

旋转流体中圆球沿旋转轴运动产生的扰动

乐嘉春

(戴世强推荐, 1997 年 1 月 6 日收到)

摘 要

本文用线化理论分析了整体旋转的理想流体中有一个圆球沿旋转轴作匀速运动时流体的扰动, 基于旋轴对称流动的假设导出了决定运动稳定性的扰动压力方程和扰动流函数方程. 用简正模法分析了扰动流函数方程, 得出了非平凡中性扰动的波数与波速必须满足的约束条件, 并求出了扰动的精确表达式. 文中得出结论, 中性扰动共有三种可能的形式.

关键词 旋转流体 物体运动 小扰动 稳定性

中图分类号 O351

1 引 言

从水中发射的物体在水中穿行时必然会产生扰动, 如何在物体的远处探测到这些扰动并根据所得信息判定物体的位置、速度以及发射地点是一个重要的问题. 由于被发射物体是旋转的, 所以周围流体相对于与物体同步旋转的参考系作整体旋转, 这是旋转流体中物体运动的问题. Proudman^[1]和 Taylor^[2]最早研究这类问题, 他们证明了当物体缓慢运动时, 流动在每一个垂直于旋转轴的平面上是一样的. Taylor 通过一系列理论分析和实验, 发现物体在旋转流体中的运动有别于它在非旋转流体中的运动, 且有些差别与边界条件无关^[3]. 近几十年来, 旋转流体的研究在地球物理学中最多, 但这种研究都假设 Rossby 数是小量, 与本文所研究的流动不同. 其它方向上近期的研究有: Honji 等的实验^[4]研究了底部倾斜的水箱作旋转对热对流引起流体重力不稳定运动的影响; Gorodtsov^[5]讨论了球对称区域中均匀分布的分层流体因物体沿一方向平动产生的运动; Iyengar 等^[6]分析了形状近似球的物体在微极流体中的缓慢转动.

鉴于中性扰动对流动的稳定性特征有决定性作用, 本文着重讨论物体在旋转流场中运动产生的中性扰动. 为此我们导出了扰动压力和扰动速度的方程, 求解得出三类非平凡中性扰动, 对这三类扰动的特征作了讨论. 通过分析扰动存在的条件, 指出非奇异振荡型长波扰动最可能被测到.

2 扰动方程

我们考虑密度为 ρ 的不可压理想流体充满全空间, 流体以角速度 Ω 旋转, 一个半径为 a 的刚性小球沿流体旋转轴负向以速度 U 运动.

已有的理论工作都假设了流动是旋轴对称的(流动物理量在垂直于旋转轴的平面上沿周向不变),实验结果证明这是合理的^[7],本文仍采用这一假定 根据流动的特点,我们设立柱坐标系(x, r, θ),原点在小球中心, x 轴沿旋转轴,坐标系绕 x 轴以角速度 Ω 旋转 记位置向量为 \mathbf{r} 的点处流体速度为 \mathbf{v} ,压力为 p ,重力为 \mathbf{F} ,坐标系角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ (沿 x 轴方向),则连续性方程和 Euler 方程是

$$\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\mathbf{v}}{t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{F} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla p$$

设流体的静水压力是 p_0 , 若记扰动压力的某种度量是

$$P = \frac{p - p_0}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2$$

因为 $\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}_x = -\Omega^{-1} \nabla^2 r^2$, 则 Euler 方程成为

$$\frac{\mathbf{v}}{t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = - \nabla P \tag{2 1}$$

根据流场的旋轴对称性,我们有一= 0

设流场受到扰动(v_x, v_r, v_θ)这里 v_x, v_r, v_θ 是其平方及乘积可以忽略的小量,受扰压力是 P , 则流动满足(2 1) 保留一阶小量, 则得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v_x = - \frac{P}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \tag{2 2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v_r - 2 \Omega v_\theta = - \frac{P}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \tag{2 3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v_\theta + 2 \Omega v_r = 0 \tag{2 4}$$

连续性方程是 $\frac{v_x}{x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0$ (2 5)

从(2 3)和(2 4)消去 v_θ , 我们有

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + 4 \Omega^2 \right] v_r = \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial r}$$

利用(2 5)消去 v_r 并将(2 2)代入, 我们得到压力扰动的方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{2P}{x^2} + 6 \frac{2P}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{P}{r} \right) + 4 \Omega^2 \frac{2P}{x^2} = 0 \tag{2 6}$$

我们也可以从(2 2)和(2 3)消去 P

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{v_x}{x} - \frac{v_r}{r} \right) - 2 \Omega \frac{v_\theta}{x} = 0 \tag{粘性规律}$$

引入扰动流函数 使 $v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, v_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$

并将 v_θ 用(2 4)代入, 则流函数满足的方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \Omega^2 \frac{2}{x^2} \psi = 0 \tag{2 7}$$

(2 6)和(2 7)的比较说明扰动压力和扰动流函数的方程相似, 压力方程中的 Laplace 算子对应流函数方程中的 Stokes 算子 两个方程都可以作基本方程, 但下面的分析中将处理流函数方程, 因为: (1) 对旋轴对称流动, 研究流函数更适宜; (2) 我们注意, 若压力显式出现在边界条件中, 前面对压力所作的变换使求解更困难

流函数的边界条件是, 离旋转轴无穷远处无扰动, 即

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{当 } r \rightarrow \infty) \tag{2 8}$$

小球表面扰动速度为零,但对 Euler 方程我们一般不能要求切向速度为零,所以作为边界条件我们要求

$$\int_{r^2+x^2=a^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} n_x - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} n_r \right] dS = 0 \tag{2.9}$$

即穿过小球表面没有净流量,其中 S 是球面面积, n_r 和 n_x 分别是球面单位外法向量在 r 方向和 x 方向的分量

3 分 析

我们用简正模法求解扰动流函数的方程,即设扰动是

$$\psi = e^{i(x-ct)} f(r),$$

此处 k 是实的波数,波速 c 可以是复数 将 ψ 代入方程(2.7)得

$$\left[(U-c)^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) + 4k^2 \right] f = 0 \tag{3.1}$$

由于中性扰动的 c 是实数,从上式看出我们可以要求本征函数 f 是实函数

以下我们寻找非平凡中性扰动,先看两种特殊情况 若 $k=0$ 则任意函数 f 均满足 (3.1),但这时流函数与 x 无关,这种解不是我们感兴趣的沿 x 轴方向传播的扰动

若 $k \neq 0$,而 $U-c=0$ 则只能得到平凡解 $f=0$

对于 $k \neq 0, U-c \neq 0$ 的一般情况,方程(3.1)是

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left[4k^2 / (U-c)^2 - k^2 \right] f = 0 \tag{3}$$

经变换 $f(r) = g(r)$ 我们得到

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \left[\frac{4k^2}{(U-c)^2} - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] g = 0 \tag{3.2}$$

记 $E = \sqrt{|4k^2 / ((U-c)^2) - k^2|}$, 则方程(3.2)的解在

i) $2 / |U-c| > 1$ 时, $f(r) = C_1 J_1(Er) + C_2 Y_1(Er)$

式中, J_1, Y_1 分别是第一类和第二类一阶 Bessel 函数

ii) $2 / |U-c| < 1$ 时, $f(r) = C_3 I_1(Er) + C_4 K_1(Er)$

其中, I_1, K_1 分别是第一类和第二类一阶虚宗量 Bessel 函数

iii) $2 / |U-c| = 1$ 时 $f(r) = C_5 r + C_6 / r$

上面的 $C_i (i=1, \dots, 6)$ 都是常数

由于流函数

$$\psi = e^{i(x-ct)} f(r) = e^{i(x-ct)} g(r)$$

扰动速度是

$$V_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = - i e^{i(x-ct)} g(r)$$

$$V_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = e^{i(x-ct)} \left[g'(r) + \frac{g(r)}{r} \right]$$

根据 Bessel 函数在无穷远处的渐近性质, $z \rightarrow \infty$ 时

$$J_1(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{\pi}{2}), Y_1(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \frac{\pi}{2}), J_{-1}(z)/z \sim \frac{1}{z}, y_{-1}(z)/z \sim \frac{1}{z}$$

$$I_1(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, I_{-1}(z)/z \sim \frac{e^z}{z}, K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, K_{-1}(z)/z \sim \frac{e^{-z}}{z}$$

为满足远离旋转的边界条件(2.8), 当 $i) 2 / |U - c| >$ 时 C_1, C_2 不受限制; ii) $2 / |U - c| <$ 时 $C_3 = 0$; iii) $2 / |U - c| =$ 时 $C_5 = 0$

根据小球表面的边界条件(2.9), 我们有

$$\int_{r^2 + x^2 = a^2} \left\{ -i f(r) n_r + \left[f(r) + \frac{f(r)}{r} \right] n_x \right\} e^{i(x-a)} dS = 0$$

换用球坐标系 (R, θ, ϕ) , 它与极坐标系的关系是

$$x = R \cos \theta, \quad r = R \sin \theta, \quad \phi = \phi,$$

因此有

$$\int_0^{\pi} \left\{ -i f(a \sin \theta) \sin^2 \theta + \left[f(a \sin \theta) + f(a \sin \theta) a \sin \theta \cos \theta \right] e^{i a \cos \theta} \right\} d\theta = 0$$

由于 $\int_0^{\pi} (\dots) d\theta = \int_0^{\pi/2} (\dots) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (\dots) d\theta$, 经变量代换边界条件是

$$\int_0^{\pi/2} \left\{ -i f(a \sin \theta) \sin^2 \theta \left[\cos(a \cos \theta) + \left[f(a \sin \theta) + f(a \sin \theta) a \sin \theta \cos \theta \right] \sin(a \cos \theta) \right] \right\} d\theta = 0$$

即 $f(a \sin \theta) \sin \theta \sin(a \cos \theta) = 0$ 当 $\theta = 0$

Bessel 函数在原点的性质是

$$z \rightarrow 0 \text{ 时, } J_1(z) \sim z, \quad z Y_1(z) \sim -2/z, \quad z K_1(z) \sim 1$$

所以小球表面的边界条件是

i) $2 / |U - c| >$ 时, $\sin(a) C_2 = 0$

ii) $2 / |U - c| <$ 时, $\sin(a) C_4 = 0$

iii) $2 / |U - c| =$ 时, $\sin(a) C_6 = 0$

容易看出, 此边界条件与波数 k 有关, 因此波数将影响解的性质

4 讨论和结论

以上分析表明中性扰动的波数与波速是相互关联的, 其中波数是决定性质的关键因素根据波数的取值我们有

若 $k = n/a$ (n 自然数), 即 $\sin(a) = 0$ 则小球表面的边界条件恒满足, 我们得到

i) 型扰动: $2 / |U - c| >$ 时, $f(r) = C_1 J_1(Er) + C_2 Y_1(Er)$

ii) 型扰动: $2 / |U - c| <$ 时, $f(r) = C_4 K_1(Er)$

iii) 型扰动: $2 / |U - c| =$ 时, $f(r) = C_6/r$

若 $k \neq n/a$ (n 自然数), 即 $\sin(a) \neq 0$, 则在三种情况下边界条件分别是 $C_2 = 0, C_4 = 0, C_6 = 0$, 于是仅在 $2 / |U - c| >$ 时有非平凡中性扰动 $f(r) = C_1 J_1(Er)$, 显然这就是 型扰动 综合上述, 非平凡中性扰动共有三种类型

在 $r = 0$, 型和 型扰动都有一阶奇性, 型扰动可能没有奇性, 如果有奇性则也是一阶的

三种扰动在 $r \rightarrow 0$ 时的性态各不相同, 由于

$$\text{型扰动 } f(r) \sim \sqrt{2/r} \left[C_1 \sin(r - \pi/4) - C_2 \cos(r - \pi/4) \right]$$

$$\text{型扰动 } f(r) \sim C_4 \sqrt{1/2r} e^{-r}$$

型扰动 $f(r) \sim C_0/r$

所以趋于零的速度 型扰动最慢, 型扰动最快, 型扰动居中 从扰动的变化规律可以看出, 型扰动的 $f(r)$ 正负值都有, 是振荡函数, 型扰动和 型扰动的 $f(r)$ 是取值恒正或恒负的单调函数 我们还可以发现 型扰动是一种横波(它的 $v_x = 0$), 与 型扰动或 型扰动都不同 因此对于三种扰动的迭加, 我们可以根据 r 时各种扰动趋于零的不同速度以及变化规律的不同将测到的信号分解出来

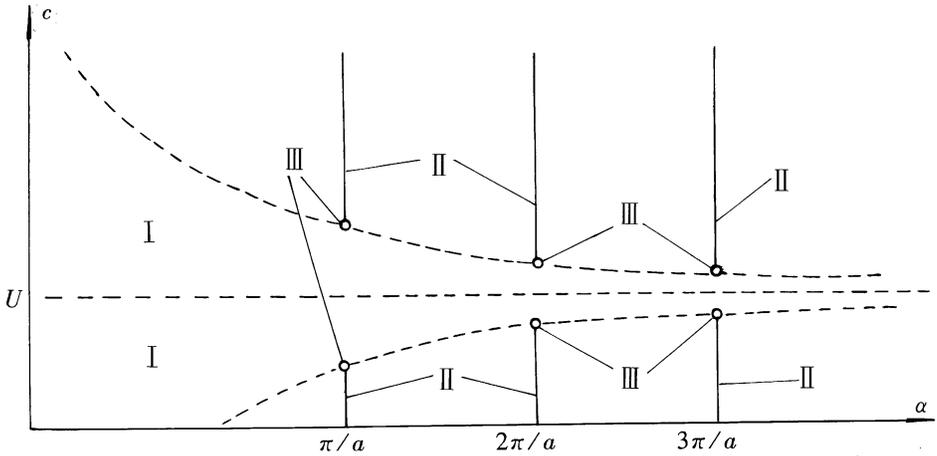


图 1

如果我们在波数 α 和波速 c 的平面上将非平凡中性扰动的存在区域标出(见图 1, 虚线不包含), 则可以看出, 由于 型扰动存在区域的上边界和下边界都以直线 $c = U$ 为渐近线, 增大时存在区域的宽度不断减小, 所以根据面积分布我们相信实际能测到的扰动主要是 型扰动, 其波数 α 一般比较小(即扰动是长波), 而且由于奇性扰动仅在 $\alpha = \frac{n}{a}$ (n 自然数) 时存在, 所以扰动一般没有奇性 值得注意的是, 在能量分布上奇性扰动占不小的比例, 所以奇性扰动也很重要, 但它的能量集中在 x 轴附近, 如何检测是一个难题

我们得到结论:

- (1) 非平凡中性扰动共有三类, 其中有一类是横波
- (2) 最可能测到的中性扰动是无奇性的振荡型长波
- (3) 奇异中性扰动的能量较大, 且能量集中在流体的旋转轴附近

应当指出, 我们的模型是理想流体的运动, 所以某些中性扰动在 $r = 0$ 有奇性, 如果考虑流体的粘性, 则扰动的奇性将不会出现, 而转化成扰动强度在流体的旋转轴上有一个大的峰值 此外, 如果计及非线性效应, 则中性扰动在 r 时的衰减规律将有变化, 但我们相信三类扰动的区别仍是明显的

参 考 文 献

- 1 Proc. Roy. Soc. A, 92 (1916), 408) 424.
- 2 G. I. Taylor, Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational, Proc. Roy. Soc. A, 93 (1917), 99) 113.
- 3 S. Goldstein (editor), Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. I, Oxford University Press (1938), 47.
- 4 H. Honji and T. Hosoyamada, Instability of the rotating gravity flow down a slope, Reports of Research Institute for Applied Mechanics, 35(105) (1989), 55) 64.
- 5 V. A. Gorodtsov, Behavior of a sphere in an ideal uniformly stratified medium, Fluid Mech. Res., 21 (6) (1992), 100) 106.
- 6 T. K. V. Iyengar and D. S. Charya, Slow steady rotation of an approximate sphere an incompressible micropolar fluid, Int. J. Eng. Sci., 33(6) (1995), 867) 877.
- 7 G. I. Taylor, The motion of a sphere in a rotating liquid, Proc. Roy. Soc. A, 102 (1922), 180) 189.

D i s t u r b a n c e s t o a R o t a t i n g F l u i d w i t h a S p h e r e
M o v i n g a l o n g t h e A x i s o f R o t a t i o n

Le Jiachun

(Department of Engineering Mechanics and Technology ,
Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

Abstract

In this paper, the disturbances to a uniformly rotating ideal fluid, with a sphere moving steadily along the axis of rotation are analysed by using linearization theory, the equations of disturbance pressure and disturbance stream function governing the stability of motion are derived based on the assumption that the flow is rotational symmetric. The equation of disturbance stream function is analysed with the method of normal modes, and the constraints on wave number and wave velocity of the nontrivial neutral disturbances are established and the exact expression of the neutral disturbances are obtained. The conclusion is drawn that there are three kinds of possible forms of neutral disturbances.

Key words rotating fluids, motion of body, small disturbances, stability