

# Robertson\_Stiff 流体在偏心环空中的流动

汪海阁<sup>①</sup> 苏义脑<sup>①</sup>

(刘慈群推荐, 1997 年 4 月 28 日收到)

## 摘 要

石油钻井和完井过程中, 经常出现泥浆、水泥浆和完井液在偏心环空中的流动。Robertson\_Stiff 流体在描述这些流体的流变性时有很高的精度。文中根据 Robertson\_Stiff 流体的流变方程和偏心环空环隙间距的几何关系, 利用相似原理, 求解了该流体在偏心环形空间中作层流轴向流动时适于工程应用的二元速度分布, 以及平均流速、流量和压降的表达式。研究表明: 液体在偏心环形空间流动时与在同心环空中流动的最大差异, 在于流经偏心环空不同间隙处流速的较大差异。文中还把 Robertson\_Stiff 流体的计算结果与采用宾汉模式和幂律模式的计算结果进行了对比。

**关键词** 钻井 流体 环形空间 偏心 流场

**中图分类号** TE21

## § 1. 引 言

钻井和完井过程中, 钻具(或套管)在井眼中常常是不居中的, 而不居中的偏心环空将对泥浆和水泥浆的流动规律产生影响。由于粘性作用, 属于非牛顿液的钻井液、完井液和水泥浆在偏心环形空间中的轴向定常层流流动规律(如点速度分布、压降和流量等), 与在同心环空时有很大不同。

不少学者对偏心环空中的流动规律进行了研究。早在 1955 年, L. N. Tao 等人就认识到了这一问题的存在<sup>[1]</sup>。1959 年, J. F. Heyda 用格林函数法对偏心环空中牛顿流体的轴向流速场进行了研究<sup>[2]</sup>。1962 年, Redberger 等人又用上述方法求解了牛顿流体轴向稳定层流的无因次流量分布<sup>[3]</sup>。1965 年, Vaugh 等人将偏心环空处理成变高度的槽, 研究了幂律流体的轴向定常层流<sup>[4]</sup>。之后, Iyoho 和 Azar 改变了计算槽高的方法<sup>[5]</sup>。最近, Tosun 等人又把 Iyoho 的方法应用到牛顿流体和非牛顿流体的流量计算中去<sup>[6]</sup>。

在石油工程的有关计算中, 过去经常采用幂律模式(Power\_Law)的宾汉模式(Bingham)这两个模式, 但多年的理论与实践表明, 使用幂律模式易于过低估计环空水力参数, 而宾汉模式则易于过高估计环空水力参数, 因此, 迫切需要高精度流变模式的出现。

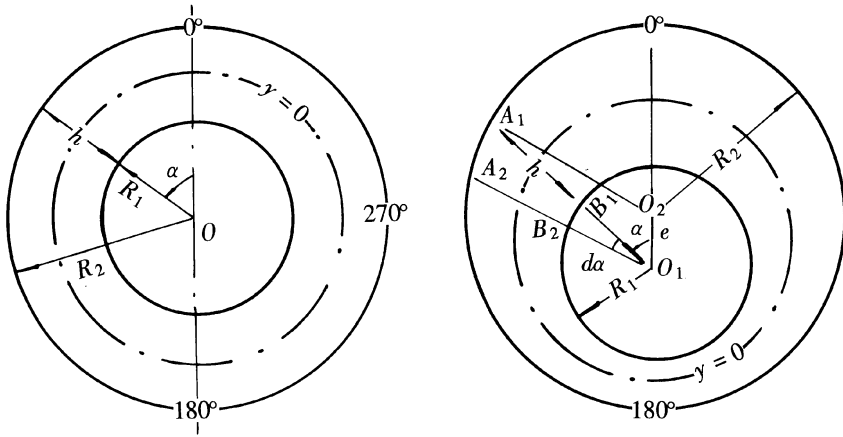
1976 年, Robertson\_Stiff 提出了一个新的描述钻井液和水泥浆流变特征的三参数流变模式, 即 Robertson\_Stiff 模式(简称 RS 模式)<sup>[7]</sup>。之后, Beirute\_Flumerfelt、Cloud\_Clark 等人利用不同性质的流体分别对该模式进行了试验<sup>[8~9]</sup>。国内汪海阁等人也对其在钻柱内和同心环

<sup>①</sup> 石油勘探开发科学研究院钻井所, 北京 100083

空中的流动规律进行了探讨<sup>[10]</sup>。上述研究结果表明,同其它流变模式相比,利用 RS 模式预测的剪切应力与粘度计测得的数据吻合很好。但对 RS 流体在偏心环空中的流动规律则很少进行研究,缺乏配套的水力参数计算公式。为此,文中以 RS 模式为基础,建立了偏心环空中 RS 流体点速度、流量及压降分布规律,并分析了偏心环空中的流动特征。

## § 2. Robertson-Stiff 流体在偏心环空中轴向流速解析解

图 1 为同心环空和偏心环空的理想断面形状。图中内管外径为  $R_1$ , 外管内径为  $R_2$ , 则内外管径比  $\sigma = R_1/R_2$ 。内管和外套轴线间距离  $O_1O_2$  定义为偏心距  $e$ , 则偏心度  $E = e/(R_2 - R_1)$ 。沿半径方向由内管外表面到外管内表面的距离定义为偏心环空中的间隙  $h$ 。显然对于同心环空,  $e = 0, h = R_2 - R_1$ 。



(a) 同心环空

(b) 偏心环空

图 1 偏心环空的理想断面形状

由图 1(b) 中三角形  $O_1A_1O_2$  的几何关系可得  $h$  的数学表达式为:

$$h = (R_2^2 - e^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} - R_1 + e \cos \alpha \quad (2.1)$$

一般情况下,  $e \ll 1$ ,  $e^2 \sin^2 \alpha$  可以忽略, 因此式(2.1)可简化为:

$$h = R_2 - R_1 + e \cos \alpha = (R_2 - R_1)(1 + E \cos \alpha) \quad (2.2)$$

为研究偏心环空内的流动规律, 首先考虑环形空间内任意一点液体单元的力学平衡, 结合屈服假塑性流体的本构方程, 求出力与流速之间的函数关系, 将这两方面结合起来, 即可推导出表达偏心环空内任意点处的流速方程式。

由微元内的力平衡可得:

$$\tau \frac{h}{2} = P_g \left[ \frac{h}{2} - y' \right] \quad (2.3)$$

式中,  $P_g$  为轴向压力梯度;  $y'$  为从内管表面到环空间隙内的坐标。

屈服假塑性流体的本构方程为:

$$\tau = A (\dot{\gamma} + C)^B \quad (2.4)$$

式中,  $A$  为 Robertson-Stiff 流体的稠度系数;  $B$  为流性指数;  $C$  为初始剪切速率。

由式(2.3)、(2.4)得:

$$V(\alpha, y) = \frac{B}{1+B} \left[ \frac{Pg}{A} \right]^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{h}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} \left[ 1 - \left( \frac{2y'}{h} - 1 \right)^{1+\frac{1}{B}} \right] \quad (2.5)$$

把  $y' = y + h/2$  代入式(2.5)得:

$$V(\alpha, y) = \frac{B}{1+B} \left[ \frac{Pg}{A} \right]^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{h}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} \left[ y^{1+\frac{1}{B}} - C \cdot \frac{h}{2} \right] \quad (2.6)$$

$$V_{\max}(\alpha, y = 0) = \frac{B}{1+B} \left[ \frac{Pg}{A} \right]^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{h}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} - C \cdot \frac{h}{2} \quad (2.7)$$

平均速度  $V_a(\alpha)$  为:

$$V_a(\alpha) = \frac{2 \int_0^{\frac{h}{2}} V(\alpha, y) dy}{h} = \frac{B}{1+2B} \left[ \frac{Pg}{A} \right]^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{h}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} - \frac{3}{4} Ch \quad \text{学平} \quad (2.8)$$

对于同心环空,  $e = 0, h = R_2 - R_1$ , 其平均速度可表示为

$$V_a^c(E = 0) = \frac{B}{1+2B} \left[ \frac{Pg}{A} \right]^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{R_2 - R_1}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} - \frac{3}{4} C(R_2 - R_1) \quad (2.9)$$

对于偏心环空, 宽间隙内的平均速度和窄间隙内的平均速度可分别表示为:

$$V_a^e(E \neq 0, \alpha = 0^\circ) = \frac{B}{1+2B} \left[ \frac{Pg}{A} \right]^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{R_2 - R_1 + e}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} - \frac{3}{4} C(R_2 - R_1 + e) \quad (2.10a)$$

$$V_a^e(E \neq 0, \alpha = 180^\circ) = \frac{B}{1+2B} \left[ \frac{Pg}{A} \right]^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{R_2 - R_1 - e}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} - \frac{3}{4} C(R_2 - R_1 - e) \quad (2.10b)$$

### § 3. Robertson\_Stiff 流体在偏心环空中流动的基本特征

#### 1. 偏心环空中宽间隙内的平均流速与窄间隙内的平均流速之比

对于同心环空, 由于沿环空周向各处径向间隙相等, 所以不同  $\alpha$  角度处的平均流速相同。而对于偏心环空, 由于不同  $\alpha$  角度处的径向间隙不同, 所以各处的平均流速也不同。间隙  $h$  越大, 则平均流速也越大; 间隙  $h$  越小, 则平均流速也越小。定义偏心环空中最大间隙处的平均流速与最小间隙处的平均流速之比为  $\varphi_1$ , 即  $\varphi_1$  可以表示为:

$$\varphi_1 = \frac{V_a^e(E \neq 0, \alpha = 0^\circ)}{V_a^e(E \neq 0, \alpha = 180^\circ)} \quad (3.1)$$

由上述推导可得:

$$\varphi_1 = \frac{\frac{B}{2+4B} \left[ \frac{Pg}{2A} \right]^{\frac{1}{B}} R_2^{1+1/B} (1-\sigma)^{1+1/B} (1+E)^{1+1/B} - \frac{3}{4} CR_2(1-\sigma)(1+E)}{\frac{B}{2+4B} \left[ \frac{Pg}{2A} \right]^{\frac{1}{B}} R_2^{1+1/B} (1-\sigma)^{1+1/B} (1-E)^{1+1/B} - \frac{3}{4} CR_2(1-\sigma)(1-E)}$$

$$\text{令 } F_1 = \frac{B}{2+4B} \left[ \frac{Pg}{2A} \right]^{\frac{1}{B}} R_2^{1+1/B} \quad (3.2)$$

$$F_2 = \frac{3}{4} CR_2 \quad (3.3)$$

则  $\varphi_1$  最终可以表示为:

$$\varphi_1 = \frac{F_1(1-\sigma)^{1/B}(1+E)^{1/B} - F_2 \frac{1+E}{1-E}}{F_1(1-\sigma)^{1/B}(1-E)^{1/B} - F_2 \frac{1-E}{1+E}} \quad (3.4)$$

显然,  $\varphi_1$  为偏心率、管径比和泥浆流变性(流性指数  $B$ 、稠度系数  $A$  和初始剪切速率  $C$ ) 的函数。

对于幂律流体,  $n = B, K = A, C = 0$ , 代入式(3.4) 可得:

$$\varphi_1 = \left[ \frac{1+E}{1-E} \right]^{1+\frac{1}{n}} \quad (3.4a)$$

对于宾汉流体,  $A = P_V, B = 1, C = Y_P/P_V$ , 代入上式得:

$$\varphi_1 = \frac{PgR_2(1-\sigma)(1+E) - 9Y_P \frac{1+E}{1-E}}{PgR_2(1-\sigma)(1-E) - 9Y_P \frac{1-E}{1+E}} \quad (3.4b)$$

表 1 偏心度和管径比对  $\varphi_1$  的影响

| $\frac{E}{D}$ | 0.40  | 0.45  | 0.50  | 0.55  | 0.60  | 0.65  | 0.70   | 0.75   | 0.80   |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 0.0           | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0    | 1.0    | 1.0    |
| 0.2           | 2.547 | 2.560 | 2.576 | 2.597 | 2.626 | 2.666 | 2.723  | 2.822  | 3.010  |
| 0.4           | 7.142 | 7.231 | 7.345 | 7.494 | 7.699 | 7.995 | 8.460  | 9.286  | 11.14  |
| 0.6           | 26.32 | 27.08 | 28.09 | 29.48 | 31.51 | 34.74 | 40.64  | 54.75  | 131.5  |
| 0.8           | 259.1 | 294.9 | 355.5 | 479.9 | 679.7 | 821.4 | 1092.6 | 1351.4 | 1724.1 |

式(3.4a)表明, 幂律流体的  $\varphi_1$  值仅与偏心率  $E$  和流性指数  $n$  有关, 而与内、外管径及偏心值的绝对尺寸无关。显然, 由式(3.4a)可知, 偏心率恒定不变时, 流性指数越小, 则  $\varphi_1$  值越大。当  $n = 1$  时,  $\varphi_1$  最小。即同样条件下, 偏心空环中牛顿流体( $n = 1$ ) 宽、窄间隙速度比  $\varphi_1$  比幂律流体的  $\varphi_1$  值小。或者说, 牛顿流体宽、窄间隙的速度差别最小。

表 1 为 RS 流体在偏心环空最大间隙处的平均流速与最小间隙处的平均流速之比  $\varphi_1$  随偏心度和管径比的变化规律。从表中可以看出: 随偏心率增加,  $\varphi_1$  增加; 随管径比增大,  $\varphi_1$  增大。

### 2 偏心环空平均流速与同心环空中平均流速之比

为研究屈服假塑性流体在偏心环空和同心环空中流动时平均流速的差别程度, 定义  $\varphi_2$  为:

$$\varphi_2 = \frac{V_a^c(E \neq 0, \alpha = 0)}{V_a^c(E = 0)} \quad (3.5)$$

则由上述推导可得:

$$\varphi_2 = \frac{F_1(1-\sigma)^{1/B}(1+E)^{1/B} - F_2}{F_1(1-\sigma)^{1/B} - F_2}(1+E) \quad (3.6)$$

对于幂律流体, 则有:

$$\varphi_2 = (1+E)^{1+1/n} \quad (3.6a)$$

而对于宾汉流体, 则有:

$$\varphi_2 = \frac{PgR_2(1-\sigma)(1+E) - 9Y_P}{PgR_2(1-\sigma) - 9Y_P}(1+E) \quad (3.6b)$$

同样, 定义  $\varphi_3$  为:

$$\varphi_3 = \frac{V_a^c(E \neq 0, \alpha = 180^\circ)}{V_a^c(E = 0)} \quad (3.7)$$

则由上述推导可得:

$$\varphi_3 = \frac{F_1(1-\sigma)^{1/B}(1-E)^{1/B} - F_2}{F_1(1-\sigma)^{1/B} - F_2}(1-E) \quad (3.8)$$

对于幂律流体, 则有:

$$\varphi_3 = (1-E)^{1+1/n} \quad (3.8a)$$

而对于宾汉流体, 则有:

$$\varphi_3 = \frac{PgR\lambda(1-\sigma)(1-E) - 9Y_P}{PgR\lambda(1-\sigma) - 9Y_P}(1-E) \quad (3.8b)$$

由式(3.6a)和式(3.8a)知, 幂律流体偏心环空平均流速与同心环空平均流速的偏差程度也只与偏心度和流性指数有关。当偏心度不变时, 随流性指数增加,  $\varphi_2$  和  $\varphi_3$  减小。显然, 如果流性指数很小, 用同心环空流动方程式去处理偏心环空的流动问题, 将会出现较大偏差。

表2为RS流体在偏心环空最大间隙处的平均流速与同心环空中的平均流速之比  $\varphi_2$  随偏心度  $E$  和管径比  $\sigma$  的变化规律。表中结果表明: 随偏心度增加,  $\varphi_2$  增加; 随管径比增加,  $\varphi_2$  增加。

表2 偏心度和管径比对  $\varphi_2$  的影响

| $E \backslash \sigma$ | 0.40  | 0.45  | 0.50  | 0.55  | 0.60  | 0.65  | 0.70  | 0.75  | 0.80  |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0                   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   |
| 0.2                   | 1.518 | 1.521 | 1.525 | 1.530 | 1.536 | 1.544 | 1.557 | 1.577 | 1.613 |
| 0.4                   | 2.156 | 2.163 | 2.171 | 2.183 | 2.197 | 2.218 | 2.247 | 2.294 | 2.379 |
| 0.6                   | 2.916 | 2.928 | 2.943 | 2.962 | 2.988 | 3.024 | 3.075 | 3.157 | 3.305 |
| 0.8                   | 3.801 | 3.820 | 3.843 | 3.873 | 3.912 | 3.966 | 4.044 | 4.169 | 4.394 |

表3为RS流体在偏心环空最小间隙处的平均流速与同心环空中的平均流速之比  $\varphi_3$  随偏心度  $E$  和管径比  $\sigma$  的变化规律。从表中可以看出, 同  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  变化规律不同之处在于: 随偏心度增加,  $\varphi_3$  减小; 随管径比增加,  $\varphi_3$  也减小。

表3 偏心度和管径比对  $\varphi_3$  的影响

| $E \backslash \sigma$ | 0.40  | 0.45  | 0.50  | 0.55  | 0.60  | 0.65  | 0.70   | 0.75   | 0.80   |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 0.0                   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0    | 1.0    | 1.0    |
| 0.2                   | 0.596 | 0.594 | 0.592 | 0.589 | 0.585 | 0.579 | 0.571  | 0.559  | 0.536  |
| 0.4                   | 0.302 | 0.299 | 0.296 | 0.291 | 0.285 | 0.277 | 0.266  | 0.247  | 0.213  |
| 0.6                   | 0.111 | 0.108 | 0.105 | 0.100 | 0.095 | 0.087 | 0.076  | 0.058  | 0.025  |
| 0.8                   | 0.147 | 0.129 | 0.108 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.0006 | 0.0003 | 0.0001 |

表4为分别采用三种不同的流变模式(幂律模式、宾汉模式和屈服假塑性模式)计算的偏心环空最大间隙处的平均流速与同心环空中的平均流速之比  $\varphi_2$  随偏心度  $E$  和管径比  $\sigma$  的变化规律。表中泥浆为水基泥浆。该泥浆在旋转粘度计六个转速下的读数分别为:  $\varphi_3 = 7$ ,  $\varphi_6$

= 10,  $\phi_{100} = 48, \phi_{200} = 78, \phi_{300} = 103, \phi_{600} = 169$ 。计算所得幂律流体的流变参数分别为: 流性指数  $n = 0.7144$ , 稠度系数  $K = 0.573 \text{Pa}\cdot\text{s}^n$ ; 宾汉流体的流变参数分别为: 塑性粘度  $P_V = 66 \text{mPa}\cdot\text{s}$ , 屈服值  $Y_P = 17.72 \text{Pa}$ ; 屈服假塑性流体的流变参数分别为: 流性指数  $B = 0.8322$ , 稠度系数  $A = 0.2397 \text{Pa}\cdot\text{s}^B$ , 初始剪切速率  $C = 70.40 \text{1/s}$ 。计算结果表明: 偏心度对三种流体的影响规律相同, 即随偏心度增加,  $\phi_2$  增加。管径比对宾汉流体和RS流体的影响规律相同, 即随管径比增加,  $\phi_2$  增加。但幂律流体的  $\phi_2$  值不随管径比  $\sigma$  发生变化。

表 4 三种不同流变模式计算结果对比

| $\alpha$ | 0.40  |       |       | 0.50  |       |       | 0.60  |       |       | 0.70  |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|          | PL    | BP    | RS    | PL    | BP    | RS    | PL    | BP    | RS    | PL    | BP    | RS    |
| 0.0      | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0   |
| 0.2      | 1.549 | 1.547 | 1.518 | 1.549 | 1.581 | 1.525 | 1.549 | 1.647 | 1.536 | 1.549 | 1.828 | 1.557 |
| 0.4      | 2.242 | 2.210 | 2.156 | 2.242 | 2.290 | 2.171 | 2.242 | 2.444 | 2.197 | 2.242 | 2.866 | 2.247 |
| 0.6      | 3.089 | 2.989 | 2.916 | 3.089 | 3.126 | 2.943 | 3.089 | 3.390 | 2.988 | 3.089 | 4.114 | 3.075 |
| 0.8      | 4.098 | 3.884 | 3.801 | 4.098 | 4.089 | 3.843 | 4.098 | 4.485 | 3.912 | 4.098 | 5.571 | 4.044 |

### 3 偏心环隙无因次轴向速度随周向位置变化规律

定义  $\phi_4$  为:

$$\phi_4 = \frac{V_{\max}(y=0, \alpha)}{V_a(\alpha)} \tag{3.9}$$

则由上述推导得:

$$\phi_4 = \frac{\frac{B}{1+B} \left( \frac{Pg \cdot h}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{1}{2}^{1+\frac{1}{B}} - \frac{C}{2} \right]}{\frac{B}{1+2B} \left( \frac{Pg \cdot h}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{1}{2}^{1+\frac{1}{B}} - \frac{3C}{4} \right]} \tag{3.10}$$

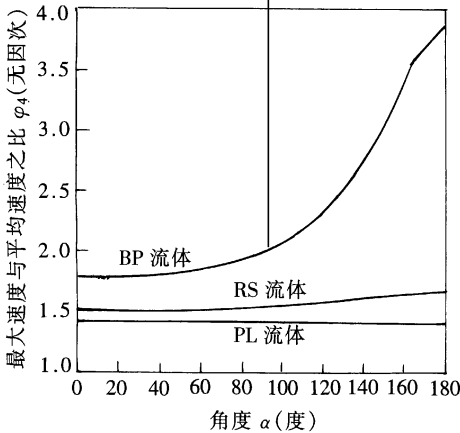


图 2 偏心环空不同径向间隙处无因次轴向速度的分布 ( $E = 0.5$ )

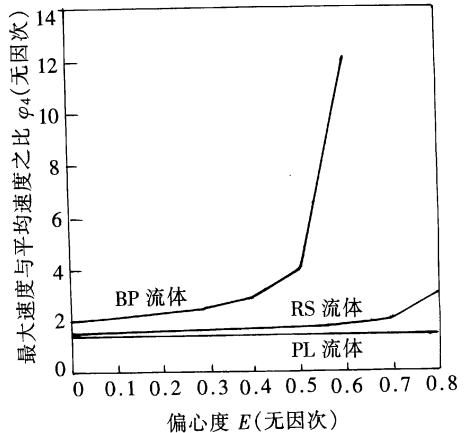


图 3 偏心度对偏心环空不同径向间隙处无因次轴向速度的影响 ( $\sigma = 0.5$ )

对于幂律流体, 有:

$$\varphi_4 = \frac{1+2n}{1+n} \quad (3.10a)$$

而对于宾汉流体, 则有:

$$\varphi_4 = \frac{3Pg \cdot h - 12Y_P}{2Pg \cdot h - 18Y_P} \quad (3.10b)$$

图2为偏心环空不同径向间隙处无因次轴向速度分布规律曲线。图中表明, 随 $\alpha$ 角增加, 即随着环空间隙由宽变窄, 除幂律流体外, 宾汉流体和屈服假塑性流体的无因次轴向速度都增加, 且宾汉流体的增幅远大于RS流体的增幅, 幂律流体的 $\varphi_4$ 值不随 $\alpha$ 角变化。

图3为偏心环空不同径向间隙处偏心度对无因次轴向速度的影响规律曲线。从图中可以看出, 随偏心度增加, 宾汉流体和屈服假塑性流体的 $\varphi_4$ 值都增大, 而幂律流体的 $\varphi_4$ 值不受偏心度影响。同样条件下, 宾汉流体的 $\varphi_4$ 值远大于屈服假塑性流体和幂律流体的 $\varphi_4$ 值。

#### § 4. Robertson\_Stiff 流体在偏心环空中流动的流量和压降

为求解屈服假塑性流体在偏心环空中流动时的流量, 可仿照同心环空中幂律流体的流量与平均流速的关系, 根据相似原理而求得。取图1(b)中位置 $\alpha$ 处的间隙为准, 取微小增量 $d\alpha$ , 则 $d\alpha$ 所对应的弧长 $s$ 可以表示为:

$$s = A_1 A_2 + B_1 B_2 = (R_2 + A_1 B_1) d\alpha = \left[ R_2 + R_1 + e \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \right] d\alpha \quad (4.1)$$

这样通过微元 $A_1 A_2 B_1 B_2$ 内的微小流量 $dQ$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} dQ &= A \cdot V = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h \cdot V_a(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left[ R_2 + R_1 + e \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \right] d\alpha \cdot h \cdot V_a(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left[ R_2 + R_1 + e \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \right] d\alpha \left[ \frac{B}{1+2B} \left( \frac{Pg}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{h}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} - \frac{3}{4} Ch \right] \\ &= dQ_1 + dQ_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$dQ_1 = \frac{1}{2} h \left[ R_2 + R_1 + e \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \right] d\alpha \left[ \frac{B}{1+2B} \left( \frac{Pg}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[ \frac{h}{2} \right]^{1+\frac{1}{B}} \right] \quad (4.2a)$$

$$dQ_2 = -\frac{3}{8} h^2 \left[ R_2 + R_1 + e \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \right] d\alpha \quad (4.2b)$$

$$\text{令 } A_1 \text{ 次轴 } \frac{B}{1+2B} \left( \frac{Pg}{2A} \right)^{\frac{1}{B}} \cdot \frac{1}{4}$$

积分 $dQ_1$ 得:

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1 \left\{ (R_2 + R_1) \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \left[ \frac{1+2B}{B} \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} - 1 \right] e \left[ \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{e}{R_1} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) \right] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{2B + (1/R_1)}{B(R_2 - R_1)} e^2 \left[ \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \frac{e}{R_1} \sin^3 \alpha \right] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \frac{e^2}{R_1^2} \left[ \frac{3}{2} \alpha - \sin 2\alpha + \frac{\sin 4\alpha}{8} \right] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right\} \quad \text{中的} \end{aligned} \quad (4.3)$$

令 $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2\pi$ 可得:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{Pg}{2A} \frac{1}{B} \frac{B}{1+2B} (R_2 - R_1)^{1+B} (R_2^2 - R_1^2) \pi \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{1+B}{B} \frac{e^2}{R_1(R_2 + R_1)} \right] \right] \quad (4.4)$$

令  $A_2 = -\frac{3}{8} C (R_2 - R_1)^2$

这样  $dQ_2$  可以表示为:

$$dQ_2 = A_2 \left[ R_2 + R_1 + e \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \right] d\alpha + 2A_2 e \left[ (R_2 + R_1) \cos \alpha + e \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \right] d\alpha + 2A_2 e^2 \left[ (R_2 + R_1) \cos^2 \alpha + e \cos^3 \alpha - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right] d\alpha \quad (4.5)$$

对上式积分得:

$$Q_2 = A_2^2 (R_2 + R_1) \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + A_2 e \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + 2A_2 e (R_2 + R_1) \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + 2A_2 e^2 \cdot \left[ \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + A_2 e^2 (R_2 + R_1) \left[ \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + A_2 e^3 \left[ \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{3} + \frac{2}{3} \sin \alpha \right] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (4.6)$$

令  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2\pi$  可得:

$$Q_2 = 2\pi A_2^2 (R_2 + R_1) + 2\pi A_2 e^2 + \pi A_2 e^2 (R_2 + R_1) = -\frac{3\pi}{8} C (R_2 - R_1)^2 [(R_2 + R_1 + 2)(e^2 + 1) - 4] \quad (4.7)$$

因此可得偏心环空中的总流量  $Q$  为:

$$Q = \frac{1}{2} \left[ \frac{Pg}{2A} \frac{1}{B} \frac{B}{1+2B} (R_2 - R_1)^{1+B} (R_2^2 - R_1^2) \pi \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{1+B}{B} \frac{e^2}{R_1(R_2 + R_1)} \right] \right] - \frac{3\pi}{8} C (R_2 - R_1) [2(R_1 + R_2) + 2e^2 + e^2(R_1 + R_2)] \quad (4.8)$$

由上式可得, 同心环空中的流量  $Q_c$  为:

$$Q_c = \frac{1}{2} \left[ \frac{Pg}{2A} \frac{B}{1+2B} (R_2 - R_1)^{1+B} (R_2^2 - R_1^2) \pi - \frac{3\pi}{4} C (R_2^2 - R_1^2) \right] \quad (4.8a)$$

对于幂律流体, 则有:

$$Q_{c,PL} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Pg}{2K} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{n}{1+2n} (R_2 - R_1)^{1+1/n} (R_2^2 - R_1^2) \pi \quad (4.8b)$$

对于宾汉流体, 同样可以求出其流量为:

$$Q_{c,BP} = \frac{1}{12} \frac{Pg}{P_V} (R_2 - R_1)^2 (R_2^2 - R_1^2) \pi - \frac{3\pi}{4} \frac{Y_P}{P_V} (R_2^2 - R_1^2) \quad (4.8c)$$

由式(4.8)可得偏心环空中的平均流速为:

$$U = \frac{Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Pg}{2A} \frac{1}{B} \frac{B}{1+2B} (R_2 - R_1)^{1+B} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{1+B}{B} \frac{e^2}{R_1(R_2 + R_1)} \right] - \frac{3C}{8} \left[ 2 + \frac{2e^2}{R_1 + R_2} + e^2 \right] \right] \quad (4.9)$$

由式(4.9)可得偏心环空中的压降为:



$$P_g = \frac{2A}{4R_2 - R_1} \left\{ \frac{2U + \frac{3}{4}C \left[ \gamma + \frac{2e^2}{R_1 + R_2} + e^2 \right]}{\frac{B}{1 + 2B} (R_2 - R_1) \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{1 + B}{B} \frac{e^2}{R_1 (R_1 + R_2)} \right]} \right\}^B \quad (4.10)$$

## § 5. 结 论

2

1. 建立了屈服假塑性流体在偏心环空中流动时的流速、流量和压降的解析表达式。

2. 分析了偏心环空中屈服假塑性流体的流动特征。结果表明：偏心环空中最大间隙处的平均流速与最小间隙处的平均流速之比  $\varphi_1$  随偏心度的增加而增加，随管径比的增大而增大；偏心环空中最大间隙处的平均流速与同心环空中的平均流速之比  $\varphi_2$  随偏心度增加而增加，随管径比的增加而增加；偏心环空中最小间隙处的平均流速与同心环空中的平均流速之比  $\varphi_3$  随偏心度的增加而减小，随管径比的增大而减小。

## 参 考 文 献

1. L. N. Tao and W. F. Donovan, Through flow in concentric and eccentric annuli of fine clearance with and without relative motion of the boundaries, *Trans. ASME*, **77**(4) (1955), 1291—1301.
2. J. F. Heyda, A Green's function solution for the case of non-concentric circular cylinders, *J. Franklin Inst.*, **267**(1) (1959), 25—34.
3. P. J. Redberger and M. E. Charles, Axial laminar flow in a circular pipe, containing a fixed eccentric core, *Cdn. J. Chem. Eng.*, **40**(4) (1962), 148—151.
4. R. D. Vaughn, Axial laminar flow of non-Newtonian fluids in narrow eccentric annuli, *SPE J.* **5**(4) (1965), 277—280.
5. A. W. Iyoho and J. J. Azar, An accurate slot model for non-Newtonian fluid flow through eccentric annuli, *SPE J.*, **21**(5) (1981), 565—572.
6. I. Tosun, Axial laminar in an eccentric annulus: an approximate solution, *AIChE J.*, **30**(9) (1984), 877—878.
7. R. E. Robertson and H. A. Stiff, An improved rheological model for relating shear stress to shear rate in drilling fluids and cement slurries, *Trans. AIME*, **261** (1976), 31.
8. R. M. Beirute and R. W. Flumerfelt, An evaluation of the Robertson-Stiff model describing rheological properties of drilling fluids and cement slurries, *Soc. Pet. Eng. J.*, **17**(2) (1977), 97.
9. J. E. Cloud and P. E. Clark, Stimulation fluid rheology: alternatives to the power-law fluid model for crosslinked gels, *SPE 11615* (1980).
10. 汪海阁、刘希圣, 屈服假塑性流体在同心环空中稳态波动压力研究, *应用数学和力学*, **17**(1) (1996), 15—22.

## Flow of Robertson\_Stiff Fluids Through an Eccentric Annulus

Wang Haige    Su Yiniao

(Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Beijing 100083, P. R. China)

### Abstract

Flow of drilling fluids, cement slurries and completion fluids through an eccentric annulus is an everyday event in petroleum drilling and completing engineering. While Robertson\_Stiff (RS) rheological model on the basis of its proven success for describing various non\_Newtonian fluids is more accurate than over other rheological models. In this paper, based on the RS fluid rheological equation and the geometrical relationship of eccentric annular clearance with other parameters, the axial\_flow velocity distribution, the annular average velocity, the volumetric flow rate and the frictional pressure drop are worked out as RS fluid flowing through an eccentric annulus where purely laminar flow is assumed. Results show that the main difference between concentric annular flow and eccentric annular flow lies in that the velocity profile is substantially altered in the annulus when the inner pipe is no longer concentric and the velocity in the reduced region of eccentric annulus is much smaller than that of the increased region. Moreover, the paper also compares the computed results by the use of RS model with that of Bingham model and Power\_Law model.

**Key words** drilling, fluid, annular space, eccentric, flow field