

MILU_CG 方法和绕旋转圆柱流动的数值研究*

凌国平^① 凌国灿^②

(卞荫贵推荐, 1996 年 1 月 31 日收到, 1997 年 12 月 29 日收到修改稿)

摘 要

本文采用以修正的不完全 LU 分解作预处理器的共轭梯度法(MILU_CG), 结合高阶隐式差分格式, 改进了作者(1992)提出的基于区域分解、有限差分法与涡法杂交的数值方法(HDV). 系统地研究了雷诺数 $Re = 1000, 200$, 旋转速度比 $\alpha \in (0.5, 3.25)$ 范围内, 绕旋转圆柱从突然起动到充分发展, 长时间内尾流旋涡结构和阻力、升力系数的变化规律. 计算所得流线与实验流场显示相比, 完全吻合. 首次揭示了临界状态时的旋涡结构特性, 并指出最佳升阻比就在该状态附近得到.

关键词 旋转圆柱 涡结构 有限差分法 涡法 预处理共轭梯度法 不完全 LU 分解
中图分类号 O241, O357

§ 1. 引 言

绕旋转圆柱的流动是一种复杂的非定常流动. 它包括非定常边界分离, 旋涡的产生和释放, 与涡尾流的相互作用等一系列复杂的流动现象. 圆柱的旋转将减弱和抑制在柱体某一边流动的分离和旋涡的释放, 同时加强和发展在柱体另一边流动的分离和旋涡的释放, 从而有一个垂直来流方向的升力作用在柱体上, 这就是 Magnus 效应. 影响流动最重要的参数是旋转速度比 $\alpha (= \Omega a / U_\infty)$, Ω 为圆柱旋转角速度, a 为圆柱半径, U_∞ 为来流速度. 改变 α 的大小, 将显著改变柱后涡尾流的旋涡结构, 进而改变作用在柱体上的升力和阻力. 搞清这种影响规律, 是当今流动控制研究中的一个重要课题, 倍受国内、外流体力学界的重视.

早期的研究集中在小旋转速度比 α 和低雷诺数 Re 的范围. 80 年代中、后期开始对较大 α 和较高 Re 的流动进行了一系列实验^{[1]~[3]} 和数值^{[3]~[6]} 的研究, 但由于实验手段和计算条件的限制, 多只限于突然起动后的初始阶段和柱后的近尾流区. 对较大 α 时, 旋涡的释放是否被完全抑制、流动趋于稳定, 还存在不同的看法. 例如, 文献[5]指出, 在 $Re = 200$, $\alpha = 3.25$ 时, 有多于一个主涡的所谓单边释放涡的现象, 这是与文[1]的实验结果相矛盾的. 文[1]实验观察指出, 此时在第一个主涡释放后, 流动即趋于稳定, 以后再无涡释放. 最近文[7]对 Re

* 江苏省自然科学基金和中国科学院力学研究所非线性力学开放实验室资助课题

① 苏州大学数学系, 苏州 215006

② 中国科学院力学研究所, 北京 100080

= 1000, 较大 $\alpha \in (0.5, 6)$ 范围内绕旋转圆柱长时间的流动进行了系统的数值研究, 支持了文[1]的观点, 但未对临界状态的流动特性作更深入的探讨。

作者(1992)曾提出并应用基于区域分解、有限差分法与涡法杂交的数值模型(HDV), 成功地计算了突然起动流^[8,9]和振荡流^[10]绕圆柱的流动。随着流动复杂程度的增加, 对数值计算的精度和稳定性提出了更高的要求。除可进一步细分网格外, 更应采用高阶(大于二阶)的隐式差分格式, 这样将产生一个宽带(多于三对角)的大型稀疏矩阵方程。对此矩阵方程, 力学界多数采用的传统的交替方向线迭代, 结合三对角矩阵追赶法或强隐式迭代求解的方法, 已不复适用或效率较低。本文采用先进、高效的以修正的不完全 LU 分解作预处理器的共轭梯度法(MILU_CG), 成功地处理了这一问题。它不再需要交替方向迭代, 就可将一个多维(二维、三维)问题同时联立快速地求解出来, 是目前在大型科学计算中属于最优一类的算法^[11]。本文将 MILU_CG 结合原先的 HDV 方法, 系统地研究了 $Re = 1000, 200, \alpha \in (0.5, 3.25)$ 范围内, 绕旋转圆柱从突然起动到充分发展, 长时间内尾流旋涡结构和阻力、升力系数的变化规律。计算所得流线图与实验流场显示相比, 完全吻合。首次给出了临界状态时的旋涡结构特性, 并指出最佳升阻比就在该状态附近得到。

§ 2. 数学模型

设不可压粘性流体沿 x 正方向, 以均匀速度 U_∞ 流向半径为 a , 且以角速度 Ω 按逆时针方向旋转的无限长圆柱。取原点在圆柱轴心, 但不随圆柱一起旋转的极坐标系 (r, θ) 。将涡量 ω , 流函数 Ψ , 径向、周向速度 (V_r, V_θ) 和变量 t, r , 分别用 $U_\infty/a, U_\infty a, U_\infty, a/U_\infty$ 和 a 无量纲化, 并为使柱面附近网格加密, 引入变换

$$r = \exp(2\pi\xi), \quad \theta = 2\pi\eta$$

则无量纲形式的流动控制方程为

$$E \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (U\omega) + \frac{\partial}{\partial \eta} (V\omega) = \frac{2}{Re} \cdot \omega \quad (2.1)$$

$$\cdot \omega = -E\omega \quad (2.2)$$

其中

$$\cdot = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad E = 4\pi^2 e^{4\pi\xi}, \quad Re = \frac{2U_\infty a}{\nu}$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = E^{1/2} V_r, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = E^{1/2} V_\theta$$

在柱面上 ($\xi=0$) 需满足不渗透壁面的无滑移条件,

$$\left. \begin{aligned} \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -E^{1/2} a \\ \omega = -\frac{1}{E} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \end{aligned} \right\}, \quad \xi = 0 \quad (2.3)$$

在无穷远处, 圆柱旋转对流场速度和涡量分布的影响可忽略不计, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = E^{1/2} \sin(2\pi\eta) \\ \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad \xi \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

另外,还要满足周期性条件

$$\Psi|_{\eta=0} = \Psi|_{\eta=1}, \quad \omega|_{\eta=0} = \omega|_{\eta=1} \quad (2.5)$$

初始条件为

$$\omega|_{\xi=0} = 0, \quad \xi > 0 \quad (2.6)$$

由方程(2.1)~(2.6)求得流场中的涡量分布后,就可推出沿柱面的压力和切应力分布,进而求出阻力系数 C_d 和升力系数 C_l ,

$$C_d = \frac{2}{Re} \int_0^1 \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - 2\pi\omega \right] \Big|_{\xi=0} \sin(2\pi\eta) d\eta$$

$$C_l = \frac{2}{Re} \int_0^1 \left[2\pi\omega - \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right] \Big|_{\xi=0} \cos(2\pi\eta) d\eta \quad (2.7)$$

范围

§ 3. 数值方法

数值求解的基本思想是作者(1992)提出的基于区域分解、有限差分法和涡法杂交的数值方法,并在差分格式和求解方法上作了较大改进。

将流场分解为靠近柱面的内区和余下的外区两部分。内区采用有限差分法,外区采用网格涡解,内外区流动通过交界面互相耦合。

对方程(2.1)中的对流项采用三阶偏心格式,以 $\partial(U\omega)/\partial\xi$ 为例,其离散形式为,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(U\omega) = \begin{cases} ((U\omega)_{i+2,j} - 2(U\omega)_{i+1,j} + 9(U\omega)_{i,j} \\ \quad - 10(U\omega)_{i-1,j} + 2(U\omega)_{i-2,j})/6\Delta\xi & U_{i,j} > 0 \\ (-2(U\omega)_{i+2,j} + 10(U\omega)_{i+1,j} - 9(U\omega)_{i,j} \\ \quad + 2(U\omega)_{i-1,j} - (U\omega)_{i-2,j})/6\Delta\xi & U_{i,j} < 0 \end{cases}$$

方程(2.1)中的粘性项和方程(2.2)采用二阶中心差分格式。方程(2.1)的时间推进为隐式的。这样得到的差分方程,其系数矩阵分别为9对角和5对角的。我们统一采用对宽带大型稀疏矩阵都适用的修正的不完全LU分解的预处理共轭梯度法(MILU_CG)进行求解。

预处理共轭梯度法(PCG)是近年来计算数学领域内发展十分迅速的一类求解大型稀疏矩阵 A 的极其高效的算法^[11],其计算效率依赖于预处理器的选择。所谓一个好的预处理器就是设计一个矩阵 M ,满足(1) M 易求逆,(2) $M^{-1}A$ 的条件数远小于 A 的条件数。求解方程组 $AX = b$ 的预处理共轭梯度法(PCG)可简述如下:

$$\begin{aligned} X &:= X^0 \\ g &:= AX - b; \quad h := M^{-1}g \\ d &:= -h; \quad \delta_0 := g^T h \\ \text{if } \delta_0 &\leq \varepsilon \text{ then stop} \\ R &: \text{ continue} \\ h &:= Ad \\ \tau &:= \delta_0 / (d^T h) \\ X &:= X + \tau d \\ g &:= g + \tau h \\ h &:= M^{-1}g \\ \delta_1 &:= g^T h \end{aligned}$$

```

if  $\delta_1 \leq \varepsilon$  then stop
 $\beta := \delta_1 / \delta_0$ ;  $\delta_0 := \delta_1$ 
 $d := -h + \beta d$ 
goto R

```

目前比较先进的预处理器有不完全的 LU 分解 (ILU) • 定义下标集 $S_A = \{(i, j): a_{ij} \neq 0\}$ • 若仅对矩阵 A 中下标属于 S_A 的 a_{ij} 进行 LU 分解, 这就是 ILU 分解 • 由于 A 的稀疏性, S_A 中的元素很少, 因此 ILU 分解比 LU 分解的计算量要小得多 • 若将 ILU 分解中略去的量 $-a_{ir}^r a_{rj}^r$, $(i, j) \in S_A$ 加到主对角线元素上, 就形成最简单的一种更有效的所谓修正的不完全 LU 分解方法 (MILU)^[11, 12] •

MILU 分解的算法可简述如下:

```

 $A^0 := A$ 
for  $r := 1$  to  $n$  do
begin
  for  $j \geq r$  and  $(r, j) \in S_A$  do
     $a_{rj}^r := a_{rj}^{r-1}$ 
  for  $i > r$  and  $(i, r) \in S_A$  do
     $a_{ir}^r := a_{ir}^{r-1} / a_{rr}^r$ 
  for  $i, j > r$  and  $(i, r) \in S_A$  and  $(r, j) \in S_A$  do
    begin
       $q := -a_{ir}^r a_{rj}^r$ 
      if  $(i, j) \in S_A$  then  $a_{ij}^r := a_{ij}^{r-1} + q$ 
      else  $a_{ii}^r := a_{ii}^{r-1} + q$ 
    end
end
end

```

执行完毕后得到的 a_{ij}^n , $(i, j) \in S_A$, 分别赋给下、上三角矩阵 L , U • 则预处理矩阵 $M = LU$ 的求逆就成为简单地向前与向后回代计算 •

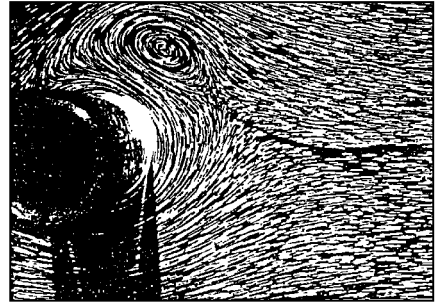
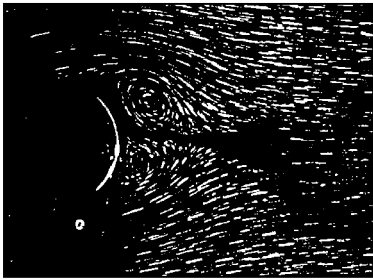
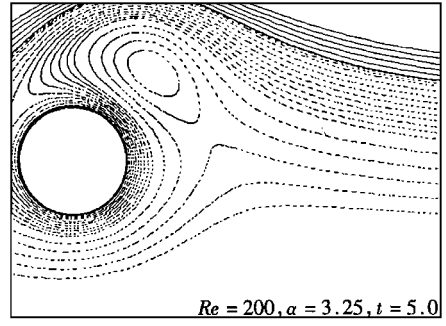
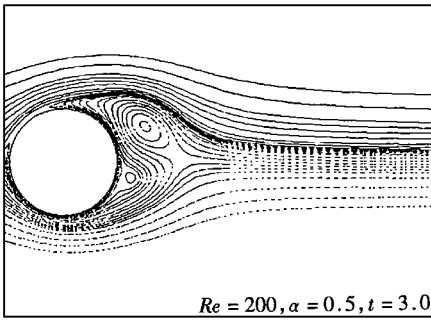
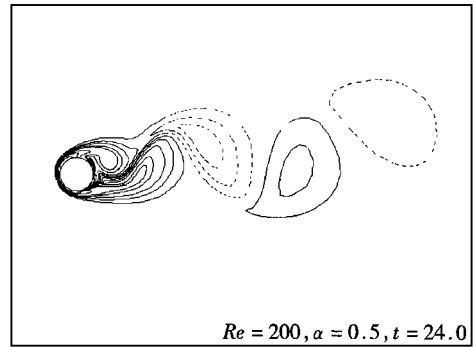
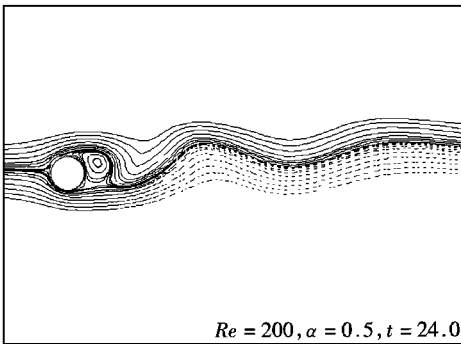
在同样的精度控制下, MILU_CG 方法的求解速度是传统的线松弛 LSOR 结合 LU 分解方法的 6—8 倍^[11, 12], 且这种计算速度上的优势, 随着矩阵规模和复杂性的增加, 会变得更加明显 • 目前, 在大型矩阵方程的计算中, 后者已被前者所取代 •

涡法部分的计算仍与原方法一样, 详细过程请参阅文献[8]—[10] •

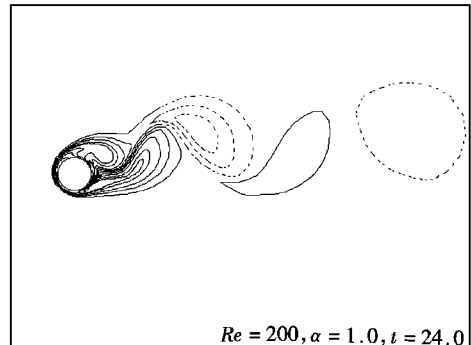
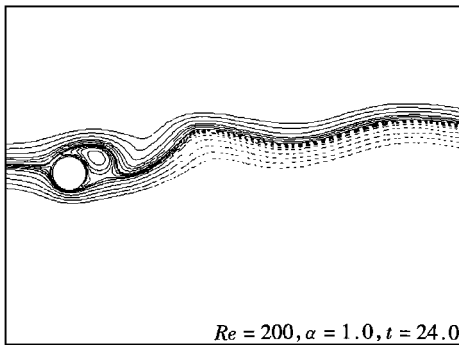
§ 4. 结果分析

本文分别计算了 $Re = 200, 1000$ 和 $\alpha \in (0.5, 3.25)$ 范围内, 均匀来流绕旋转圆柱的流动 • 内区细网格, 网格数为 144×240 , 对应物理平面区域为 $a \leq r \leq 3a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ • 外区粗网格, 内外区粗网格总数为 300×240 , 对应物理平面区域为 $a \leq r \leq 110a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ • 时间步长为 $\Delta t = 0.01$ • 计算终止时间为 $t = 80$ •

图 1 是 $Re = 200$, (a) $\alpha = 0.5, t = 3$, (b) $\alpha = 3.25, t = 5$ 时计算所得的流线分布图与

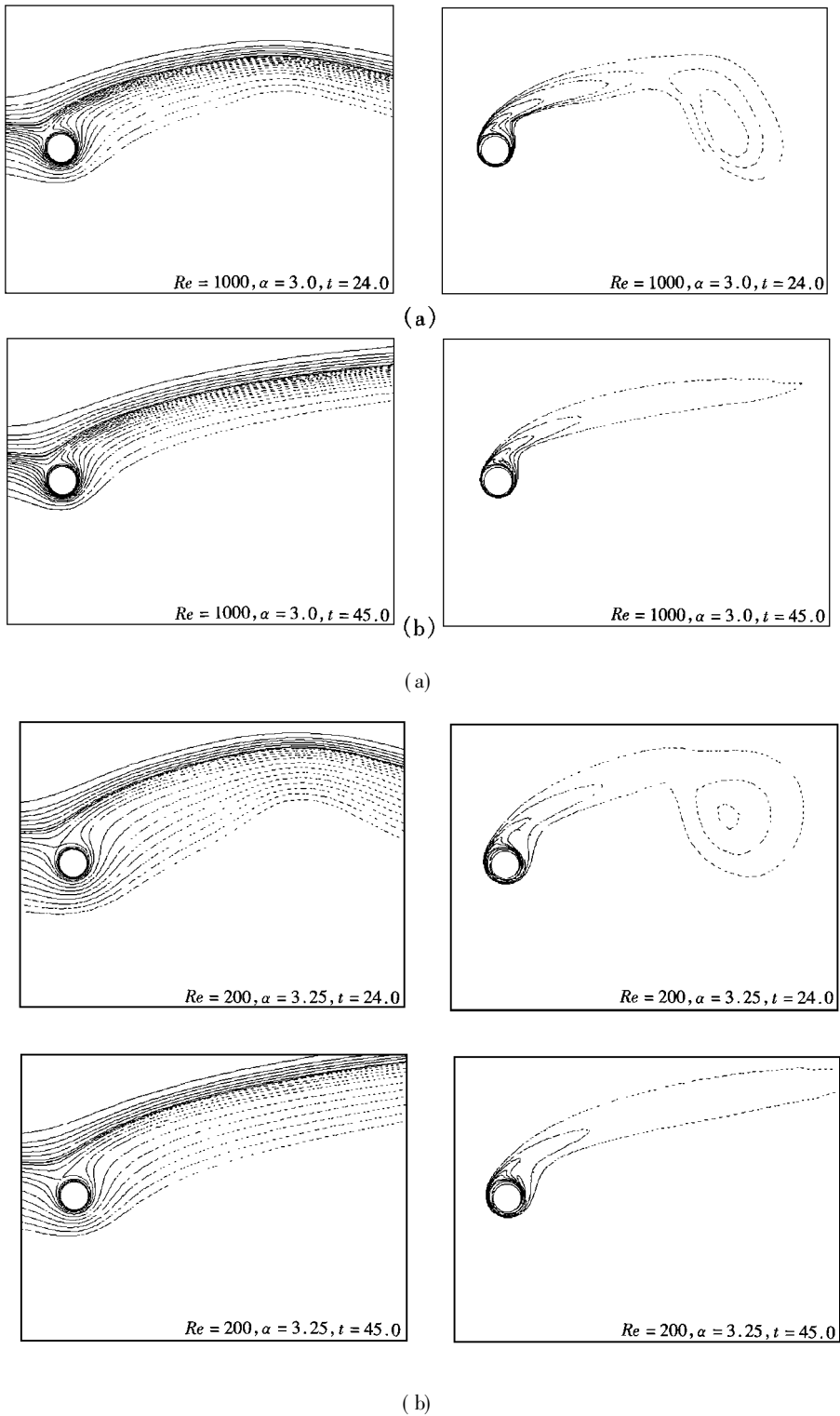
(a) $\alpha = 0.5, t = 3.0$ (b) $\alpha = 3.25, t = 5.0$ 图 1 计算所得流线和实验流场显示的比较 ($Re = 200$)

(a)



(b)

图 2 $Re = 200$, (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 1.0$, 在时刻 $t = 24.0$ 时的流线与涡量分布图



(b)

图3 对(a) $Re = 1000, \alpha = 3.0$, (b) $Re = 200, \alpha = 3.25$, 在时刻 $t = 24, 45$ 时的流线与涡量分布图

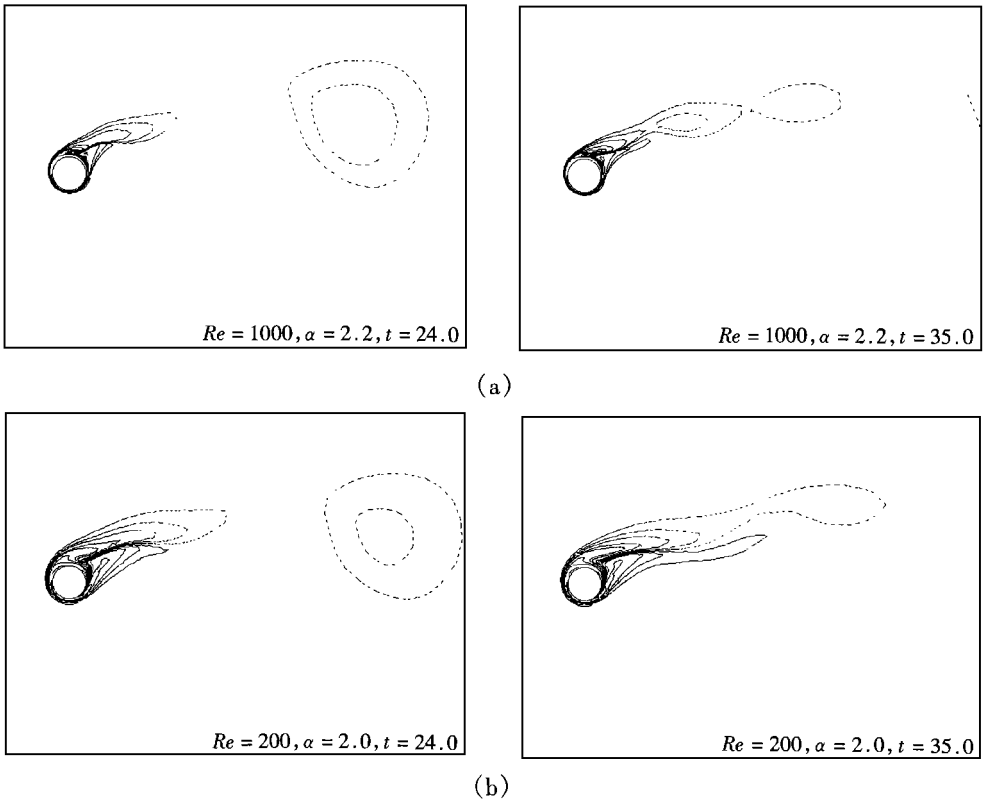


图 4 临界状态时的涡量分布图, 对 (a) $Re = 1000, \alpha = 2.2$, (b) $Re = 200, \alpha = 2.0$

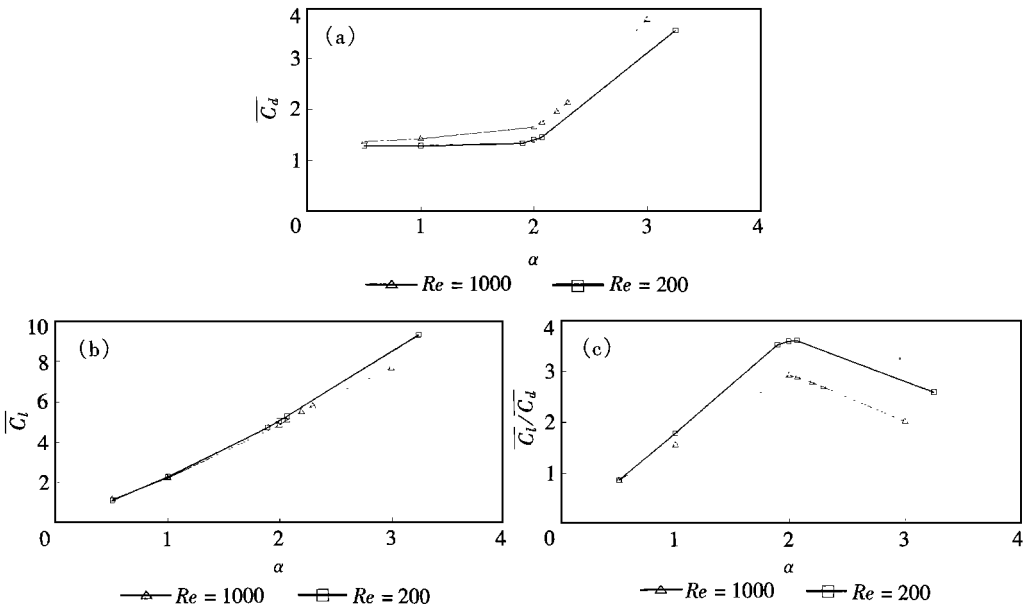


图 5 对 $Re = 1000, 200$, (a) 平均阻力系数 $\overline{C_d}$, (b) 平均升力系数 $\overline{C_l}$,
(c) 平均升阻比 $\overline{C_l}/\overline{C_d}$, 随 α 的变化曲线

已有的实验流场显示照片^{[1-3], [6]}的比较。由图可见, 计算结果与实验结果是完全吻合的。与其他计算结果^{[3-5], [7]}相比, 也很接近。这有力地证明了本文方法的准确性。

改变 α , 柱后尾流将呈现不同的旋涡结构。

图2是 $Re = 200$, (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 1.0$, $t = 24$ 时的流线与涡量分布图。柱后可见由上下柱面周期交替释放涡形成的, 类似固定圆柱绕流时的那种 K \ddot{u} r \ddot{u} m \ddot{u} n 涡街样的旋涡结构, 流线呈较大幅度的周期性波动, 其中心线随 α 的增加, 逐渐沿圆柱旋转方向偏移。

图3是 (a) $Re = 1000$, $\alpha = 3$, (b) $Re = 200$, $\alpha = 3.25$ 在 $t = 24, 45$ 时的流线与涡量分布图。此时, 下柱面上涡的发展完全被抑制, 自上柱面第一个主涡释放后, 流动即趋于稳定, 流线呈平直状, 尾流中除了一个与上柱面相连的单边附着涡外, 再无其他涡释放。这是与文献^{[1], [3]} 的实验结果和文^[7] 的数值结果相一致的。

在上述两种较小 α 时的周期性交替双边释放涡结构的状态, 和较大 α 时的稳定的单边附着涡结构的状态之间, 应该存在一种过渡状态, 我们称之为临界状态。对临界状态时的流动特性和涡结构, 目前还是不清楚的。我们用数值试验的方法, 首次对 $Re = 1000, 200$ 的流动找到了各自的临界旋转速度比 $\alpha_c \approx 2.2$ 和 2.0 , 并给出了临界状态时旋涡结构特点的描述。图4就是 (a) $Re = 1000$, $\alpha = 2.2$, (b) $Re = 200$, $\alpha = 2.0$, 在临界状态时的涡量分布图。下方释放的涡已弱到可不被显示的程度, 但附着涡仍存在, 它对上方涡的结构还起着周期性的影响。所以, 上方自第一个主涡释放后, 附着涡不是稳定状态时的那种几乎平直的形状, 而是呈起伏的藕节状, 且会随时间的发展, 逐节地脱落。这很象文^[5] 说的单边释放涡的情形, 只是这种结构应该发生在临界状态, 而不是 α 较大的稳定状态。

α 对作用在圆柱上的阻力、升力系数也有很大的影响。图5分别是 $Re = 1000, 200$ 时, (a) 平均阻力系数 $\overline{C_d}$, (b) 平均升力系数 $\overline{C_l}$, (c) 平均升力系数和平均阻力系数之比(平均升阻比) $\overline{C_l}/\overline{C_d}$, 随 α 的变化曲线。由图可见, $\overline{C_l}$ 随 α 的增加几乎呈线性增加。 $\overline{C_d}$ 也是随 α 的增加而增加, 但在临界状态前后增加的速度不一样, 临界状态后的增长速度大于临界状态前的增长速度。因此, 平均升阻比 $\overline{C_l}/\overline{C_d}$ 就有可能在某一 α 处, 取得极大值。计算结果指出, 最大升阻比在临界状态附近得到。这表明了研究临界状态的流动特性对流动控制优化问题的重要性。

§ 5. 结 论

1. 对高阶隐式差分格式形成的宽带大型稀疏矩阵方程, 推荐采用 MILU_CG 这一类高效的预处理共轭梯度法求解。
2. 旋转速度比 α 对柱后尾流的旋涡结构和升力、阻力系数的变化, 起着决定性的作用。
3. 存在着临界状态。当 $\alpha < \alpha_c$ 时, 尾流呈类似 K \ddot{u} r \ddot{u} m \ddot{u} n 涡街的周期交替双边释放涡结构。当 $\alpha > \alpha_c$ 时, 尾流呈稳定的单边附着涡结构。当 $\alpha \approx \alpha_c$ 时, 尾流呈节状单边释放涡结构。
4. 最大升阻比在临界状态附近得到。

参 考 文 献

- 1 M. Coutanceau and C. Menard, Influence of rotation on the near_wake development behind an impulsively started circular cylinder, J. Fluid Mech., **158** (1985), 399-446.
- 2 H. M. Badr and S. C. R. Dennis, Time_dependent viscous flow past an impulsively started rotating

- and translating circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, **158** (1985), 447—488.
- 3 H. M. Badr, M. Coutanceau and S. C. R. Dennis, et al, Unsteady flow past a rotating circular cylinder at Reynolds numbers 10^3 and 10^4 , *J. Fluid Mech.*, **220** (1990), 459—484.
 - 4 C. C. Chang and R. L. Chern, Vortex shedding from an impulsively started rotating and translating circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, **233** (1991), 265—298.
 - 5 Y. M. Chen, Y. R. Ou and A. J. Pearlstein, Development to the wake behind a circular cylinder impulsively started into rotating and rectilinear motion, *J. Fluid Mech.*, **253** (1993), 449—484.
 - 6 Y. R. Ou, Mathematical modeling and numerical simulation in external flow control, *Flow Control*, Springer-Verlag (1995), 219—255.
 - 7 Y. T. Chew, M. Cheng and S. C. Luo, A numerical study of flow past a rotating circular cylinder using a hybrid vortex scheme, *J. Fluid Mech.*, **299** (1995), 35—71.
 - 8 凌国灿、凌国平、王运平, 钝体分离旋涡流动的区域分解, 杂交数值模拟——I. 理论方法及其应用, *中国科学, A辑*, (1) (1992), 70—79.
 - 9 凌国灿、凌国平、顾启扬, 高雷诺数下绕钝体分离流动的一种新数值算法, *华中理工大学学报*, **20**(4) (1992), 87—93.
 - 10 Ling Guoping and Ling Guocan, A numerical study of the vortex motion in oscillating flow around a circular cylinder at low and middle Kc numbers, *Acta Mechanica Sinica*, **10**(3) (1994), 212—219.
 - 11 吕涛、石济民、林振宝, 《区域分解算法》, 北京, 科学出版社 (1992), 120—143.
 - 12 石济民、林振宝、岳兴业, MILU_CG 方法在三维三相黑油模型中的应用, *石油勘探与开发*, **21**(6) (1994), 52—58.

MILU_CG Method and the Numerical Study on the Flow around a Rotating Circular Cylinder

Ling Guoping

(Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, P. R. China)

Ling Guocan

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract

A hybrid finite difference method and vortex method (HDV), which is based on domain decomposition and proposed by the authors (1992), is improved by using a modified incomplete LU decomposition conjugate gradient method (MILU_CG), and a high order implicit difference algorithm. The flow around a rotating circular cylinder at Reynolds number $Re = 1000, 200$ and the angular to rectilinear speed ratio $\alpha \in (0.5, 3.25)$ is studied numerically. The long time full developed features about the variations of the vortex patterns in the wake, and drag, lift forces on the cylinder are given. The calculated streamline contours agreed well with the experimental visualized flow pictures. The existence of critical states and the vortex patterns at the states are given for the first time. The maximum lift to drag force ratio can be obtained nearby the critical states.

Key words rotating circular cylinder, vortex pattern, finite difference method, vortex method, preconditioned conjugate gradient method, incomplete LU decomposition