  $-1.48$  时, 混沌域中产生周期一解窗口, 图13, 14, 15, 16, 17 分别给出了当  $\sigma_1$

图 10  $(u_1, v_1)$  相图图 11  $(u_1, v_1)$  相图图 12  $(u_1, v_1)$  相图图 13  $(u_1, v_1)$  相图图 14  $(u_1, v_1)$  相图图 15  $(u_1, v_1)$  相图

$= -1.46, -1.42, -1.40, -1.38, -1.37$  时该周期一窗口通过倍周期分岔进入混沌的过程。

随着  $\sigma_1$  的继续增加, 混沌解又变成稳定的调幅运动, Hopf 分岔解重新稳定, 图 18(a) 为  $\sigma_1 = -0.05$  时  $(u_1, v_1)$  平面上的相图, 图 18(b), (c) 为相应的  $(u_2, v_2)$  平面上具  $Z_2$  对称性的两个并存吸引子, 并存吸引子对应着不同的吸引域。

在混沌区域  $\sigma_1 \in [-1.36, -0.07]$  中, 很明显地可观察到周期三窗口, 图 19(a), (b) 给出了当  $\sigma_1 = -1.11$  时  $(u_1, v_1)$  周期六及  $(u_2, v_2)$  周期三的相图, 注意图 19(b) 只给出了一个周期三吸引子, 另一个吸引子与它具有  $Z_2$  对称性。



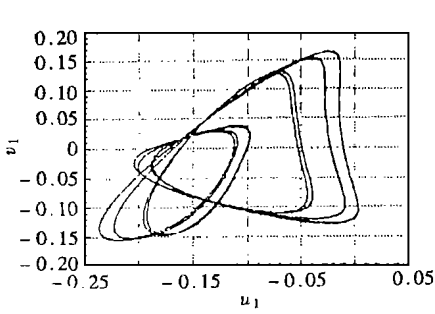


图 16  $(u_1, v_1)$  相图

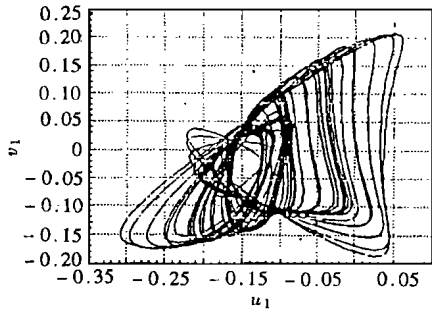
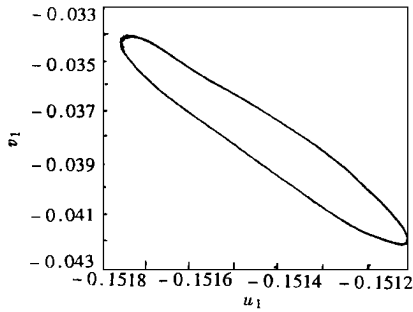
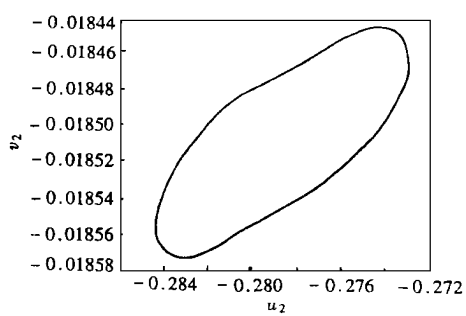


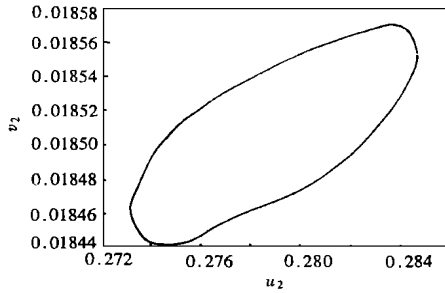
图 17  $(u_1, v_1)$  相图



(a)  $(u_1, v_1)$  相图



(b)  $(u_2, v_2)$  相图



(c)  $(u_2, v_2)$  相图

图 18

## § 5. 结 论

周期激励浅拱具有初静变形时, 系统的一阶模态和二阶模态会产生内共振, 此时单模态假设不成立。系统两共振模态之间会产生相互作用, 系统的能量会在其低价和高阶模态之间相互传递, 本文通过对 1: 2 内共振条件下系统的分岔特性进行分析, 按系统的运动形式将整个参数平面分成不同的区域, 得到了物理参数平面上浅拱的定常运动分布情况, 结合数值分析方法详细分析了系统在各个区域内特别是 Hopf 分岔区域内系统的动力学特性, 指出在一定条件下, 系统会产生 Hopf 分岔即调幅运动, 在 Hopf 分岔域内其 Hopf 分岔解会通过一系列的倍化周期分岔进入混沌, 混沌域中又会出现稳定的周期一调幅运动窗口, 并且又会通过不断的倍周

期分岔重新走入混沌,在混沌域中还会发现有稳定的周期三窗口,随着参数的变化混沌解又走向调幅运动,调幅运动通过亚临界分岔产生稳定的复合模态运动。

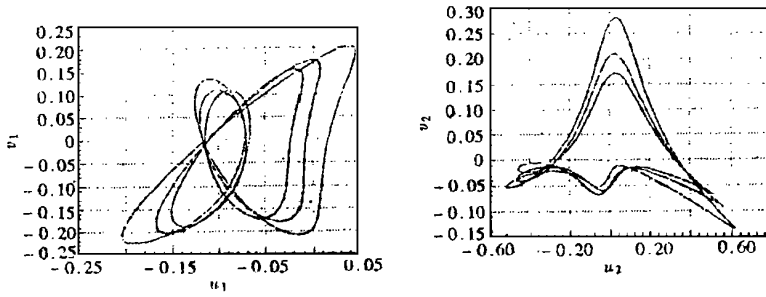
(a)  $(u_1, v_1)$ 相图(b)  $(u_2, v_2)$ 相图

图 19

## 参 考 文 献

- 1 Z. C. Feng and P. R. Sethna, Global bifurcation and chaos in parametrically forced systems with one-one resonance, *Dyn. Stab. Syst.*, **5**(4) (1990), 201—225.
- 2 A. H. Nayfeh, Modal interactions in dynamical and structural systems, *Appl. Mech. Rev.*, **42**(2) (1989), 175—201.
- 3 Win Min Tien, Nonlinear dynamics of shallow arch under periodic excitation—I Internal resonance, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **29**(3) (1994), 367—386.
- 4 毕勤胜、陈予恕, 周期激励浅拱分岔研究, *力学学报*, **30**(1) (1998), 83—88.
- 5 毕勤胜, 多自由度非线性振动系统复杂动力学行为研究, 天津大学博士后研究报告, 天津 (1996).

## Steady State Motions of Shallow Arch under Periodic Force with 1: 2 Internal Resonance on the Plane of Physical Parameters

Bi Qinsheng Chen Yushu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

### Abstract

The bifurcation dynamics of shallow arch which possesses initial deflection under periodic excitation for the case of 1: 2 internal resonance is studied in this paper. The whole parametric plane is divided into several different regions according to the types of motions; then the distribution of steady state motions of shallow arch on the plane of physical parameters is obtained. Combining with numerical method, the dynamics of the system in different regions, especially in the Hopf bifurcation region, is studied in detail. The rule of the mode interaction and the route to chaos of the system is also analysed at the end.

**Key words** shallow arch, internal resonance, steady state motion, bifurcation, chaos