

随机化交通灯的二维元胞自动机交通模型^{*}

顾国庆^① 许伯铭^② 汪秉宏^③ 戴世强^④

(1997 年 1 月 31 日收到)

摘 要

元胞自动机交通模型以简单的规则反映交通系统中的多种因素, 可以分析各种交通现象, 且可在计算机上方便、高效地运作. Biham-Middleton-Levine 模型(BML 模型)实现了二维交通问题的元胞自动机模型的模拟研究. 本文对 BML 模型作了改进, 解除了该模型中关于交通灯同步变化的限制. 在新模型中, 每个路口的交通灯可以自由选定起始工作时间和变化节奏, 于是可以更全面、准确地反映交通灯对交通系统性能的影响. 本文还对新模型中出现的若干新效应作了解释.

关键词 元胞自动机 交通模型 交通灯 相变

中图分类号 TB126

§ 1. 引 言

随着城市社会经济的发展, 交通流量的增长与现有道路状况之间的矛盾日益严重, 已成为制约城市经济发展的主要因素之一. 因此近年来, 交通问题受到包括物理学、力学和数学在内的多种学科的专家们的重视, 提出了各种各样的交通模型. 本文将采用元胞自动机模型研究交通灯对城市交通的影响.

元胞自动机模型中, 描述系统演变的三个要素(时间变量、空间变量和状态变量)都定义在离散集上. 交通问题中的状态变量(车辆、人员和交通设施等)都是整数, 而作为模拟交通的主要手段——计算机, 实际上只能直接对离散集进行运算. 研究对象、研究手段和理论模型三者在元胞自动模型中获得了最大限度的统一, 因此它能以十分简捷的方式反映交通过程中实际存在的各种复杂因素, 而且能在计算机上演示这些因素对城市交通性态的影响. 因而, 在很短的几年时间内, 元胞自动机交通模型已经演绎出大量有意义的结果.

实际的城市交通都是二维的道路网络; 对于有高架道路和地铁的现代化城市来说, 应该是准二维的道路网络. 由于交通问题的复杂性, 现有的交通模型几乎完全局限于讨论一维的交通流问题. 1992 年, O. Biham, A. A. Middleton 和 D. Levine 在元胞自动机理论的框架上提出了

* 上海市自然科学基金重点课题

① 上海理工大学系统科学与系统工程学院, 上海 200093

② 香港中文大学物理系, 香港新界沙田

③ 中国科技大学近代物理系, 合肥 230026

④ 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

一个二维的城市交通模型^[1]。他们发现,随着车辆密度的增大,系统会发生相变:在相变点以下,系统的终态是车辆皆可行驶的运动相;在相变点以上,则是车辆被堵住的阻塞相。鉴于该模型能充分发挥计算机的快速运算能力,因而是一个有意义的城市交通模型。

BML 模型相当简单直观。在该模型中,有一 $N \times N$ 的方形点阵, N 是点阵的边长。每个格点可以有一辆由南向北行驶的车辆,或者有一辆由东向西行驶的车辆,或者没有车辆占据。在每一奇数时间步,南北向的车辆可以向前行驶一个格点;同样,在每一偶数时间步,东西向的车辆可以向前行一个格点。这样规定的的作用相当于用红绿灯控制路口的交通。但是,如果车辆前面的格点已有其它车辆占据,那么这辆车只能在原来的格点等候,不能向前行驶。

BML 模型问世后引起了广泛的注意。改进和扩充 BML 模型,把各种交通因素合理地容纳进去,使元胞自动机交通模型更接近于城市交通的实际情况,是当前努力的方向^[2-7]。

交通灯在城市交通中起着极为显著的作用, BML 模型也的确反映了这一事实。但是 BML 模型关于交通灯的规定过于理想化:每个路口都有红绿灯,某一时刻所有的交通灯都为南北向行驶的车辆开绿灯,然后以同一节奏变换红绿灯。在实际的城市中很难甚至根本无法实现这些要求。例如,只要有一个五叉路口,或在干道上亮绿灯的时间长些,都会破坏交通灯同步变化的要求。我们已经研究了交通灯失灵对城市交通性态的影响^[6]。本文将更深入地改进 BML 模型中有关交通灯的规定。在新改进的模型中,有部分路口为南北向行驶的车辆亮绿灯,其余的路口为东西方向得驶的车辆亮绿灯,各个路口以各自独立的节奏变换红绿灯。这样,当输入有关数据后,可更真实地反映实际城市的交通情况。

§ 2. 模 型

为了使路口的交通灯能按各自的节奏变换红绿灯,我们采用定义在二维方点阵上的六个态的元胞自动机。自动机的态与交通状态之间的编码规则规定为:0 态、1 态、2 态代表为东西方向行驶的车辆亮绿灯;3 态、4 态、5 态代表为南北方向行驶的车辆亮绿灯;另外,0 态、3 态表示格点上没有车辆占据,1 态、4 态表示有一东西向行驶的车辆;2 态和 5 态表示有一南北向行驶的车辆。车辆行驶的规则还是采用 BML 模型的规定。

在 BML 模型中,所有的格点从其交通功能来看实际上都相当于路口^[1]。(关于包括路口和路段的元胞自动机交通模型,我们将在另一篇论文中讨论。)另外,在 BML 模型中,同一时刻所有的路口都为同一方向行驶的车辆亮绿灯。于是亮红灯的效果,既可看作允许车辆离开某一路口,也可看作是允许车辆进入前方的路口,因为两者的实际效果是等同的。当交通灯同步变化的条件不再存在时,它所蕴涵的平移对称性也随之消失,于是交通灯的功效应该在模型中明确定义。仔细观察城市中路口的交通灯,可以知道:看到亮红灯,车辆应该在停车线外等候,不能进入路口;然而车辆一旦已经过了停车线,那么这时即使绿灯翻红灯,它也得继续向前得驶,尽早离开路口。因此在我们的模型中明确规定:亮红灯的格点不允许该方向行驶的车辆进入该格点;但是如果该格点上有车辆,前方格点又不为其他车辆占据,那么这辆车应该向前行驶,离开该格点。补上了这一规定后,模型中的各项规则就能相互协调,也更符合实际的交通情况。

在 BML 模型中,奇数时间步只有南北向行驶的车辆可以运动,偶数时间步则只有东西向行驶的车辆可以运动。相应地, BML 模型中的平均速度也定义为这两个时间步上运动车辆的数量与车辆总数之比。在本文的模型中,奇偶数时间步之间的差别已不存在,平均速度可以直

接定义为某一时间步上运动车辆的数量与车辆总数之比。

模拟开始时,我们以密度 P_e 和 P_n 随机地在点阵上分布东西向行驶的车辆和南北向行驶的车辆。并且以 0~ 0.5 之间的某个概率随机选取格点,在这些格点上为南北方向行驶的车辆亮绿灯,其余的格点为东西方向行驶的车辆亮绿灯。本文中,我们只考虑一个最简单的情况,即每个路口的交通灯都有同样的交换节奏,而且每隔一时间步翻一次红绿灯。在这一框架上,讨论交通灯的变换节奏对系统的影响也是不难做到的。在上述编码规则下,系统每运作一次,给小于 3 的态加上 3,将大于 2 的态减去 3,就可以实现模拟翻红绿灯的目的。

第 i 行第 j 列格点上的状态的演化规律为

$$S_{t+1}(i, j) = F[S_t(i-1, j), S_t(t-1, j), S_t(i+1, j), S_t(i, j-1), S_t(i, j+1)]$$

这是 von Neumann 近邻相互作用的元胞自动机。用条件语句实现这一演化规律是十分困难的,而且容易产生错误。实际上上面的五元函数可以化成一些二元函数之和^[8]。定义四个 6×6 的变换矩阵: $mw(i, j), mn(i, j), me(i, j), ms(i, j)$, 这四个变换矩阵都只有两个非零元素,它们是:

$$mw(0, 1) = 1; mw(0, 4) = 1; mn(3, 2) = 2; mn(3, 5) = 2$$

$$me(1, 0) = 1; me(4, 0) = 1; ms(2, 3) = 2; ms(5, 3) = 2$$

那么状态变化可以表示为

$$S_{t+1}(i, j) = nm + mw(nm, S_t(i, j-1)) + mn(nm, S_t(i-1, j)) - me(nm, S_t(i, j+1)) - ms(nm, S_t(i+1, j))$$

其中 $nm = S_t(i, j)$

对于有限长度的元胞自动机模型,需要规定边界条件。与 BML 模型一样,我们选择周期性边界条件,目的是尽量减少边界效应对系统性质的影响^[1]。南北向行驶的车辆密度是 P_n ,它等于南北向行驶的车辆与格点数之比。同样可定义东西向行驶的车辆密度 P_e 。本文中先考虑 $P_n = P_e = P$ 的情况。

§ 3. 模型结果

我们先在 64×64 的点阵上进行模拟。取 50% 的格点为东西向行驶的车辆亮绿灯,余下的 50% 的格点为南北向行驶的车辆亮绿灯。也就是取 $C = 0.5$ 。在格点上以 P_e 和 P_n 的概率随机地分布东西向行驶和南北向行驶的车辆。如果系统的终态是阻塞相,那么平均速度是零。系统每运行一次,都输出平均速度。如果连续两次输出的平均速度为零,就可知道系统已经进入了阻塞相。该样本的模拟即告结束。

在车辆密度较低的情况下, BML 模型的吸引子都是周期解。其中最为简单的吸引子是,当为东西向行驶的车辆亮绿灯时,东西向行驶的车辆都可以向行驶,而且下一时刻南北向行驶的车辆也都能向行驶。如果把车辆的分布图沿着主对角线平移一个格点,则 t 时刻的图象与 $t+2$ 时刻的图象完全重合。BML 在论文中已经详细说明了这种运动模式^[1]。我们发现在 BML 模型中还存在着各种周期大于 2 的运动模式。当车辆密度趋近相变点时,出现大周期吸引子的概率也快速增大。在本文的模型中,吸引子的性质更为复杂。大部分的低密度样本系统经过长时间的演化后,平均速度会围绕某个平均值上下浮动。这些样本或许也是周期吸引子,但周期太长不易鉴别。所以我们仍然采取常用的办法,取一个很长的时间,并把最后 N 次的平均速度取平均作为系统吸引子的平均值。经充分的试验后,我们把样本的运行时间定

为 $40 \times N$ 。

我们把车辆密度作为横坐标,把平均速度作为纵坐标,画出演化曲线。图 1 是 $N = 64$ 的 $V-P$ 曲线。我们把 BML 模型的相应结果画在图上以资比较。BML 模型相当于 $C = 0$ 情况。

从图 1 可能看到两种模型之间的一些定性差别。BML 模型中运动相的平均速度是等于 0.5 的常数。在新模型中,运动相的平均速度随车辆密度增大而减小,成为一条向下倾斜的直线。而且在运动相,本模型的平均速度略大于 BML 模型的相应值。为了说明这一结果,我们考察在某条南北向的大街上行驶的车辆。在 BML 模型中,路口的红绿灯每一时刻都同步地翻一次,所以车辆都行驶一个格点,停一下。在 $T = N$ 的时间内,车辆行驶的距离是 $S = N/2$, 平均速度是 $V = S/T = 1/2$ 。现在对于某一条南北向的街道说,平均有 $C \times N$ 个格点为南北方向行驶的车辆亮绿灯,其余的格点为东西向行驶的车辆亮绿灯。如果这 $C \times N$ 个格点都不相连接,那么南北向行驶的车辆走到这种格点就能连续走三个格点。相对于 BML 模型来说,每一个这样的格点都使车辆多走一个格点的距离。因此,在 $T = N$ 的时间内,南北向的车辆行驶的距离是 $S = (N/2) + CN$ 。对于东西向行驶的车辆也有同样的结果。于是平均速度应为 $V = C + 1/2$ 。当 C 增大时,这些格点相互邻接的机会也多,结果车辆连续行驶的机会也减少。另外,当车辆密度增加时,前方格点为其它车辆占据的概率较大,也会中断车辆的连续行驶。因此只有当 P 和 C 都充分小时模拟结果才趋于公式 $V = C + 1/2$ 。

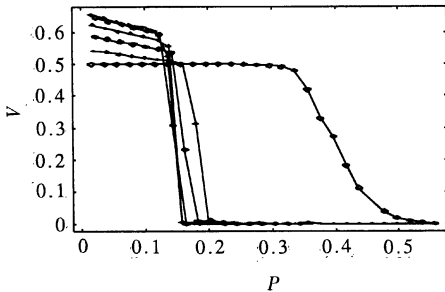


图 1 64×64 点阵上的模拟结果(圆点是模拟值。沿 V 轴正方向依次是 $C = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 的 $V-P$ 曲线,每个模拟值都取 20 个样本作平均, $C = 0$ 和 $C = 0.1$ 的 $V-P$ 曲线之间的差异表明交通灯的变化规律对交通系统的性能有重要影响)

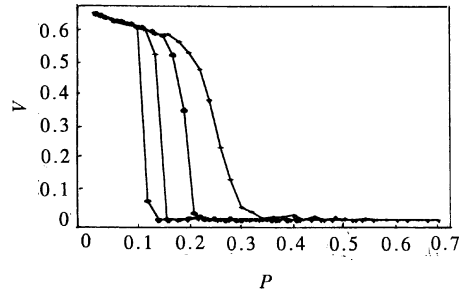


图 2 不同尺度点阵上的模拟结果(从沿 P 轴的正方向依次是 $N = 128, 64, 32, 16$ 的 $V-P$ 曲线,都取 $C = 0.5$ 。对于 16×16 和 32×32 的点阵,每个模拟值取 40 个样本作平均,对于 64×64 和 128×128 的点阵,每个模拟值取 20 个样本作平均)

在 $P-V$ 图上,平均速度急剧下降的点是系统从运动相进入阻塞相的相变点。从图上可以看出交通灯的随机化使阻塞相的出现大大地提前。对于 64×64 的点阵, BML 模型的相变密度约为 0.404, 随机化交通灯模型的相变密度约为 0.144。参照交通灯失灵的研究结果^[6], 本文的结果再次反映了交通灯这一因素对于城市交通性能的重要影响。BML 模型中,运动相与阻塞相之间的界限是非常清晰的^[1]。在本文的模型中,从平均速度大幅度下降的车辆密度(我们把它定义为随机化交通灯模型中的相变点)到 BML 模型的相变点之间实际上有过渡区域。在这个区域中,车辆的初始分布的交通灯的分布对系统的性质有明显的影响。在过了相变点后,绝大部分的终态都是阻塞相。对于 64×64 的点阵来说,约有十分之一的终态的平均速度是

一个很小的数。在更大的点阵上进行模拟,上述这些现象也没有衰减的趋势,表明这是系统固有的性质。我们认为,当解除了交通灯同步变化的限制后,在一定的条件下,可以在大面积阻塞的局面下,形成几条通道。例如 t 时刻 $S(i, j)$ 格点上没有车辆且为东西方向行驶的车辆亮绿灯, $S(i-1, j)$ 上有一南北方向行驶的车辆, $S(i, j-1)$ 和 $S(i, j+2)$ 上有东西向行驶的车辆且为南北向行驶的车辆亮绿灯。于是在这一局部地区,东西向行驶的车辆可以不断往前行驶,而第 j 条南北向的街道则长时间受阻。如果这种格局构成了长链,就只有少数几条街上的车辆还可通行。这就可以解释平均速度非常小的结果。

我们取 $C = 0.5$, 并且取 N 分别为 16, 32, 64, 128, 把平均速度与车辆密度之间的关系画在图 2 上。随着 N 的增大,相变点逐渐向左移动,相变时速度的下降也更加迅速。 $N = 16, 32, 64, 128$ 时的相变密度分别约为 0.209, 0.194, 0.144, 0.113。

我们在 64×64 的格点上考察了交通灯随机化程度(由 C 来表征)对系统性质的影响。我们取 $C = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 。每组数据都对 20 个样本取平均。结果画在图 1 上。在这个区间内,当 C 增大时相变点略微向左移动。由于 $C = 0$ (BML 模型)与 $C = 0.1$ 的曲线定性上差别很大,系统的性质对于 C 的依赖关系可能也存在着一种突变的形式。澄清这一问题需要作大量的模拟运算,我们把它留在以后的工作中讨论。另外,运动相的平均速度随 C 增大而增大,图上的曲线定性地符合我们所作的分析。

§ 4. 结 论

自从 BML 模型发表后,在元胞自动机模型的框架内使城市交通问题的研究向实用化的目标推进了一大步。许多作者都在致力于改进 BML 模型,把各种制约交通系统的因素扩充进元胞自动机交通模型中去。其后发表的一系列论文中已经把车辆抛锚、立交桥、收费站、道路等级差异、交通灯失灵、司机的加速滞后和起动的滞后、车辆的拐弯等多种因素容纳进各种改进的元胞自动机模型中去^[2-7]。这些研究实际上也表明了元胞自机模型在反映真实的交通系统方面具有非常大的潜力。

交通灯在现代城市的交通系统中起着显著的作用。在 BML 模型中交通灯也是个关键的因素。在 BML 模型中,所有的交通灯都在同一时刻为东西方向(或南北方向)行驶的车辆亮绿灯。然后每隔一个时刻所有的红绿灯都全部翻灯。BML 模型关于交通灯同步变化的严格约束与实际的情况相距太远。本文重新整理和扩充了 BML 模型的运行规则。在新的规则系统中,各个路口的交通相互独立,可以根据实际情况或理论研究的需要设置交通灯的起始状态和变化节奏,从而可以更逼近实际的交通系统和全方位地反映交通灯对交通系统性能的影响。前面描述了已得到的初步结果,我们的模型与模拟还在进一步精细化,有关结果将陆续发表。

参 考 文 献

- 1 O. Biham, A. A. Middleton and D. Levine, Self-organization and a dynamical transition in traffic flow models, *Phys. Rev.*, **A46**(10) (1992), R6124—R6127.
- 2 T. Nagatani, Jamming transition in the traffic flow model with two_level crossing, *Phys. Rev.*, **E48**(5) (1993), 3290—3294.
- 3 J. A. Cuesta, F. C. Martinez, J. M. Molerea and A. Sanchez, Phase transition in two-dimensional traffic model, *Phys. Rev.*, **E48**(6) (1993), R4175—R4178.
- 4 T. Nagatani, Effect of jam-avoiding turn on jamming transition in two-dimensional traffic model, *J.*

- Phys. Soc. Jpn., **63**(4) (1994), 1228—1231.
- 5 顾国庆、钟家雄、许伯铭, Two-dimensional traffic flow problems in inhomogeneous lattice, *Physica*, **A217**(1995), 339—347.
 - 6 钟家雄、许伯铭、顾国庆, Two-dimensional traffic flow problems with faulty traffic lights, *Phys. Rev.*, **E51**(1) (1995), 772—774.
 - 7 S. C. Benjamin, N. F. Johnson 和 许伯铭, Cellular automata models of traffic flow along a highway containing a junction, *J. Phys.*, **A29**(12) (1996), 3119—3127.
 - 8 顾国庆、范炳全、许伯铭, 交通系统的元胞自动机模型, *系统工程理论方法应用*, **14**(1) (1995), 12—17.

Two-Dimensional Cellular Automaton Traffic Model with Randomly Switching Traffic Lights

Gu Guoqing

(School of Systems Science and Systems Engineering, University of Shanghai
for Science and Technology, Shanghai 200093, P. R. China)

Hui Pakming

(Physics Department, The Chinese University of Hong Kong, Shatin,
New Territories, Hong Kong, P. R. China)

Wang Binghong

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China)

Dai Shiqiang

(Shanghai Institute of Applied Mathematic and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

Cellular automaton traffic models can include various factors in traffic systems and the corresponding computational simulations are rather simple and effective. The Biham-Middleton-Levine model (BML model) facilitates the simulation of two-dimensional traffic flow problems via the cellular automaton models. In this paper, the BML model is improved by removing its limitation of synchronized change of traffic lights. In the new model, the traffic light at each crossing could arbitrarily change its starting time and tempo of variation, and hence the model could more realistically describe the influence of traffic lights on the performance of traffic systems. Some new effects appearing in the new model are also elucidated.

Key words cellular automata, traffic model, traffic light, phase transition