应用数学和力学, 第 19 卷 第 9 期(1998 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

带一类第一积分的非完整系统的 Szebehely 问题*

朱海平①

(黄永念推荐, 1997 年 1 月 20 日收到, 1998 年 4 月 10 日收到修改稿)

摘　　要

研究非完整系统动力学的一类逆问题. 给出非完整系统的运动方程及其显式, 考虑一类仅受齐次非完整约束的力学系统的 Szebehely 问题, 研究已知一类第一积分的一般非完整系统的情形. 最后举例说明其应用.

关键词　分析力学　非完整系统　动力学逆问题

中图分类号　O316

§1. 引　　言

动力学逆问题是力学中的一个重要课题, 已受到许多学者的广泛关注. 1977 年, Szebehely 提出了一类动力学逆问题: 已知平面上一质点的一族带参数的轨线, 确定质点的力函数. 他最终得到关于力函数的一个一阶线性偏微分方程; 后来, Erdi[1], Melis 和 Piras[2], Melis 和 Borghero[3], Bozis 和 Mertns[4] 等将 Szebehely 问题推广到了三维及 n 维的完整系统; 最近, 本文作者与梅凤翔教授[5] 研究了一类非完整系统的 Szebehely 问题.

本文研究带一类第一积分的非完整系统的 Szebehely 问题. 首先, 将非完整系统的 Routh 方程表示为显式, 去掉乘子后将它变为一个二阶常微分方程组, 此方程组和约束方程确定系统的运动; 其次, 考虑仅受齐次非完整约束的力学系统的 Szebehely 问题, 得到比独立广义速度数目少 1 的一组关于力函数的偏微分方程; 然后, 讨论带一类第一积分的一般非完整系统的情形; 最后举例说明其应用.

§2. 非完整系统的运动方程及其显式

为叙述简单, 如无特殊声明, 本文中的表达式采用 Einstein 求和约定, 以下指标分别取值为: $s, k, l, m, i, j = 1, \cdots, n$; $\beta, \gamma = 1, \cdots, g$; $\mu, \alpha = 1, \cdots, \varepsilon - 1$ $(\varepsilon = n - g)$; $\nu = 1, \cdots, n-1$.

---

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助课题

① 北京大学力学与工程科学系, 北京 1000871

设力学系统的完整约束是定常的, 其位形由 n 个广义坐标 $q^s(s=1,\cdots,n)$ 来确定, 系统的运动受有 g 个理想的非完整约束

$$f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \tag{2.1}$$

其中, $\boldsymbol{q}=(q^1,\cdots,q^n)^T$, $\dot{\boldsymbol{q}}=(\dot q^1,\cdots,\dot q^n)^T$, 系统的运动方程可表为Routh 方程形式[6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^s}-\frac{\partial T}{\partial q^s}=\frac{\partial U}{\partial q^s}+\lambda^\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s} \tag{2.2}$$

其中, $T=1/2a_{sk}(\boldsymbol{q})\dot q^s\dot q^k$ 为系统的动能, $U=U(\boldsymbol{q})$ 为力函数, λ^β 为未定乘子• 方程(2.2) 能展开为显式

$$a_{sk}\ddot q^k+[k,m;s]\dot q^k\dot q^m=\frac{\partial U}{\partial q^s}+\lambda^\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s} \tag{2.3}$$

其中, $[k,m;s]$ 为 a_{sk} 的第一类Christoffel 记号• 由方程(2.3) 得到广义加速度的表达式

$$\ddot q^l=\frac{\Delta^{sl}}{\Delta}\left\{-[k,m;s]\dot q^k\dot q^m+\frac{\partial U}{\partial q^s}+\lambda^\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s}\right\} \tag{2.4}$$

这里, $\Delta=\det(a_{sk})$, Δ^{sl} 为 Δ 中元素(s,l) 的代数余子式• 将约束方程(2.1) 两边对 t 求导, 得

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^l}\ddot q^l+\frac{\partial f_\beta}{\partial q^l}\dot q^l=0 \tag{2.5}$$

将(2.4) 代入方程(2.5) 中, 得到为确定乘子 λ^β 的代数方程• 解这组代数方程, 可得 λ^β 的表达式

$$\lambda^\beta=-\frac{\Delta_1^{\gamma\beta}}{\Delta_1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q^l}\dot q^l-\frac{\Delta_1^{\gamma\beta}}{\Delta_1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q^l}\frac{\Delta^{sl}}{\Delta}\left\{-[k,m;s]\dot q^k\dot q^m+\frac{\partial U}{\partial q^s}\right\} \tag{2.6}$$

其中, $\Delta_1=\det\left(\frac{\Delta^{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q^l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s}\right)$, $\Delta_1^{\gamma\beta}$ 为 Δ_1 中元素(γ,β) 的代数余子式• 将(2.6) 代入(2.4) 中, 得到

$$\ddot q^l=H^l+G^{ls}\frac{\partial U}{\partial q^s} \tag{2.7}$$

其中

$$H^l=H^l(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$
$$\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{\Delta^{sl}}{\Delta}\left\{-[k,m;s]\dot q^k\dot q^m-\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s}\frac{\Delta_1^{\gamma\beta}}{\Delta_1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q^k}\dot q^k+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s}\frac{\Delta_1^{\gamma\beta}}{\Delta_1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q^j}\frac{\Delta^{ji}}{\Delta}[k,m;j]\dot q^k\dot q^m\right\}$$
$$G^{ls}=G^{ls}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\frac{\Delta^{sl}}{\Delta}\left(1-\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^k}\frac{\Delta_1^{\gamma\beta}}{\Delta_1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q^m}\frac{\Delta^{km}}{\Delta}\right)$$

系统的运动由方程(2.1) 、(2.7) 确定•

§ 3. 齐次非完整约束系统的Szebehely 问题

假设约束方程(2.1) 的左边函数满足

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s}\dot q^s=k_\beta f_\beta \tag{3.1}$$

可将(2.1) 、(3.1) 合并表示为: 系统广义坐标和广义速度被限制在流形 Ω 上

$$\Omega: f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,\qquad \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q^s}\dot q^s=k_\beta f_\beta \tag{3.2}$$

此系统的运动方程与方程(2.7) 有相同的形式• 仅受线性齐次非完整约束的系统显然满足条件

(3.1)• 以上系统的一类 Szebehely 问题已在文[5]给出• 下面,从另一角度来考虑此类系统•

方程(2.7)可以看成是某一质点在 n 维空间中的运动方程• 假设已知此质点运动轨线被限制在位形空间的流形 C 上

$$C:\ \varphi_\mu(\boldsymbol{q}) = C_\mu \tag{3.3}$$

这里,C_μ 为任意的常数• 将(3.3)两边对 t 求导,得到

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^s}\dot{q}^s = 0 \tag{3.4}$$

假设(3.4)与约束方程(2.1)各式独立• 现考虑非完整系统(3.2)、(2.7)的一个动力学逆问题:已知系统的轨线约束流形(3.3)和非完整约束流形(3.2),确定系统的力函数 U•

方程(2.1)和(3.4)可以看成是关于广义速度 $\dot{q}^s$ 的 $n-1$ 个独立的方程,解这组方程可得到 n 个广义速度中的 $n-1$ 个的表达式,不妨设这 $n-1$ 个广义速度为 $\dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^{n-1}$,考虑到条件(3.1),应有形式

$$\dot{q}^\nu = M^\nu(\boldsymbol{q})\dot{q}^n \tag{3.5}$$

设 $M^n = 1$,则(3.5)式结合 $\dot{q}^n = M^n\dot{q}^n$ 可合写为

$$\dot{q}^s = M^s(\boldsymbol{q})\dot{q}^n \tag{3.6}$$

将(3.6)式代入方程(2.7)中,得到

$$\ddot{q}^l = A^l(\boldsymbol{q})(\dot{q}^n)^2 + B^{ls}(\boldsymbol{q})\frac{\partial U}{\partial q^s} \tag{3.7}$$

其中

$$A^l(\boldsymbol{q}) = H^l(\boldsymbol{q}, M(\boldsymbol{q})),\quad B^{ls}(\boldsymbol{q}) = G^{ls}(\boldsymbol{q}, M(\boldsymbol{q}))$$

$$M(\boldsymbol{q}) = (M^1(\boldsymbol{q}), \cdots, M^n(\boldsymbol{q}))^T$$

将(3.4)对 t 求导,得

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l}\ddot{q}^l + \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial q^k \partial q^s}\dot{q}^k\dot{q}^s = 0 \tag{3.8}$$

然后,将(3.6)、(3.7)代入方程(2.5)、(3.8)中,得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}^l}\left[A^l(\dot{q}^n)^2 + B^{ls}\frac{\partial U}{\partial q^s}\right] + \frac{\partial f_\beta}{\partial q^l}M^l\dot{q}^n = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l}B^{ls}\frac{\partial U}{\partial q^s} + \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l}A^l + \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial q^l \partial q^s}M^lM^s\right)(\dot{q}^n)^2 = 0 \tag{3.10}$$

因为方程(2.5)和方程(3.7)实际上是相容的,故(3.9)为恒等式• 系统的力函数 U 由(3.10)确定• 容易得知,系统(3.2)、(2.7)具有能量积分[6]

$$T - U = E \tag{3.11}$$

其中,E 为几何参数 C_μ 的函数• 将式(3.6)代入(3.11)后,可得到

$$(\dot{q}^n)^2 = \frac{2(U + E)}{a_{sl}M^sM^l} \tag{3.12}$$

将(3.12)代入方程(3.10)中,得到

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l}B^{ls}\frac{\partial U}{\partial q^s} + \frac{2(U + E)}{a_{mk}M^mM^k}\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l}A^l + \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial q^l \partial q^s}M^lM^s\right) = 0 \tag{3.13}$$

方程(3.13)是 $\varepsilon - 1$ 个关于力函数 U 的一阶线性偏微分方程,这可看成 Szebehely 问题对非完整系统(3.2)、(2.7)的一个推广•

如果(3.3)式中 $\mu = 1, \cdots, n-1$,且让(3.4)与约束方程(2.1)相容,则以上问题变为文[5]

中考虑的问题•

现假设根据质点运动的一些基本力学性质，已知系统具有一类第一积分

$$b_s(\boldsymbol{q})\dot{q}^s = K \tag{3.14}$$

K 为几何参数 C_μ 的函数• 将(3.6)代入(3.14)中，可得

$$\dot{q}^n = \frac{K}{b_s M^s} \tag{3.15}$$

将(3.15)代入(3.6)中，得

$$\dot{q}^l = \frac{M^l K}{b_s M^s} \tag{3.16}$$

由能量积分(3.11)，可得到

$$U = T - E = \frac{1}{2} a_{kl} \frac{M^l M^k}{(b_s M^s)^2} K^2 - E \tag{3.17}$$

故(3.17)确定了系统的力函数• 不过，这时几何参数 C_μ 的两个函数 E 与 K 一般不独立，两者之间存在一些关系• 将(3.17)代入方程(3.13)中，得到

$$E_\mu K^2 + F_{\mu\alpha} \frac{\partial K}{\partial C_\alpha} K + J_{\mu\alpha} \frac{\partial E}{\partial C_\alpha} = 0 \tag{3.18}$$

其中

$$\begin{aligned} E_\mu = {} & \frac{1}{2(b_i M^i)^3} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l} B^{ls} \Bigg[\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial q^s} M^k M^m + 2 \frac{\partial M^k}{\partial q^s} M^m a_{km} \right) (b_i M^i) \\ & - 2 \left(\frac{\partial b_i}{\partial q^s} M^i + b_i \frac{\partial M^i}{\partial q^s} \right) a_{km} M^k M^m \Bigg] + \frac{1}{(b_i M^i)^2} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l} A^l + \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial q^l \partial q^s} M^l M^s \right) \end{aligned}$$

$$F_{\mu\alpha} = \frac{1}{(b_i M^i)^2} a_{km} B^{ls} M^k M^m \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q^s}, \quad J_{\mu\alpha} = - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^l} B^{ls} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q^s}$$

(3.18)式就是积分常数 E 与 K 的相容性条件•

§4. 一般非完整系统的情形

假设力学系统的非完整约束方程为(2.1)，则系统的运动方程应为(2.7)• 现考虑非完整系统(2.1)、(2.7)的一类动力学逆问题：已知系统的轨线约束流形(3.3)，非完整约束流形(2.1)及一类第一积分

$$g(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = C \tag{4.1}$$

确定系统的力函数 U• 上式中 C 应与几何参数 C_μ 有关•

将(3.3)对 t 求导，得到方程(3.4)• 方程(2.1)、(3.4)、(4.1)是关于 n 个 $\dot{q}^s$ 的 n 个方程，故可解得广义速度 $\dot{q}^s$ 的表达式，设为

$$\dot{q}^s = N^s(\boldsymbol{q}, C) \tag{4.2}$$

将(4.2)代入方程(2.7)中，得到

$$\ddot{q}^l = H^l + G^{ls} \frac{\partial U}{\partial q^s} \tag{4.3}$$

其中

$$H^l = H^l(\boldsymbol{q}, C) = H^l(\boldsymbol{q}, N(\boldsymbol{q}, C)), \quad N(\boldsymbol{q}, C) = (N^1(\boldsymbol{q}, C), \cdots, N^n(\boldsymbol{q}, C))$$

$$G^{ls} = G^{ls}(\boldsymbol{q}, C) = G^{ls}(\boldsymbol{q}, N(\boldsymbol{q}, C))$$

将方程(3.4)两边对 t 求导，得到方程(3.8)· 将方程(4.2)、(4.3)代入方程(3.8)中，得到

$$G^{ls}\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q^l}\frac{\partial U}{\partial q^s}+\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q^l}H^l+\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial q^k\partial q^s}N^kN^s=0 \tag{4.4}$$

方程(4.4)是关于力函数 U 的 $\varepsilon-1$ 个方程，由此可确定系统的力函数·

§5. 应　　用

设一在势力场中运动的质点，受有一个非线性非完整约束

$$\dot z^2=\dot x^2+\dot y^2 \tag{5.1}$$

系统的动能为 $T=(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)/2$· 给定一轨线约束流形

$$f(x,y,z)=C \tag{5.2}$$

C 为几何参数· 现确定系统的力函数 $U(x,y,z)$·

系统的运动方程由(2.7)给出

$$\ddot x=\frac{\partial U}{\partial x}+2\dot x\lambda,\quad \ddot y=\frac{\partial U}{\partial y}+2\dot y\lambda,\quad \ddot z=\frac{\partial U}{\partial z}-2\dot z\lambda \tag{5.3}$$

其中

$$\lambda=\frac{1}{2(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)}\left(-\dot x\frac{\partial U}{\partial x}-\dot y\frac{\partial U}{\partial y}+\dot z\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

方程(3.13)给出

$$A\frac{\partial U}{\partial x}+B\frac{\partial U}{\partial y}+D\frac{\partial U}{\partial z}+2(U+E)F=0 \tag{5.4}$$

其中

$$A=(M_2^2+1)\frac{\partial f}{\partial x}-M_1M_2\frac{\partial f}{\partial y}+M_1\frac{\partial f}{\partial z},\quad B=-M_1M_2\frac{\partial f}{\partial x}+(M_1^2+1)\frac{\partial f}{\partial y}+M_2\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$D=M_1\frac{\partial f}{\partial x}+M_2\frac{\partial f}{\partial y}+(M_1^2+M_2^2)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$F=M_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+M_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2M_1M_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2M_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+2M_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$$

$$M_1=\frac{-f_xf_z\pm f_y\sqrt{f_x^2+f_y^2-f_z^2}}{f_x^2+f_y^2},\quad M_2=\frac{-f_yf_z\pm f_x\sqrt{f_x^2+f_y^2-f_z^2}}{f_x^2+f_y^2}$$

方程(5.4)可确定系统的力函数 U·

若已知系统存在第一积分

$$a_1\dot x+a_2\dot y+a_3\dot z=K \tag{5.5}$$

其中，$a_1=a_1(x,y,z)$, $a_2=a_2(x,y,z)$, $a_3=a_3(x,y,z)$· 则由(2.17)可得到系统的力函数

$$U=\frac{(M_1^2+M_2^2+1)K^2}{2(a_1M_1+a_2M_2+a_3)^2}-E \tag{5.6}$$

K 与 E 应满足相容性条件

$$HK^2+GK\frac{\partial K}{\partial C}+I\frac{\partial E}{\partial C}=0 \tag{5.7}$$

其中

$$H=\frac{1}{M^3}\left\{\left[A\left(M_1\frac{\partial M_1}{\partial x}+M_2\frac{\partial M_2}{\partial x}\right)+B\left(M_1\frac{\partial M_1}{\partial y}+M_2\frac{\partial M_2}{\partial y}\right)+D\left(M_1\frac{\partial M_1}{\partial z}+M_2\frac{\partial M_2}{\partial z}\right)\right]M\right.$$

$$- A\frac{\partial M}{\partial x} - B\frac{\partial M}{\partial y} - D\frac{\partial M}{\partial z}\Bigg\} + \frac{F(M_1^2 + M_2^2 + 1)}{M^2}$$

$$G = \left(A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + D\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{M_1^2 + M_2^2 + 1}{M^2}, \quad I = A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + D\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$M = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3$$

考虑一类特殊情况• 假设(5.2)中

$$f(x, y, z) = x - \frac{1}{2}z \tag{5.8}$$

则(5.4)变为

$$3\frac{\partial U}{\partial x} - \sqrt{3}\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{5.9}$$

方程(5.9)的一般解为

$$U = \varphi(\sqrt{3}x + 3y, z) \tag{5.10}$$

φ 为任意函数• 显然, 著名的Appell 例[6]为其特例•

致谢 本文工作的顺利完成, 与武际可教授的关怀是分不开的, 在此深表谢意•

参 考 文 献

1 B. Erdi, Generalization of Szebehely's equation for three dimensions, *Celest. Mech.*, **28**(2) (1982), 209—218.

2 A. Melis and B. Prias, An Extension of Szebehely's problem to holonomic systems, *Celest. Mech.*, **32**(1) (1984), 87—92.

3 A. Melis and F. Borghero, On Szebehely's problem extended to holonomic systems with a given integral of motion, *Meccanica*, **21**(1) (1986), 71—74.

4 G. Bozis and R. Mertns, On Szebehely's inverse problem for a particle describing orbits on a given surface, ZAMM, **65**(3) (1985), 383—384.

5 朱海平、梅凤翔, Szebehely 问题对非完整系统的一个推广, 非线性动力学学报, **2**(1) (1995), 76—82.

6 梅凤翔,《非完整系统动力学基础》, 北京工业学院出版社, 北京 (1985).

Szebehely's Problem for Nonholonomic Systems with a Given First Integral

Zhu Haiping

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract

An inverse problem for nonholonomic systems is studied. The equations of motion of nonholonomic systems are given, and the Szebehely's problem for a mechanical system with homogeneous nonholonomic constraints is considered, and the general nonholonomic systems with a given first integral are studied.

Key words analytical mechanics, nonholonomic system, inverse problem