

粘弹性二阶流体混合层流场拟序结构的数值研究^{*}

余钊圣^① 林建忠^②

(1996 年 12 月 14 日收到, 1998 年 2 月 27 日收到修改稿)

摘 要

本文用拟谱方法对随时间发展的二维粘弹性二阶流体混合层流场进行了直接数值模拟, 给出在高雷诺数和低 Deborah 数下大涡的卷起、配对和合并等过程, 通过与相同雷诺数下牛顿流体的比较, 揭示了弱粘弹性对混合层中大涡拟序结构演变的影响。

关键词 混合层 粘弹性二阶流体 数值模拟 拟谱方法 拟序结构

中图分类号 O357

§ 1. 引 言

粘弹性流体的涡流是高分子稀溶液的搅拌、混合和反应过程中常见的流动现象, 但人们对于其规律的认识极为贫乏。自从 1948 年 Toms 发现高分子添加剂减阻现象以来, 其显著的减阻效益和广泛的应用背景, 曾激励众多的研究者对减阻的机理和应用作了大量的研究。但由于粘弹性流体力学和湍流理论的困难, 对于减阻的机理, 至今尚未得到令人满意的解释。少量高分子添加剂对水的粘度几乎没有影响, 但却引起了弹性, 使水变成了粘弹性流体。高分子减阻流动是粘弹性流体的湍流现象, 它比牛顿流体的湍流现象更为复杂。牛顿流体的湍流是线性流体的非线性流动现象, 而粘弹性流体的湍流是非线性流体的非线性流动现象。

二阶流体是一种弱粘弹性流体, 在剪切流动中, 它的粘度和第一、第二法向应力系数均为常数。在拉伸流动中, 它的拉伸粘度随拉伸率线性地增加, 当流体的变形率趋于零时, 二阶流体能连续地逼近牛顿流体, 它的上述性质与高分子减阻流体相似, 所以不失为一种合适的模型。

湍流中的拟序结构已成为近年来湍流研究中的一大热点。目前, 对牛顿流体混合层中的拟序结构已有了比较广泛而深入的研究^{[1]、[2]}, 而有关非牛顿流体混合层拟序结构的研究, 国内外的文献却很少, 对于二阶流体的更是没有见到。本文通过对二阶流体混合层流场进行直接数值模拟, 揭示了弱粘弹性对大涡拟序结构演变过程的影响。

* 国家自然科学基金资助项目(19572058)

① 浙江大学力学系, 流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027

② 浙江大学力学系, 杭州应用工程技术学院, 杭州 310012

§ 2. 数值方法

对于不可压粘弹性二阶流体, 连续性方程和动量方程为:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.2)$$

其中偏应力张量

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \boldsymbol{\nabla} - \frac{1}{2} \Psi_1 \boldsymbol{\nabla} + \Psi_2 \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\nabla} \quad (2.3)$$

式中 Ψ_1 和 Ψ_2 为第一和第二法向应力系数; μ 是粘性系数, $\boldsymbol{\nabla}$ 为变形率张量

$$\boldsymbol{\nabla} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T$$

$\boldsymbol{\nabla}$ 为 $\boldsymbol{\nabla}$ 的随动导数

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial \boldsymbol{\nabla}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\nabla} - \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}$$

把(2.3)式代入方程(2.2), 并考虑到一般情况下, $|\Psi_2| \ll \Psi_1$, 略去 Ψ_2 , 动量方程化为:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\rho \mathbf{V} + \frac{1}{2} \Psi_1 \boldsymbol{\nabla} \right) = & -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{2} \Psi_1 \nabla \cdot \nabla \mathbf{V} \\ & + \frac{1}{2} \Psi_1 [(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) : \nabla \mathbf{V} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

当 $\Psi_1 = 0$ 时, 此式退化为牛顿流体的 N-S 方程。

为便于求解, 对方程(2.4)作进一步推导, 并对之进行无量纲化, 采用混合层二主流速度之差 U_0 和初始动量厚度 θ_0 作为特征量。定义雷诺数 $Re = U_0 \theta_0 / \nu$, 令驰豫时间 $\lambda = \Psi_1 / 2\mu$, 定义 Deborah 数 $De = U_0 \lambda \theta_0$, 得:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{V} + \frac{De}{Re} \nabla \right) + 2\theta p + \frac{1}{2} \left[\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{De}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \right] = & \mathbf{V} \times \left[\boldsymbol{\omega} + \frac{De}{Re} \boldsymbol{\omega} \right. \\ & + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{De}{Re} [2 \nabla \cdot \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) : \nabla \mathbf{V} \\ & \left. + \nabla \cdot \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla^2 \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)] \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

本文模拟的是随时间发展的二维混合层, 初始条件由两部分组成: 一是平均速度场, 采用双曲正切型速度剖面, $U = 0.5 \tanh y$; 二是扰动波产生的速度场, 扰动流函数:

$$\phi(x, y) = A_1 \phi_1(y) \cos(\alpha x) + A_2 \phi_2(y) \cos \left[\frac{\alpha}{2} x + \beta \right] \quad (2.6)$$

上式中: A_1, A_2 分别为基波和次谐波的初始强度; α 为基波波数, 次谐波波数为其一半; β 为基波与次谐波的初始相位差。 $\phi_1(y)$ 和 $\phi_2(y)$ 分别为基波和次谐波归一化的特征模态, 它们由线性稳定性理论给出。稳定性问题的计算结果表明, 在高 Re 数下和低 De 数下, 二阶流体的特征值关系与无粘流体极为接近, 本文采用 Michalke^[3] 给出的对应于最不稳定扰动波的波数 $\alpha = 0.4446$ 。取其它参数 $A_1 = 0.1; A_2 = 0.06; \beta = 0$ 。

对于随时间发展的混合层, 流向(x 方向)可作周期性处理; 由平均速度剖面的特性以及 $y \rightarrow \infty$ 时, 各扰动波特征模态均趋于零的性质, 横向(y 方向)也可近似作周期性处理, 在离平均速度拐点足够远的地方作镜像开拓, 使之具有周期性。模拟卷起时取流向周期 $L_1 = 2\pi/\alpha$, 横向周期 $L_2 = 20$; 模拟配对时两个方向的周期再增加一倍。

在周期性边界条件下,对方程(2.5)采用 Fourier 拟谱方法^[4]求解. 令

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}^2 + \frac{De}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^2 \right] &= \mathbf{G} \\ \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega} + \frac{De}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \right) &= \mathbf{F} \\ \frac{De}{Re} \left[2 \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}^T + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right. \\ &\quad \left. + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right] &= \mathbf{H} \end{aligned}$$

把 $\mathbf{V}, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{H}$ 变换到谱空间, 分别令为 \mathbf{u}^*, g, f, h . 方程(2.5)在谱空间消去 g , 化为:

$$\left. \begin{aligned} k_1 = k_2 = 0: \quad \frac{\partial u_j^*}{\partial t} &= f_j + h_j \\ \text{其它: } \left\{ \begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \left[1 + \frac{De}{Re} |\alpha|^2 \frac{\partial u_j^*}{\partial t} + \frac{|\alpha|^2}{Re} u_j^* \right. \\ &= f_j + h_j - \frac{\alpha \cdot [\alpha \cdot (f + h)]}{|\alpha|^2}, \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

式中 $\alpha = \left[\frac{2\pi}{L_1} k_1, \frac{2\pi}{L_2} k_2 \right]$ ◆

这种算法可以直接推广到三维. 运动方程的时间推进采用下述格式: 非线性项用二阶精度的 Adams_Bashforth 格式, 其余项采用隐式的 Crank_Nicolson 格式. 对于第一步推进, 非线性项采用单层格式.

计算时取 $\Delta t = 0.05$, 流向和横向的节点数 $M \times N$ 基本上取为 64×128 . 取雷诺数为 200 或 400, 其结果代表了高雷诺数的流动, 取 $De = 1.0$, 受计算机内存和运算速度的限制, 本文没有计算高 De 数下的流动.

§ 3. 结果分析与讨论

由离散 Fourier 变换能量守恒性质, 定义平均速度场能量:

$$E_0(t) = \sum_{k_2} (|u_1^*(0, k_2, t)|^2 + |u_2^*(0, k_2, t)|^2)$$

各谐波能量:

$$E_k(t) = 2 \sum_{k_2} (|u_1^*(k, k_2, t)|^2 + |u_2^*(k, k_2, t)|^2), \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

为便于比较, 下文中的各波能量均用 $E_0(0)$ 进行了归一化.

1. Kelvin_Helmholtz 波的卷起

图 3 给出了牛顿流体和二阶流体大涡的卷起过程, 在涡的总体结构上两者始终差别不大, 最终等涡线都呈椭圆形, 流场进入准定常状态. 而涡心附近的等涡线有着很明显的差异, 二阶流体的在大涡卷起时剧烈地卷曲, 而牛顿流体的基本呈椭圆形. 这种差异导致了二阶流体的螺旋形等涡线更加集中, 使得大涡进入准定常状态的时间延迟了.

图 1 代表了两种流体的基波能量 E_1 和涡量绝对值最大值 $|\omega|_{\max}$ 随时间的发展, 由于所取的 De 数比较小, 所以曲线都比较接近, 不过, 可以看出二阶流体 E_1 的增加和下降的幅度都要略小于牛顿流体的; 而 $|\omega|_{\max}$ 比牛顿流体的要大一些, 也就是说, 粘弹性对基波发展和涡量的粘性扩散起着抑制的作用. 可以想象后一影响与涡心附近等涡线的卷曲是有密切联

系的•

2 大涡的配对和合并

图 4 显示了在次谐波存在的情况下牛顿流体和二阶流体两展向大涡配对和合并的过程• 等涡线的差别主要在于涡量的合并阶段, 二阶流体两涡核合并的一部分等涡线极为剧烈地卷曲在涡核和螺旋形“涡束”之间, 这显然阻碍了两涡核涡量的合并, 因此延长了大涡结构的生存期• 从图 4 还可看出, 二阶流体两涡核的旋转速度稍慢于牛顿流体•

图 2(a) 表示了基波($k = 2$) 和次谐波($k = 1$) 能量随时间的发展, 由于所选取的参数关系, 两者差别都极小, 很难得出什么结论• 记通过计算区域中心(两涡旋转中心) 竖直线上的涡量绝对值最大值为 $|\omega_{M/2}|_{\max}$, 图 2(b) 给出了此量随时间的发展• 从图 4 可知, 大涡的合并是由外而内的, 需较长时间两涡核才完全合并, 在这过程中, 两涡核要旋转好多圈, $|\omega_{M/2}|_{\max}$ 随时间的波动也证实了这一点, 可以想象到, 在涡卷起后其波动的每个上峰值点对应于两涡核旋转到竖直位置, 每个下峰值点对应于两涡核转到水平位置• 上峰值近似线性下降和下峰值的上升可以用涡的粘性扩散来解释• 由图 2(b) 再次证实: 二阶流体涡量的扩散和涡核旋转速度都要稍稍慢于牛顿流体•

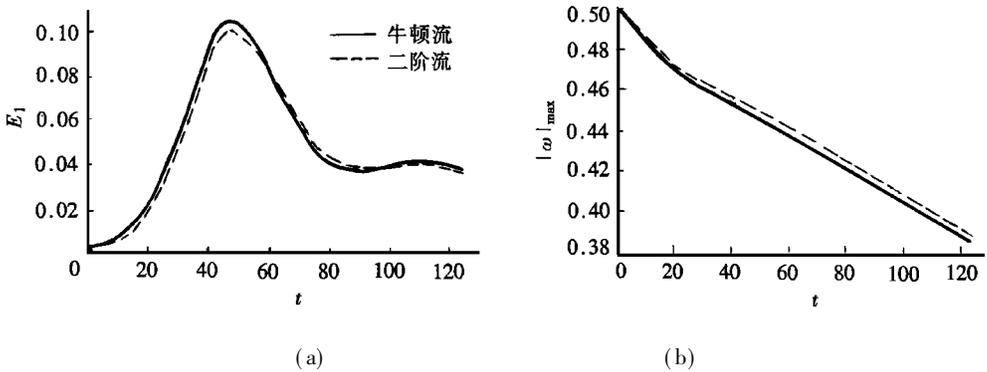


图 1 牛顿流体和二阶流体 E_1 和 $|\omega|_{\max}$ 的比较 ($Re = 200$)

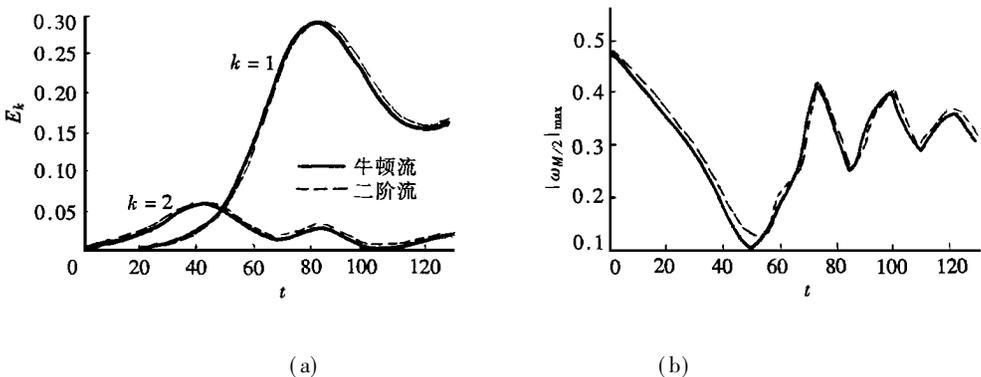
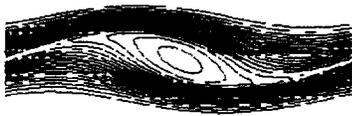


图 2 两种流体 E_1, E_2 和 $|\omega_{M/2}|_{\max}$ 的比较 ($Re = 200$)

§ 4. 结 论

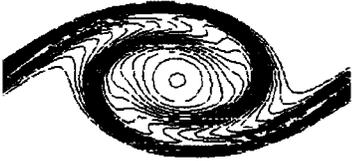
根据以上讨论, 可以总结出粘弹性对于混合层大涡拟序结构的影响:



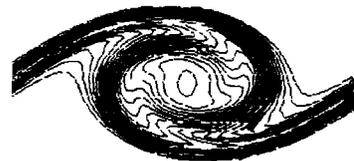
$\max = -0.08, \min = -0.48, t = 20$



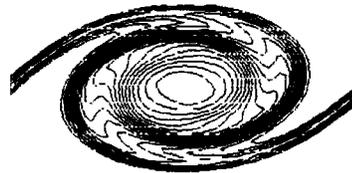
$\max = -0.08, \min = -0.49, t = 20$



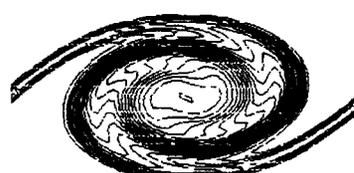
$\max = -0.08, \min = -0.48, t = 40$



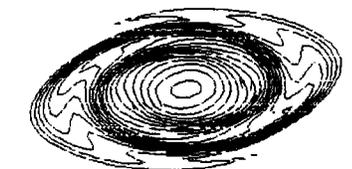
$\max = -0.08, \min = -0.48, t = 40$



$\max = -0.08, \min = -0.48, t = 50$



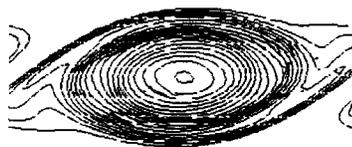
$\max = -0.08, \min = -0.48, t = 50$



$\max = -0.08, \min = -0.47, t = 60$



$\max = -0.08, \min = -0.47, t = 60$



$\max = -0.08, \min = -0.47, t = 70$



$\max = -0.08, \min = -0.47, t = 70$

Newtonian

Second_order

图3 牛顿流体和二阶流体 Kelvin-Helmholtz 波的卷起 ($Re = 400$)

1. 使涡心邻近的等涡线剧烈地卷曲, 从而延长了大涡拟序结构的生存期。
2. 对涡量的扩散起一定的抑制作用。
3. 轻微抑制了基波的发展, 稍稍减缓了两涡配对合并时的旋转速度。

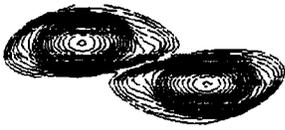
因而,从总体上说,粘弹性流体加强了混合层流场的拟序结构,这一结论与实验结果是一致的^[5]。



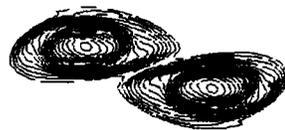
$\max = -0.08, \min = -0.45, t = 40$



$\max = -0.08, \min = -0.45, t = 40$



$\max = -0.08, \min = -0.44, t = 60$



$\max = -0.08, \min = -0.44, t = 60$



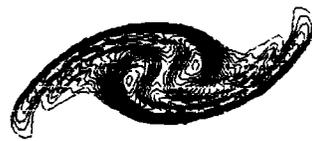
$\max = -0.08, \min = -0.42, t = 80$



$\max = -0.08, \min = -0.42, t = 80$



$\max = -0.08, \min = -0.39, t = 110$



$\max = -0.08, \min = -0.40, t = 110$



$\max = -0.08, \min = -0.37, t = 130$



$\max = -0.08, \min = -0.38, t = 130$

Newtonian

Second_order

图4 牛顿流体和二阶流体大涡的配对与合并($Re = 400$)

参 考 文 献

- 1 C. M. Ho and P. Huerre, Perturbed free shear layers, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16** (1984), 365—424.
- 2 M. M. Rogers and D. M. Robert, The three dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin_Helmholtz rollup, *J. Fluid Mech.*, **243** (1992), 183—226.
- 3 A. Michalke, On the inviscid instability of the hyperbolic_tangent velocity profile, *J. Fluid Mech.*, **19** (1964), 543—556.
- 4 林建忠,《湍流的拟序结构》,北京:机械工业出版社(1995).
- 5 M. Hibberd, M. Kwade and R. Scharf, Influence of drag reducing additives on the structure of turbulence in a mixing layer, *Rheol. Acta*, **21** (1982), 582—586.

Numerical Research on the Coherent Structure in the Viscoelastic Second_Order Mixing Layers

Yu Zhaosheng Lin Jianzhong

(Department of Mechanics, State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract

Numerical simulations have been performed in time_developing plane mixing layers of the viscoelastic second_order fluids with pseudo_spectral method. Rollup, pairing and merging of large eddies were examined at high Reynolds numbers and low Deborah numbers. The effect of viscoelasticities on the evolution of the large coherent structure was shown by making a comparison between thesecond_order and Newtonian fluids at the same Reynolds numbers.

Key words mixing layer, viscoelastic second_order fluids, numerical simulation, pseudo_spectral method, coherent structure