

非完美界面弹性复合材料中的 微分几何方法

童金章^① 关凌云^① 张清杰^①

(郭友中推荐, 1997 年 7 月 11 日收到, 1998 年 5 月 15 日收到修改稿)

摘 要

首次用微分几何方法计算了含一般旋转椭球体嵌入相的非完美界面弹性复合材料的有效模量。用内蕴几何量表出了能量泛函中的全部界面积分项, 由此得到了这种统一嵌入相模型的复合材料有效模量的上下界限。在三种极限情况, 即球、盘和针状嵌入相下, 本文的结果将退化到 Hashin(1992)的结果。

关键词 微分几何法 复合材料 非完美界面 界面积分 有效模量

中图分类号 O186

§ 1. 引 言

复合材料的界面完美与否对其宏观性能即有效性能会产生重大影响。但迄今关于复合材料的研究大都基于完美界面的假定^[1~2]。事实上, 这种假定并非总合适^[3]。因此, 最近文献中展开了非完美界面复合材料的力学研究^[3~6]。Hashin^[6]根据在界面上位移具常值跳跃量的模型, 将弹体的能量极值原理推广到含非完美界面的弹性复合材料中, 建立了小应变下修正的极值原理, 并应用它们导出了这种复合材料有效模量的上下界限。其结果表明, 由于非完美界面的存在, 使得复合材料的有效模量与表征界面非完美的界面参数和界面几何形状相关。特别是上限, 它受到复杂的界面积分的影响。也许是由于这种复杂性, [6]中只给出了两种分立嵌入相, 即球和圆柱体下的复合材料的有效模量。

本文采用一般旋转椭球体嵌入相, 首次用微分几何方法计算界面积分, 用内蕴几何量表出了积分结果。由此得到了这种统一嵌入相模型下复合材料有效模量的上下界限。在三种极限情况下, 即球、盘和针状嵌入相下, 本文的结果将退化到[6]中的相应结果。

§ 2. 线应变下含非完美界面弹性复合材料有效模量的界限公式^[6]

设由两均相所形成的弹性复合材料为统计上均匀的和各向同性的, 其体积为 V , 构型为 $S = S_r \cup S_u$, 基体为 1, 嵌入相为 2, 相体积分分别为 V_1, V_2 , 体积分数分别为 $v_1 = V_1/V, v_2 =$

① 武汉工业大学工程力学系, 武汉 430070

V_2/V ; 界面为 S_{12} , 其上的标准正交活动标架为 (n, s, t) , 其正向取为由 2 指向 1.

现假定 S_{12} 上牵引力的法向和切向分量分别正比于相应的位移跳跃量, 即

$$\left. \begin{aligned} T_n &= D_n[u_n], & [u_n] &= u_n^1 - u_n^2 \\ T_s &= D_s[u_s], & [u_s] &= u_s^1 - u_s^2 \\ T_t &= D_t[u_t], & [u_t] &= u_t^1 - u_t^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{定并} \quad (2.1)$$

式中, D_n, D_s, D_t 称为界面参数. 参照于一固定笛卡儿坐标系 $\{x_i, i = 1, 2, 3\}$, 式(2.1) 可表为张量形式, 即

$$T_i = D_{ij}[u_j], \quad [u_j] = u_j^1 - u_j^2 \quad (2.2)$$

式中, D_{ij} 的主值为 D_n, D_s, D_t .

当将完美界面下的弹体极小势能原理推广到非完美界面下时, 势能泛函中须计入非完美界面的贡献. 设给定的位移边值为

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (\varepsilon_j^0 = \text{const}) \quad (2.3)$$

略去体力, 则势能泛函为

$$U^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{V_1} C_{ijkl}^1 \varepsilon_j \varepsilon_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} C_{ijkl}^2 \varepsilon_j \varepsilon_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_{S_{12}} D_{ij}[u_i][u_j] dS \quad (2.4)$$

对含非完美界面的弹性复合材料, 其有效模量 C^* 由下式定义:

$$U_0^\varepsilon = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_j^0 \varepsilon_{kl}^0 V \quad (2.5)$$

由式(2.4) 和(2.5), 则可得到非完美界面弹性复合材料的极小势能原理表式为

$$U_{\min}^\varepsilon = U_0^\varepsilon \quad (2.6)$$

由于式(2.4) 等号右端的前两项之和为完美界面下的势能泛函, 仅第三项为非完美界面的贡献, 因此用式(2.6) 确定 C^* 时, 关键在于计算这个面积分项. 为此, 构造满足式(2.3) 的可能位移场为

$$u_i(x) = \begin{cases} \varepsilon_j^0 x_j & (\text{在 } V_1 \text{ 内}) \\ \varepsilon_j^0 x_j + \beta_j y_j^m & (\text{在 } V_2 \text{ 的第 } m \text{ 个子域内}) \end{cases} \quad (2.7)$$

式(2.8) 中 $\{y_j^m, j = 1, 2, 3\}$ 是选取第 m 个子域的几何中心为坐标原点的坐标系, β_j 是二阶对称张量. 由式(2.7) 和(2.8) 得 S_{12} 上的位移跳跃分量为

$$\left. \begin{aligned} [u_n]^m &= \beta_j y_j^m n_i^m \\ [u_s]^m &= \beta_j y_j^m s_i^m \\ [u_t]^m &= \beta_j y_j^m t_i^m \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

根据式(2.7) 和(2.8), 可直接得到(2.4) 中的前两个积分. 为了得到第三个积分, 将其被积式改写为正则形式, 即

$$D_{ij}[u_i][u_j] = D_n[u_n]^2 + D_s[u_s]^2 + D_t[u_t]^2 \quad (2.10)$$

于是有

$$\int_{S_{12}} D_{ij}[u_i][u_j] dS = P_{ijkl} \beta_j \beta_{kl} V \quad (2.11)$$

式中

$$P_{ijkl} = \frac{1}{V} (D_n J_{ij}^n + D_s J_{ij}^s + D_t J_{ij}^t) \quad (2.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} J_{ijkl}^m &= \sum \int_{S_{12}} y_j^m y_l^m n_i n_k dS \\ J_{ijkl}^s &= \sum \int_{S_{12}} y_j^m y_l^m s_i s_k dS \\ J_{ijkl}^t &= \sum \int_{S_{12}} y_j^m y_l^m t_i t_k dS \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

积分在 S_{12} 上进行, \sum 表对全部 m 个嵌入体求和. 由上式知 \mathbf{J} 是取决于界面几何形状的四阶各向同性张量, 因此知 \mathbf{P} 也是四阶各向同性的. 对 \mathbf{P} 进行 Hill 分解, 同时考虑到 $\beta_{\bar{j}}$ 的对称性, 则可证下式成立^[7]:

$$P_{\bar{j}kl} \beta_{\bar{j}} \beta_{kl} = 9P^{(1)} \beta^2 + 2P^{(2)} b_{\bar{j}} b_{\bar{j}} \quad (2.14)$$

上式中 $\beta, b_{\bar{j}}$ 分别为 $\beta_{\bar{j}}$ 的球量和偏量, $P^{(1)}, P^{(2)}$ 是 \mathbf{P} 的 Hill 分解系数, 满足

$$\left. \begin{aligned} 3P^{(1)} &= \frac{1}{3} P_{iij} \\ 2P^{(2)} &= \frac{1}{5} \left(P_{\bar{j}\bar{j}} - \frac{1}{3} P_{iij} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

由于 (n, s, t) 为单位正交的, 因此对式(2.13) 进行指标缩并后得到

$$\left. \begin{aligned} J_{iij}^m &= \int_{S_{12}} y_i y_j n_i n_j dS \\ J_{iij}^s &= \int_{S_{12}} y_i y_j s_i s_j dS \\ J_{iij}^t &= \int_{S_{12}} y_i y_j t_i t_j dS \\ J_{\bar{j}\bar{j}}^m &= J_{\bar{j}\bar{j}}^s = J_{\bar{j}\bar{j}}^t = \int_{S_{12}} y_i y_i dS \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

此处 S_{12} 上的积分是式(2.13) 中积分求和的简记形式. 显见式(2.16) 完全确定了 $P^{(1)}$ 和 $P^{(2)}$. 将式(2.14) 代入(2.4) 的第三个积分, 则 U^ε 可表出. 对 U^ε 关于 β 和 $b_{\bar{j}}$ 极小化后, 我们得到^[7]

$$\left. \begin{aligned} \beta &= - \frac{K_2 v_2 \varepsilon^0}{K_2 v_2 + P^{(1)}} \\ b_{\bar{j}} &= - \frac{G_2 v_2 e_{\bar{j}\bar{j}}^0}{G_2 v_2 + P^{(2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

式中, ε^0 和 $e_{\bar{j}\bar{j}}^0$ 分别是 ε_{ij}^0 的球量和偏量, K_2, G_2 分别是嵌入相的体积和剪切模量, 它们由 C_{ijkl}^2 经 Hill 分解而来, 即 $C_{\bar{j}kl}^2 = (3K_2, 2G_2)$. 由式(2.17) 即可得到 U_{\min}^ε , 继而由式(2.6) 即可得到线应变下的有效模量的上限, 即有效体积模量 $K_{(+)}^*$ 和有效剪切模量 $G_{(+)}^*$ (它们由 C_{ijkl}^* 经 Hill 分解而来) 分别为:

$$\left. \begin{aligned} K_{(+)}^* &= \frac{K_2 v_2 P^{(1)}}{K_2 v_2 + P^{(1)}} + K_1 v_1 \\ G_{(+)}^* &= \frac{G_2 v_2 P^{(2)}}{G_2 v_2 + P^{(2)}} + G_1 v_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

式中, K_1, G_1 , 分别是基体相的体积和剪切模量, 同样由 C_{ijkl}^1 经Hill分解得到. 由式(2.18)可知, 当界面非完美时, 复合材料的有效模量除与相模量和体积分数相关外(这是完美界面情况下已知的结果), 还与 $P^{(1)}$ 和 $P^{(2)}$ 相关. 由式(2.12)知, $P^{(i)}$ ($i = 1, 2$) 须由界面参数 D_n, D_s, D_t 和由界面几何形状所确定的张量 \mathbf{J} 共同决定. 因此, 当选定了非完美界面模型(2.9), 即知 D_n, D_s, D_t 后, 则 $K_{(+)}^*$ 和 $G_{(+)}^*$ 就完全取决于界面几何形状了.

类似于应用修正的极小势能原理得到上限的做法, 应用修正的极小余能原理可得下限公式, 即

$$\left. \begin{aligned} K_{(-)}^* &= \left(\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_2}{K_2} + \frac{\xi}{D_n} \right)^{-1} \\ G_{(-)}^* &= \left[\frac{v_1}{G_1} + \frac{v_2}{G_2} + \frac{2}{5} \left(\frac{2}{3D_n} + \frac{1}{D_s} + \frac{1}{D_t} \xi \right)^{-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

式中

$$\xi = S_{12}/V \quad (2.20)$$

此处, S_{12} 表全体 m 个嵌入体的表面积之和. 显见, ξ 是影响下限的几何因素.

§ 3. 旋转椭球体嵌入相的 $P^{(1)}, P^{(2)}, \xi$

设两相弹性复合材料的嵌入相为一般旋转椭球体, 包括长球和扁球, 则界面 S_{12} 为相应的旋转椭圆面, 其方程的矢量形式为

$$\vec{r} = (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sin \theta, c \sin \phi) \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \left[0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中, a, c 为常数, 且 c 位于旋转轴上, 现改记 S_{12} 上的单位正交活动标架为 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, 则有

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_1 &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \vec{e}_2 &= \frac{(-a \sin \phi \cos \theta, -a \sin \phi \sin \theta, c \cos \phi)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} \\ \vec{e}_3 &= \frac{(c \cos \phi \cos \theta, c \cos \phi \sin \theta, a \sin \phi)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} \end{aligned} \right\} \quad \text{对}$$

此外, 求出 S_{12} 的第一基本形式的系数为

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= a^2 \cos^2 \phi \\ g_{12} &= 0 = g_{21} \\ g_{22} &= a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

从而 S_{12} 上的面积元素为

$$dS = a \cos \phi \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi} d\phi d\theta \quad (3.4)$$

现在我们将式(2.16)改写为内积形式, 并将(3.1), (3.2), (3.3)代入其中, 则得到

$$\begin{aligned} J_{ijj}^n &= \int_{S_{12}} \langle \vec{r}, \vec{e}_3 \rangle \langle \vec{r}, \vec{e}_3 \rangle dS = \int_{S_{12}} \frac{a^3 c^2 \cos \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} d\phi d\theta \\ J_{ijj}^s &= \int_{S_{12}} \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle dS = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{ij}^t &= \int_{S_{12}} \langle \bar{r}, \bar{e}_2 \rangle \langle \bar{r}, \bar{e}_2 \rangle dS = \int_{S_{12}} \frac{a(a^2 - c^2) \sin^2 \phi \cos^3 \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} d\phi d\theta \\
 J_{ij}^n &= \int_{S_{12}} \langle \bar{r}, \bar{r} \rangle dS = \int_{S_{12}} a \cos \phi (a^2 \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi) \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi} d\phi d\theta \\
 &= J_{ij}^s = J_{ij}^t
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

由式(3.5)和(2.15)即可求出 $P^{(1)}$ 和 $P^{(2)}$, 分别为:

i) $a > c$, 即扁球(oblate)

$$\begin{aligned}
 P^{(1)} &= \frac{v_2}{3} \left\{ D_n \frac{ac}{\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} + D_t \left[\frac{2a^2 + c^2}{8c} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{c(4a^2 - c^2)}{8a \sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \right] \right\} \quad \text{球,} \\
 P^{(2)} &= \frac{v_2}{10} \left\{ D_n \left[\frac{3(2a^2 + c^2)}{8c} + \frac{c(4a^2 + 3c^2)}{8a \sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \right] \right. \\
 &\quad + D_s \left[\frac{3(2a^2 + c^2)}{8c} + \frac{3c(4a^2 + c^2)}{8a \sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \right] \\
 &\quad \left. + D_t \left[\frac{2a^2 + c^2}{4c} + \frac{c(8a^2 + c^2)}{4a \sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \right] \right\} \quad e
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

式中, $v_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^m c a^2 / V$. 引进无量纲因子如下:

$$\alpha_K^{\text{obl}} = \frac{K_2 v_2}{P^{(1)}}, \quad \alpha_G^{\text{obl}} = \frac{G_2 v_2}{P^{(2)}} \tag{3.7}$$

根据式(3.6), 则(3.7)成为

$$\begin{aligned}
 \alpha_K^{\text{obl}} &= \frac{3(K_2/cD_n) \Lambda^2}{\frac{D_t}{8D_n}(2 + \Lambda^2) + \frac{\Lambda^2}{\sqrt{1 - \Lambda^2}} \left[1 - \frac{D_t}{8D_n}(4 - \Lambda^2) \right] \ln \frac{\sqrt{1 - \Lambda^2} + 1}{\Lambda}} \\
 \alpha_G^{\text{obl}} &= \left\{ 10 \left[\frac{G_2}{cD_t} \right] \int_0^1 \left\{ \left[\frac{3(D_n + D_t)}{8D_t} + \frac{1}{4}(2 + \Lambda^2) + \left[\frac{D_n}{D_t} \left(\frac{1}{2} + \frac{3\Lambda^2}{8} \right) \right] \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3D_s}{D_t} \left(\frac{1}{2} + \frac{\Lambda^2}{8} \right) + \left(2 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) \frac{\Lambda^2}{\sqrt{1 - \Lambda^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \Lambda^2} + 1}{\Lambda} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \right\} \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

式中, $\Lambda = c/a$. 由于

$$\lim_{\frac{a}{c} \rightarrow 1} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \sqrt{a^2 - c^2} \left(\frac{a}{c} \right) = \frac{1}{c} \quad \text{得} \tag{3.9}$$

故式(3.6)成为

$$\begin{aligned}
 P^{(1)} &= \frac{aD_n v_2}{3} = \frac{cD_n v_2}{3} \\
 P^{(2)} &= \frac{av_2}{10} (2D_n + 3D_s + 3D_t)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

这与Hashin[6]中球形嵌入相的结果完全相同. 当 $\frac{c}{a} = \Lambda \ll 1$ 时, 旋转椭球体退化为圆盘.

假定 $D_s = D_t$, 保持式(3.8)中分子不变, 只对其分母用式 $\Lambda^2 \ln \frac{\sqrt{1 - \Lambda^2} + 1}{\Lambda} \rightarrow 0 (\Lambda \rightarrow 0)$, 则式

(3.8) 成为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_K^{\text{obl}} &= \frac{12(K_2/cD_n)\Lambda^2}{D_s/D_n} \\ \alpha_C^{\text{obl}} &= \frac{20(G_2/cD_s)\Lambda^2}{\frac{3}{2}\left[\frac{D_n}{D_s} + \frac{5}{3}\right]} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{os} \\ 2 \end{array} \quad (3.11)$$

将式(3.11)与[6]中式(48)在相条件下的结果^{*},即

$$\left. \begin{aligned} \alpha_K &= \frac{18(K_2/dD_n)\lambda^2}{D_s/D_n} \\ \alpha_C &= \frac{20(G_2/dD_s)\lambda^2}{\frac{D_n}{D_s} + \frac{5}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

相比较,注意两者间有关系 $\Lambda = \lambda$ 和 $c = d$, 可知二者是等价的。式(3.11)中的 α_K^{obl} 和 α_C^{obl} 比(3.12)中的 α_K 和 α_C 略小,其原因在于圆盘毕竟不是圆板(the disk is not platelet),因此当二者线度相同时,前者比后者在几何量上确小一点所至。

ii) $a < c$, 即长球(prolate),

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \frac{v_2}{3} \left\{ D_n \frac{ac}{\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} + D_t \left[\frac{2a^2 + c^2}{8c} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{c(4a^2 - c^2)}{8a\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right] \right\} 2 \\ P^{(2)} &= \frac{v_2}{10} \left\{ D_n \left[\frac{3(2a^2 + c^2)}{8c} + \frac{c(4a^2 + 3c^2)}{8a\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right] \right. \\ &\quad + D_s \left[\frac{3(2a^2 + c^2)}{8c} + \frac{3c(4a^2 + c^2)}{8a\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right] \\ &\quad \left. + D_t \left[\frac{2a^2 + c^2}{4c} + \frac{c(8a^2 + c^2)}{4a\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right] \right\} \quad (3.13) \end{aligned}$$

且同样有

$$\begin{aligned} \alpha_K^{\text{prol}} &= 3(K_2/aD_n)H^2 \left\{ \frac{H^2}{\sqrt{1 - H^2}} \arcsin \sqrt{1 - H^2} + \frac{D_t}{8D_n} [H(2H^2 + 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4H^2 - 1}{\sqrt{1 - H^2}} \arcsin \sqrt{1 - H^2}] \right\} \quad 3 \\ \alpha_C^{\text{prol}} &= 10(G_2/aD_t)H^2 \left\{ \frac{D_n}{8D_t} \left[3H(2H^2 + 1) + \frac{4H^2 + 3}{\sqrt{1 - H^2}} \arcsin \sqrt{1 - H^2} \right] \right. \\ &\quad + \frac{H}{4}(2H^2 + 1) + \frac{8H^2 + 1}{4\sqrt{1 - H^2}} \arcsin \sqrt{1 - H^2} + \frac{3D_s}{8D_t} [H(2H^2 + 1) \\ &\quad \left. + \frac{4H^2 + 1}{\sqrt{1 - H^2}} \arcsin \sqrt{1 - H^2}] \right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

式中, $H = a/c$, 由式(3.14)得到 α_K^{prol} 和 α_C^{prol} 关于 H 的一级近似式为:

* 文献[6]中原式(48), (49), (50)印刷有误。这里的式(3.12)是已勘误的结果。下文中的式(3.17)亦同

$$\left. \begin{aligned} \alpha_K^{\text{pm1}} &= \frac{3(K_2/aD_n)H^2}{\frac{D_t}{8D_n}H} \\ \alpha_G^{\text{pm1}} &= \frac{10(G_2/aD_n)H^2}{\frac{H}{8}\left(\frac{3D_n}{D_t} + 5\right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

当 $a/c = H \ll 1$ 时, 旋转椭球嵌入体即退化为针状纤维. 假定 $D_s = D_t$, 保持式(3.14) 中分子不变, 只对其分母用 $H \rightarrow 0$ 时的极限. 则有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_K^{\text{pm1}} &= \frac{48}{\pi} \left[\frac{K_2}{aD_s} H^2 \right] \\ \alpha_G^{\text{pm1}} &= \frac{160}{\pi} \left[\frac{(G_2/aD_s)H^2}{\frac{3D_n}{D_s} + 5} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

上式与[6]中相对应的 α_K, α_G , 即下式

$$\left. \begin{aligned} \alpha_K &= \frac{27}{2} \left[\frac{K_2}{aD_s} \eta^2 \right] \\ \alpha_G &= \frac{45(G_2/aD_s)\eta^2}{\frac{3D_n}{D_s} + 5} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

同样是完全等价的(其中, $\eta = H$). 式(3.16) 比(3.17) 略大的原因在于针状纤维毕竟不全同于[6] 中的圆柱形纤维所至.

此外, 有

$$\xi = \frac{S_{12}}{V} = \frac{3v_2}{2} \left[\frac{1}{c} + \frac{c}{a\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \right] \quad (a > c) \quad (3.18)$$

$$\xi = \frac{S_{12}}{V} = \frac{3v_2}{2} \left[\frac{1}{c} + \frac{c}{a\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right] \quad (a < c) \quad (3.19)$$

§ 4. 算 例

取 $D_n = 5D_s = 5D_t$. 对 $a > c$, 即扁球体嵌入相, 有

$$\left. \begin{aligned} P^{(1)} &= \frac{v_2 D_n}{3} \left[\frac{2a^2 + c^2}{40c} + \frac{c(36a^2 + c^2)}{40a\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \right] \\ P^{(2)} &= \frac{v_2 D_n}{10} \left[\frac{2a^2 + c^2}{2c} + \frac{c(12a^2 + 5c^2)}{10a\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} + a}{c} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

将式(3.18), (4.1) 代入(2.19), (2.18), 所得到的有效模量结果见图 1, 图 2. 对 $a < c$, 即长球体嵌入相, 其 $P^{(1)}$ 和 $P^{(2)}$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} P^{(1)} &= \frac{v_2 D_n}{3} \left[\frac{2a^2 + c^2}{40c} + \frac{c(36a^2 + c^2)}{40a\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right] \\ P^{(2)} &= \frac{v_2 D_n}{10} \left[\frac{2a^2 + c^2}{2c} + \frac{c(12a^2 + 5c^2)}{10a\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

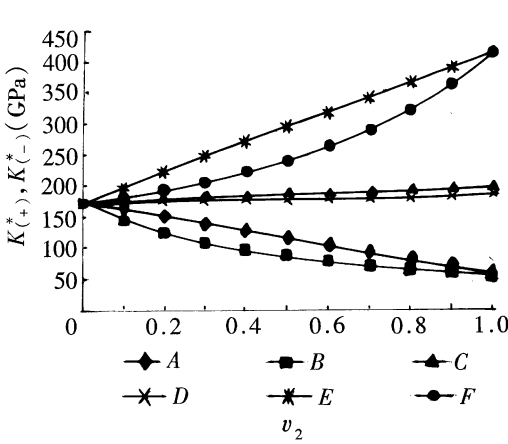


图1 $K_{(+)}^*, K_{(-)}^*$ 随 ν_2 的变化规律 ($a/c = 2$)

(注 A: $D_n a / G_2 = 1$ (上限), B: $D_n a / G_2 = 1$ (下限); C: $D_n a / G_2 = 5$ (上限), D: $D_n a / G_n = 5$ (下限); E: $D_n a / G_2 = \infty$ (上限), F: $D_n a / G_2 = \infty$ (下限))

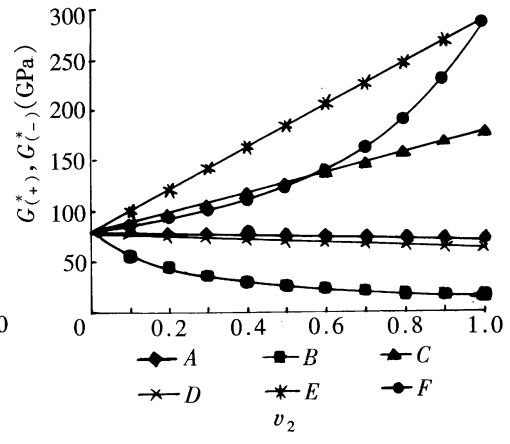


图2 $G_{(+)}^*, G_{(-)}^*$ 随 ν_2 的变化规律 ($a/c = 2$)

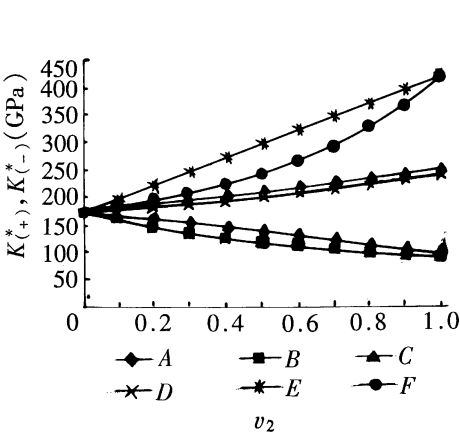


图3 $K_{(+)}^*, K_{(-)}^*$ 随 ν_2 的变化规律 ($a/c = 0.5$)

(A, B, C, D, E, F 的含义见图 1,2 下方的注)

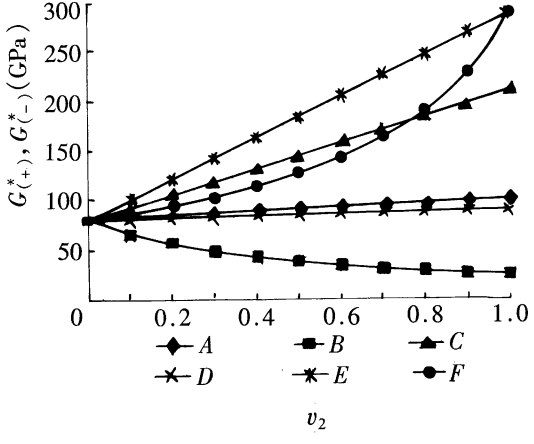


图4 $G_{(+)}^*, G_{(-)}^*$ 随 ν_2 的变化规律 ($a/c = 0.5$)

将式(3.19)、(4.2)代入(2.19)、(2.18)所得有效模量结果见图3、图4。当 $a = c$ 时的结果为扁球体和长球体的共同极限情况,即球,见图5、图6。注意,图1~图6为碳化钨-钴(WC/Co)的结果。其中, $K_1 = 172.4$ (GPa,下同), $G_1 = 79.8$ (Co); $K_2 = 418.7$, $G_2 = 288.3$ (WC)。

§ 5. 结 语

计算了一般旋转椭球体嵌入相的非完美界面弹性复合材料在小应变下的有效模量的上限和下限。对其中由界面几何形状所确定的界面积分项,首次用微分几何方法进行了计算,从而得到了这个统一嵌入相模型下的有效模量的普遍结果。在三种极限情况下,即球、盘和针状嵌

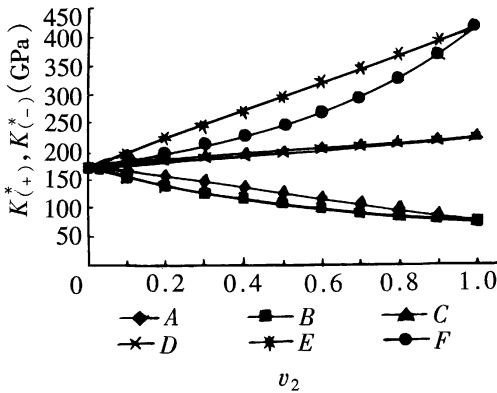


图5 $K_{(+)}^*, K_{(-)}^*$ 随 v_2 的变化规律 ($a/c=1$)
(A, B, C, D, E, F 的含义见图 1, 2 下方的注)

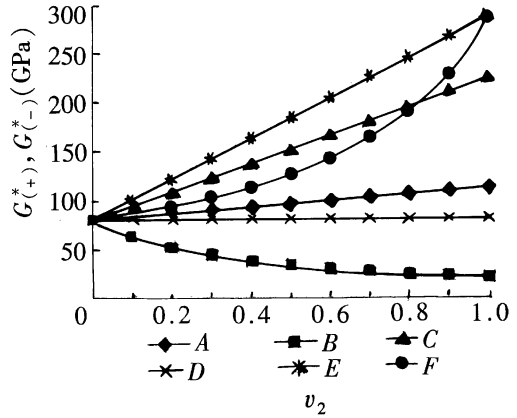


图6 $G_{(+)}^*, G_{(-)}^*$ 随 v_2 的变化规律 ($a/c=1$)
(A, B, C, D, E, F 的含义见图 1, 2 下方的注)

入相下, 由普遍结果所导出的各相应特殊结果与 Hashin^[6] 用分立模型所得结果是一致的。

此外, 用微分几何方法所算得的文中结果便于讨论嵌入相的几何形状对有效模量界限的影响效应。

参 考 文 献

- 1 Z. Hashin, Analysis of composite materials — A survey, J. Appl. Mech., **50**(3) (1983), 481—505.
- 2 童金章、吴学军, 两相弹性复合材料的微分几何结构, 《MMM—V, 现代数学和力学》(陈至达主编), 中国矿业大学出版社 (1993), 157—161.
- 3 J. D. Achenbach and H. Zhu, Effect of interphases on micro and macromechanics behavior of hexagonal—array fiber composite, J. Appl. Mech., **57**(4) (1990), 956—963.
- 4 Y. Benveniste, The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents, Mechanics of Materials, **4** (1985), 197—208.
- 5 Z. Hashin, The spherical inclusion with imperfect interface, J. Appl. Mech., **58**(2) (1991), 444—449.
- 6 Z. Hashin, Extremum principles for elastic heterogeneous media with imperfect interface and their application to bounding effective moduli, J. Mech. Phys. Solids, **40**(4) (1992), 767—781.
- 7 童金章、南策文等, 四阶各向同性张量的 Hill 分解定理及其应用, 武汉工业大学学报, **18**(3) (1996), 111—114.

Differential Geometrical Method in Elastic Composite with Imperfect Interfaces

Tong Jinzhang Guan Lingyun Zhang Qingjie

(Department of Engineering Mechanics, Wuhan University of Technology,
Wuhan 430070, P. R. China)

Abstract

A differential geometrical method is for the first time used to calculate the effective moduli of a two-phase elastic composite materials with imperfect interface which the inclusions are assumed to be ellipsoidal of revolutions. All of the interface integral items participating in forming the potential and complementary energy functionals of the composite materials are expressed in terms of intrinsic quantities of the ellipsoidal of revolutions. Based on this, the upper and the lower bound for the effective elastic moduli of the composite materials with inclusions described above have been derived. Under three limiting conditions of sphere, disk and needle shaped inclusions, the results of this paper will return to the bounds obtained by Hashin^[6] (1992).

Key words differential geometrical method, composite, imperfect interface, interface integral, effective modulus