

# 球形涂层粒子增强复合材料的有效模量<sup>\*</sup>

卢子兴<sup>①</sup>

(蒋咏秋推荐, 1996 年 5 月 17 日收到, 1997 年 11 月 8 日收到修改稿)

## 摘 要

本文通过四相球模型和复合材料的等效介质理论, 研究了球形涂层粒子增强复合材料的有效模量性质, 得到了这种增强复合材料的有效体积模量和有效剪切模量的理论预测公式. 这些结果在特殊情况下, 可退化到三相球模型确定的球形粒子增强复合材料的有效模量公式.

**关键词** 球形涂层粒子 复合材料 有效模量

**中图分类号** O341, TQ328

## § 1. 引 言

球形粒子增强复合材料是一种重要的工程材料, 在航空、航天等领域得到广泛的应用. 关于这种材料的有效模量问题, 人们早已提出各种模型和方法进行讨论, 现已得到与实验结果符合较好的理论预测公式<sup>[1]</sup>. 然而, 由于工程应用对复合材料的要求日益提高, 使得近年来在增强体表面涂层的应用正在增加. 研究表明: 涂层主要作为反应阻挡层以减少增强体和基体之间的扩散及化学反应, 也作为增强体的抗氧化层, 它能显著地改善材料的强度<sup>[2]</sup>. 可是, 涂层的引入增加了力学分析的难度, 目前还未见文献给出这种新型复合材料有效模量的合理预测结果. 本文借助前人研究球形粒子增强复合材料有效模量的三相球模型<sup>[1]</sup>的基本思想和四相球模型<sup>[3]</sup>研究含空心球复合材料(或复合泡沫塑料)有效模量的经验, 提出用四相球模型确定含球形涂层粒子增强复合材料有效模量的方法, 最后得到了有限形式的有效体积模量和剪切模量的理论公式. 依据这些公式可确定这类材料的有效杨氏模量等材料参数. 本文提供的算例初步证明了所得结果的合理性.

## § 2. 用四相球模型确定球形涂层粒子增强复合材料的有效模量

### 2.1 有效体积模量的确定

复合材料四相球模型如图 1 所示, 其中区域  $\Omega_1$  为增强材料相, 区域  $\Omega_2$  为涂层材料相, 区域  $\Omega_3$  为基体材料相, 而区域  $\Omega_4$  为等效均匀介质相. 类似于对含空心球复合材料的讨论, 当远场受静水应力或均匀应变作用时, 根据模型的几何对称性(假设每一相是均匀和各向同性

\* 国家自然科学基金资助项目(19672005)

① 北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083

的), 可以得到满足平衡方程的位移场为

$$u_r^i = A_i r + \frac{B_i}{r^2} \tag{2.1}$$

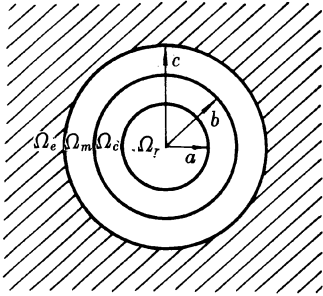


图 1 四相球模型

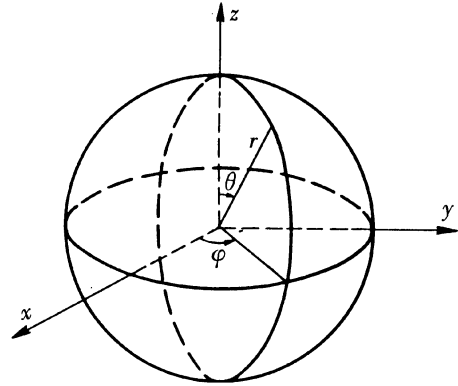


图 2 球坐标系

这里  $A_i$  和  $B_i$  为待定常数, 当  $i$  取 1, 2, 3, 4 时分别对应增强球材料相、涂层材料相、基体材料相和等效均匀介质相。相应的应力场可以表示为

$$\sigma_{rr}^i = 3K_i A_i - \frac{4\mu_i B_i}{r^3} \tag{2.2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i = \sigma_{\phi\phi}^i = 3K_i A_i + \frac{2\mu_i B_i}{r^3} \tag{2.3}$$

$$\sigma_{r\theta}^i = \sigma_{r\phi}^i = \sigma_{\theta\phi}^i = 0 \tag{2.4}$$

在上面诸式中位移和应力分量均为球坐标系中的分量, 所取球坐标系如图 2 所示。若假设不同材料相在界面处是完整粘接的, 则在界面处 ( $r = a, r = b$  和  $r = c$  时) 应满足位移和应力的连续性条件, 这些条件可用如下矩阵形式的方程组表示

$$T_i^K(r_i) V_i = T_{i+1}^K(r_i) V_{i+1} \tag{2.5}$$

其中

$$T_i^K(r) \text{ 卷第 } \begin{bmatrix} r & \frac{1}{r^2} \\ 3K_i & -\frac{4\mu_i}{r^3} \end{bmatrix}, \quad V_i = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix}$$

上式对  $i = 1, 2, 3$  均成立, 故包括 6 个方程。然而, 方程涉及 8 个待定常数, 为求解需借助增强球球心处的位移为零的条件和无穷远处的均匀应力或均匀应变条件。由增强球球心处 ( $r = 0$ ) 的条件给出  $B_2 = 0$ , 而无穷远的均匀应力和应变条件给出  $B_4 = 0$ , 由此便可以确定(略去详细的推导过程) 等效介质的有效体积模量  $K$  如下

$$K = K_3 + \left\{ (3K_3 + 4\mu_3) \left[ (3K_1 + 4\mu_2)(K_3 - K_2) \frac{b^3}{c^3} + (K_2 - K_1)(3K_3 + 4\mu_2) \frac{a^3}{c^3} \right] \right\} \left\{ (3K_2 + 4\mu_3)(3K_1 + 4\mu_2) + 12(K_2 - K_1)(\mu_3 - \mu_2) \frac{a^3}{b^3} + 3(K_3 - K_2)(3K_1 + 4\mu_2) \frac{b^3}{c^3} + 3(K_2 - K_1)(3K_3 + 4\mu_2) \frac{a^3}{c^3} \right\} \tag{2.6}$$

显然,当  $b = c, K_2 = K_3, \mu_2 = \mu_3$  时,上式退化为

$$K = K_2 - \frac{(3K_2 + 4\mu_2)(K_2 - K_1)a^3/b^3}{(3K_1 + 4\mu_2) + 3(K_2 - K_1)a^3/b^3} \quad (2.7)$$

它与三相球模型确定的球形粒子增强复合材料的有效体积模量相同。因此,四相球模型确定的球形涂层粒子增强复合材料的有效体积模量公式更具有—般性。

## 2.2 有效剪切模量的确定

由四相球模型来确定球形涂层粒子复合材料的有效剪切模量可类似地进行,只是远场受均匀剪切应变(或剪切应力)而导致的位移场和应力场中包含更多的待定常数,因而求解也变得更为复杂和困难。参照文献[1, 4]给出的远场受纯剪切变形时各相材料中的位移场和应力场及在各相材料界面处满足的连续性条件,可得到如下用矩阵形式表示的方程组

$$T_i^\mu(r_i) V_i = T_{i+1}^\mu(r_i) V_{i+1} \quad (2.8)$$

其中

$$T_i^\mu(r) = \begin{bmatrix} r & -\frac{6\nu_i r^3}{1-2\nu_i} & \frac{3}{r^4} & \frac{5-4\nu_i}{(1-2\nu_i)r^2} \\ r & -\frac{(7-4\nu_i)r^3}{1-2\nu_i} & -\frac{2}{r^4} & \frac{2}{r^2} \\ \mu_i & \frac{3\nu_i \mu_i r^2}{1-2\nu_i} & 2 & \frac{2(\nu_i-5)\mu_i}{(1-2\nu_i)r^3} \\ \mu_i & -\frac{(7+2\nu_i)\mu_i r^2}{1-2\nu_i} & \frac{8\mu_i}{r^5} & \frac{2(1+\nu_i)\mu_i}{(1-2\nu_i)r^3} \end{bmatrix}, V_i = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix}$$

上式对  $i = 1, 2, 3$  成立,故应包括 12 个方程。显然,要求出  $V_{i+1}$  需要求出  $T_{i+1}^\mu$ (参见附录 1), 由此得

$$V_{i+1} = T_{i+1}^{\mu-1} T_i^\mu V_i = T_i^{\mu+1} V_i \quad (2.9)$$

其中  $T_i^{\mu+1} = T_{i+1}^{\mu-1}(r_i) T_i^\mu(r_i)$  的各分量由附录 2 给出。上面方程组涉及 16 个待定常数,欲求解需考虑球形增强体中心( $r = 0$ )处的位移及应力有限的条件,由此给出  $C_1 = 0, D_1 = 0$ 。此外,参照文献[1, 4]的讨论,有效介质在无穷远处应力(或应变)有限的条件给出  $B_4 = 0$ , 而由 Eshelby 能量等效条件给出  $D_4 = 0$ 。这两个条件等价于下面的方程组

$$\frac{4(7-10\nu_3) + (7+5\nu_3)\mu_3/\mu}{7(1-2\nu_3)} [T_{21}A_1 + T_{22}B_1] - \frac{20(\mu_3/\mu-1)}{7c^7} [T_{31}A_1 + T_{32}B_1] - \frac{12(\mu_3/\mu-1)}{7(1-2\nu_3)c^5} [T_{41}A_1 + T_{42}B_1] = 0 \quad (2.10)$$

$$-5c^3(1-2\nu_3) \left[ \frac{\mu_3}{\mu} - 1 \right] [T_{11}A_1 + T_{12}B_1] + 21c^5 \left[ \frac{\mu_3}{\mu} - 1 \right] [T_{21}A_1 + T_{22}B_1] + \left[ 4(4-5\nu_3) + 2(7-5\nu_3) \frac{\mu_3}{\mu} \right] [T_{41}A_1 + T_{42}B_1] = 0 \quad (2.11)$$

其中  $T_{ij}$  为矩阵  $T_1^\mu = T_2^\mu T_1^\mu$  (可由附录 2 计算得到) 的分量。显然,上述方程组为  $A_1, B_1$  的线性齐次方程组。类似文献[3]的讨论,令

$$\phi_1 = \frac{4(7-10\nu_m) + (7+5\nu_m)\mu_m/\mu}{7(1-2\nu_m)}, \phi_2 = -\frac{20(\mu_m/\mu-1)}{7c^7}, \phi_3 = -\frac{12(\mu_m/\mu-1)}{7(1-2\nu_m)c^5}$$

$$\varphi_1 = -5c^3(1-2\nu_m) \left[ \frac{\mu_m}{\mu} - 1 \right], \quad \varphi_2 = 21c^5 \left[ \frac{\mu_m}{\mu} - 1 \right], \quad \varphi_3 = 4(4-5\nu_m) + 2(7-5\nu_m) \frac{\mu_m}{\mu}$$

则方程组(2.10)~(2.11)式变为

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \varphi_3 x_3) A_1 + (\varphi_1 k_1 + \varphi_2 k_2 + \varphi_3 k_3) B_1 &= 0 \\ (\varphi_1 \varepsilon_1 + \varphi_2 \varepsilon_2 + \varphi_3 \varepsilon_3) A_1 + (\varphi_1 \omega_1 + \varphi_2 \omega_2 + \varphi_3 \omega_3) B_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

其中

$$\begin{aligned} x_1 = T_{21} &= T_2^3(2, 3) T_1^2(3, 1) + T_2^3(2, 4) T_1^2(4, 1) \\ x_2 = T_{31} &= T_2^3(3, 1) T_1^2(1, 1) + T_2^3(3, 3) T_1^2(3, 1) + T_2^3(3, 4) T_1^2(4, 1) \\ x_3 = T_{41} &= T_2^3(4, 1) T_1^2(1, 1) + T_2^3(4, 4) T_1^2(4, 1) \\ k_1 = T_{22} &= T_2^3(2, 2) T_1^2(2, 2) + T_2^3(2, 3) T_1^2(3, 2) + T_2^3(2, 4) T_1^2(4, 2) \\ k_2 = T_{32} &= T_2^3(3, 1) T_1^2(1, 2) + T_2^3(3, 2) T_1^2(2, 2) + T_2^3(3, 3) T_1^2(3, 2) + T_2^3(3, 4) T_1^2(4, 2) \\ k_3 = T_{42} &= T_2^3(4, 2) T_1^2(2, 2) + T_2^3(4, 1) T_1^2(1, 2) + T_2^3(4, 4) T_1^2(4, 2) \\ \varepsilon_1 = T_{11} &= T_2^3(1, 1) T_1^2(1, 1) + T_2^3(1, 3) T_1^2(3, 1) + T_2^3(1, 4) T_1^2(4, 1), \quad \varepsilon_2 = x_1, \quad \varepsilon_3 = x_3 \\ \omega_1 = T_{12} &= T_2^3(1, 1) T_1^2(1, 2) + T_2^3(1, 2) T_1^2(2, 2) + T_2^3(1, 3) T_1^2(3, 2) + T_2^3(1, 4) T_1^2(4, 2) \\ \omega_2 = k_1, \quad \omega_3 = k_3 \end{aligned}$$

很显然,上述方程组有非零解时其它待定常数才可能是非零的. 所以根据线性齐次方程组有非零解的条件,可得如下方程式

$$\begin{aligned} \varphi_1 \varphi_1 f_1 + \varphi_2 \varphi_1 f_2 + \varphi_3 \varphi_1 f_3 + \varphi_1 \varphi_2 g_1 + \varphi_2 \varphi_2 g_2 + \varphi_3 \varphi_2 g_3 + \varphi_1 \varphi_3 h_1 + \varphi_2 \varphi_3 h_2 \\ + \varphi_3 \varphi_3 h_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 = x_1 \omega_1 - \varepsilon_1 k_1, \quad f_2 = x_2 \omega_1 - \varepsilon_1 k_2, \quad f_3 = x_3 \omega_1 - \varepsilon_1 k_3 \\ g_1 = x_1 \omega_2 - \varepsilon_2 k_1, \quad g_2 = x_2 \omega_2 - \varepsilon_2 k_2, \quad g_3 = x_3 \omega_2 - \varepsilon_2 k_3 \\ h_1 = x_1 \omega_3 - \varepsilon_3 k_1, \quad h_2 = x_2 \omega_3 - \varepsilon_3 k_2, \quad h_3 = x_3 \omega_3 - \varepsilon_3 k_3 \end{aligned}$$

类似于文献[3],根据已知条件易证  $g_1 \equiv 0, h_3 \equiv 0$ , 且

$$\begin{aligned} \varphi_1 \varphi_1 &= \frac{20}{7}(7-10\nu_m)c^3 + \frac{15}{7}(45\nu_m-7)c^3 \frac{\mu_m}{\mu} - \frac{5}{7}(7+5\nu_m)c^3 \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 \\ \varphi_2 \varphi_1 &= \frac{100(1-2\nu_m)}{7c^4} \left[ 1 - 2 \frac{\mu_m}{\mu} + \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 \right] \\ \varphi_3 \varphi_1 &= \frac{60}{7c^2} \left[ 1 - 2 \frac{\mu_m}{\mu} + \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 \right] \\ \varphi_1 \varphi_2 &= -\frac{12(7-10\nu_m)c^5}{1-2\nu_m} + \frac{9(7-15\nu_m)c^5 \mu_m}{1-2\nu_m} \frac{1}{\mu} + \frac{3(7+5\nu_m)c^5}{1-2\nu_m} \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 \\ \varphi_2 \varphi_2 &= -\frac{60}{c^2} \left[ 1 - 2 \frac{\mu_m}{\mu} + \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 \right] \\ \varphi_3 \varphi_2 &= -1 \frac{36}{1-2\nu_m} \left[ 1 - 2 \frac{\mu_m}{\mu} + \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 \right] \\ \varphi_1 \varphi_3 &= \frac{16(7-10\nu_m)(4-5\nu_m)}{7(1-2\nu_m)} + \frac{2(49-25\nu_m^2)}{7(1-2\nu_m)} \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 + \frac{12(42-75\nu_m+25\nu_m^2)}{7(1-2\nu_m)} \frac{\mu_m}{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 \varphi_3 &= \frac{80(4-5\nu_m)}{7c^7} - \frac{40(1-5\nu_m)}{7c^7} \frac{\mu_m}{\mu} - \frac{40(7-5\nu_m)}{7c^7} \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 & m \\ \phi_3 \varphi_3 &= \frac{48(4-5\nu_m)}{7(1-2\nu_m)c^6} - \frac{24(1-5\nu_m)}{7(1-2\nu_m)c^5} \frac{\mu_m}{\mu} - \frac{24(7-5\nu_m)}{7(1-2\nu_m)c^5} \left[ \frac{\mu_m}{\mu} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

由于  $f_i, g_i, h_i (i = 1, 2, 3)$  均与有效性质  $\mu$  无关, 所以上述方程经整理后得到

$$A \left[ \frac{\mu}{\mu_m} \right]^2 + 2B \left[ \frac{\mu}{\mu_m} \right] + C = 0 \quad (2.15)$$

若令  $\varphi_s = (b/c)^3$ , 用它代表涂层粒子的体积比, 则有

$$\left. \begin{aligned} A &= 20(7-10\nu_m)b^3f_1 + 100(1-2\nu_m)\varphi_s^{7/3}\frac{f_2}{b^4} + 60\varphi_s^{5/3}\frac{f_3}{b^2} - 420\varphi_s^{5/3}\frac{g_2}{b^2} \\ &\quad - \frac{252}{1-2\nu_m}\varphi_s g_3 + \frac{16(7-10\nu_m)(4-5\nu_m)}{1-2\nu_m}\varphi_s h_1 + 80(4-5\nu_m)\varphi_s^{10/3}\frac{h_2}{b^7} \\ 2B &= 15(15\nu_m-7)b^3f_1 - 200(1-2\nu_m)\varphi_s^{7/3}\frac{f_2}{b^4} - 120\varphi_s^{5/3}\frac{f_3}{b^2} + 840\varphi_s^{5/3}\frac{g_2}{b^2} \\ &\quad + \frac{504}{1-2\nu_m}\varphi_s g_3 + \frac{12(42-75\nu_m+25\nu_m^2)}{1-2\nu_m}\varphi_s h_1 - 40(1-5\nu_m)\varphi_s^{10/3}\frac{h_2}{b^7} \\ C &= -5(7+5\nu_m)b^3f_1 + 100(1-2\nu_m)\varphi_s^{7/3}\frac{f_2}{b^4} + 60\varphi_s^{5/3}\frac{f_3}{b^2} - 420\varphi_s^{5/3}\frac{g_2}{b^2} \\ &\quad - \frac{252}{1-2\nu_m}\varphi_s g_3 + \frac{2(49-25\nu_m^2)}{1-2\nu_m}\varphi_s h_1 - 40(7-5\nu_m)\varphi_s^{10/3}\frac{h_2}{b^7} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

由此便确定了球形涂层粒子增强复合材料的有效剪切模量。这一结果虽然外观形式上与文献 [3] 给出的剪切模量相同, 但其具体形式却是不同的, 它给出了球形涂层粒子增强复合材料有效剪切模量的有限解形式, 因而具有重要的理论价值。考虑到  $b = c$ , 且  $\mu_3 = \mu_2, \nu_3 = \nu_2$  时四相球模型退化为三相球模型, 上述有效剪切模量的解(或系数  $A, 2B, C$ ) 也应退化到球形体增强复合材料的有效剪切模量。不难证明此时有

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad x_2 = T_1^2(3, 1), \quad x_3 = T_1^2(4, \mathbf{E}_1), \quad \kappa_1 = T_1^2(2, 2), \quad \kappa_2 = T_1^2(3, 2), \quad \kappa_3 = T_1^2(4, 2) \\ \omega_1 &= T_1^2(1, 2), \quad \omega_2 = T_1^2(2, 2), \quad \omega_3 = T_1^2(4, 2), \quad \varepsilon_1 = T_1^2(1, 1), \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = T_1^2(4, 1) \\ f_1 &= -\frac{(1-2\nu_2)f(7-5\nu_2) + 2(4-5\nu_2)\mu_1/\mu_2 / [4(7-10\nu_1) + (7+5\nu_1)\mu_1/\mu_2]}{525(1-2\nu_1)(1-\nu_2)^2} \\ f_2 &= \frac{a^7}{250(1-\nu_2)^2(1-2\nu_1)} \left\{ \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \left[ 12(7-10\nu_1) + 3(7+5\nu_1)\frac{\mu_1}{\mu_2} - 7(7-5\nu_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 14(4-5\nu_2)\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] + \left[ (7-5\nu_2) + 2(4-5\nu_2)\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \left\{ \left[ 2(7-10\nu_2)(7+5\nu_1)\frac{\mu_1}{\mu_2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(7-10\nu_1)(7+5\nu_2) \right] + 147 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \right\} \left[ 21 \right] \\ f_3 &= -\frac{(1-2\nu_2)(\mu_1/\mu_2-1)a^5}{150(1-\nu_2)^2(1-2\nu_1)} \left\{ \left[ 12(7-10\nu_1) + 3(7+5\nu_1)\frac{\mu_1}{\mu_2} - 7(7-5\nu_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 14(4-5\nu_2)\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] + 7 \left[ (7-5\nu_2) + 2(4-5\nu_2)\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g^2 &= \frac{(1-2\nu_2)(\mu_1/\mu_2-1)a^5}{350(1-\nu_2)^2(1-2\nu_1)} \left[ 4(7-10\nu_1) + (7+5\nu_1) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \\
 g^3 &= -\frac{(1-2\nu_2)(\mu_1/\mu_2-1)a^3}{210(1-\nu_2)^2(1-2\nu_1)} \left[ 4(7-10\nu_1) + (7+5\nu_1) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \\
 h_1 &= \frac{(1-2\nu_2)(\mu_1/\mu_2-1)a^3}{210(1-\nu_2)^2(1-2\nu_1)} \left[ 4(7-10\nu_1) + (7+5\nu_1) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \\
 h_2 &= \frac{(1-2\nu_2)(\mu_1/\mu_2-1)a^{10}}{100(1-\nu_2)^2(1-2\nu_1)} \left\{ 7 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 - \frac{1}{21} \left\{ 2 \left[ (7+5\nu_1)(7-10\nu_2) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right. \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - (7-10\nu_1)(7+5\nu_2) \right\} + 147 \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) \right] \right\} \quad 2
 \end{aligned}$$

代入(2.16)式经化简得到

$$\begin{aligned}
 A &= 8 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] (4-5\nu_2) \eta_1 \varphi^{10/3} - 2 \left[ 63 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \varphi^{7/3} \right. \\
 &\quad \left. + 252 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \eta_2 \varphi^{5/3} - 50 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] (7-12\nu_2+8\nu_2^2) \eta_2 \varphi + 4(7-10\nu_2) \eta_2 \eta_3 \right. \\
 2B &= -4 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] (1-5\nu_2) \eta_1 \varphi^{10/3} + 4 \left[ 63 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \varphi^{7/3} \right. \\
 &\quad \left. - 504 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \eta_2 \varphi^{5/3} + 150 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \nu_2(3-\nu_2) \eta_2 \varphi + 3(15\nu_2-7) \eta_2 \eta_3 \right. \\
 C &= -4 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] (7-5\nu_2) \eta_1 \varphi^{10/3} - 2 \left[ 63 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \varphi^{7/3} \right. \\
 &\quad \left. + 252 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \eta_2 \varphi^{5/3} - 25(7-\nu_2^2) \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right] \eta_2 \varphi - (7+5\nu_2) \eta_2 \eta_3 \right.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= (7+5\nu_1)(7-10\nu_2) \frac{\mu_1}{\mu_2} - (7-10\nu_1)(7+5\nu_2) \\
 \eta_2 &= 4(7-10\nu_1) + (7+5\nu_1) \frac{\mu_1}{\mu_2} \\
 \eta_3 &= (7-5\nu_2) + 2(4-5\nu_2) \frac{\mu_1}{\mu_2}
 \end{aligned}$$

而  $\varphi = (a/b)^3$  此时则代表球形粒子的体积比。可见上述结果与 Christensen 给出的三相球模型的结果<sup>[1]</sup>完全相同。这一方面表明了本文推导的正确性,另一方面也表明了本文结果的通用性和一般性。

对于球形涂层粒子增强复合材料来说,可以认为其宏观力学行为是各向同性的。因而,一旦确定了有效体积模量和有效剪切模量,则确定它的有效杨氏模量和泊松比就比较容易了,例如,球形涂层粒子增强复合材料的有效杨氏模量可由下式求出

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \tag{2.18}$$

### § 3. 算 例

取文献[2]提供的材料数据(见表1)经进行计算得到:

$K_1 = 166.7\text{GPa}$ ,  $\mu_1 = 125\text{GPa}$ ;  $K_2 = 55.6\text{GPa}$ ,  $\mu_2 = 41.7\text{GPa}$ ;  $K_3 = 61.4\text{GPa}$ ,  $\mu_3 = 26.7\text{GPa}$ ; 利用上述数据和公式(2.6) 便可确定含球形涂层粒子增强复合材料的体积模量  $K$ 。图3针对不同的  $(a/b)^3$  值给出了  $K \sim \varphi_s$  的关系曲线, 其中不同的  $(a/b)^3$  值表示了涂层厚度对体积模量的

材 料	弹性模量 $E(\text{GPa})$	泊松比 $\nu$
增强粒子	300	0.2
基 体	70	0.31
涂 层	100	0.2

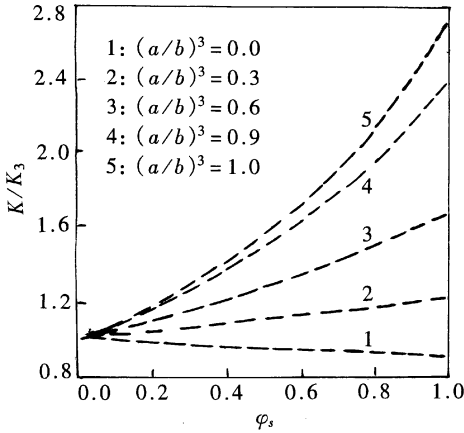


图3 体积模量比与涂层粒子体积比的关系

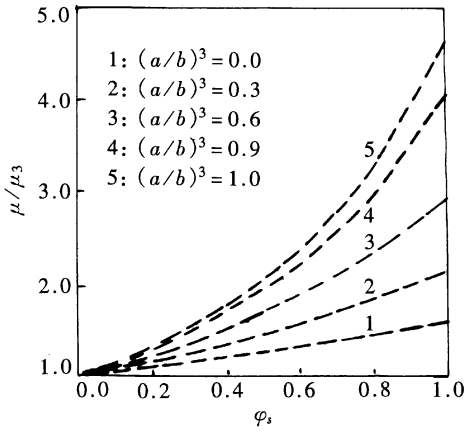


图4 剪切模量比与涂层粒子体积比的关系

影响。同样, 将上述材料参数代入确定有效剪切模量的相关公式则可确定含球形涂层粒子增强复合材料的有效剪切模量。图4针对不同的  $(a/b)^3$  值给出了  $\mu \sim \varphi_s$  的关系曲线, 其中不同的  $(a/b)^3$  值表示了涂层厚度对剪切模量的影响。根据上述计算结果便可确定含球形涂层粒子增强复合材料的有效杨氏模量。图5给出了不同的  $(a/b)^3$  值下的  $E \sim \varphi_s$  关系曲线, 其中  $(a/b)^3 = 0$  对应增强粒子全部转化为涂层材料时对应的复合材料杨氏模量同涂层材料体积比之间的关系, 而  $(a/b)^3 = 1$  则对应涂层厚度为零, 即未涂层增强复合材料的杨氏模量同增强球体积比之间的关系。当  $0 < (a/b)^3 < 1$  时, 所得球形涂层粒子增强复合材料的杨氏模量介于这两种极端情况之间。图5的计算结果一方面反映了涂层厚度对复合材料杨氏模量的影响, 另一方面也反映了涂层粒子的体积含量对复合材料杨氏模量的影响。

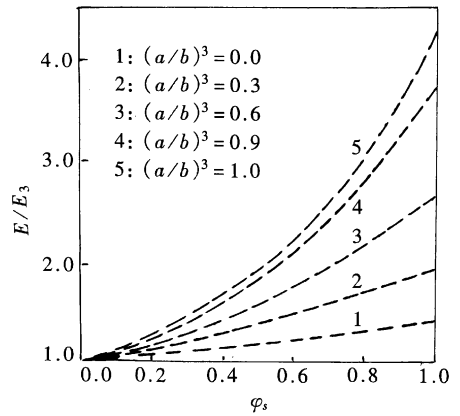


图5 杨氏模量比与涂层粒子体积比的关系

需要说明的是上述两种极端情况的计算结果与 Christensen 三相球模型的计算结果相同。因为三相球模型是经实验验证的结果, 所以本文模型的合理性得到部分证实。然而本文所得球形涂层粒子增强复合材料的有效模量预测公式的适用性尚需实验的进一步验证。

## § 4. 结 论

本文将球形粒子增强复合材料有效模量预测的三相球模型推广到四相球模型,得到了包含球形涂层粒子增强复合材料的有效模量计算公式。这些公式虽然形式复杂,但却给出这类复合材料有效模量解的有限形式,具有重要的理论价值和应用前景。

此外,四相球模型导出的有效模量公式在特殊情况下,可以退化到三相球模型结果,因而本文结果更具有有一般性。这一结果目前还未见文献报道。

### 附录 1 $T_i^\mu(r)$ 的逆矩阵

$$T_i^{\mu^{-1}}(r) = \frac{1}{5(1-\nu_i)} \begin{bmatrix} \frac{2(5-\nu_i)}{3r} & -\frac{1+\nu_i}{r} & \frac{5-4\nu_i}{3\mu_i} & \frac{1-2\nu_i}{\mu_i} \\ \frac{4(1-2\nu_i)}{7r^3} & -\frac{4(1-2\nu_i)}{7r^3} & -\frac{1-2\nu_i}{7\mu_i r^2} & -\frac{1-2\nu_i}{7\mu_i r^2} \\ \frac{\nu_i r^4}{7} & -\frac{(7+2\nu_i)r^4}{14} & \frac{2\nu_i r^5}{7\mu_i} & \frac{(7-4\nu_i)r^5}{14\mu_i} \\ \frac{(1-2\nu_i)r^2}{3} & -\frac{(1-2\nu_i)r^2}{2} & -\frac{(1-2\nu_i)r^3}{3\mu_i} & -\frac{(1-2\nu_i)r^3}{2\mu_i} \end{bmatrix}$$

### 附录 2 矩阵 $T_i^{\mu_i+1} = T_{i+1}^{\mu_i+1}(r_i) T_i(r_i)$ 的分量

$$\begin{aligned} T_i^{\mu_i+1}(1, 1) &= \frac{(7-5\nu_{i+1}) + 2(4-5\nu_{i+1})\mu_i/\mu_{i+1}}{15(1-\nu_{i+1})}, \quad T_i^{\mu_i+1}(2, 1) = 0 \\ T_i^{\mu_i+1}(3, 1) &= \frac{r_i^5(\mu_i/\mu_{i+1}-1)}{10(1-\nu_{i+1})}, \quad T_i^{\mu_i+1}(4, 1) = -\frac{(1-2\nu_{i+1})(\mu_i/\mu_{i+1}-1)r_i^3}{6(1-\nu_{i+1})} \\ T_i^{\mu_i+1}(1, 2) &= \frac{r_i^2[12(7-10\nu_i) + 3(7+5\nu_i)\mu_i/\mu_{i+1} - 7(7-5\nu_{i+1}) - 14(4-5\nu_{i+1})\mu_i/\mu_{i+1}]}{25(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)} \\ T_i^{\mu_i+1}(2, 2) &= \frac{(1-2\nu_{i+1})[4(7-10\nu_i) + (7+5\nu_i)\mu_i/\mu_{i+1}]}{35(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)} \\ T_i^{\mu_i+1}(3, 2) &= -\frac{r_i^7[2(7+5\nu_i)(7-10\nu_{i+1})\mu_i/\mu_{i+1} - 2(7-10\nu_i)(7+5\nu_{i+1}) + 147(\mu_i/\mu_{i+1}-1)]}{350(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)} \\ T_i^{\mu_i+1}(4, 2) &= \frac{7r_i^5(1-2\nu_{i+1})(\mu_i/\mu_{i+1}-1)}{10(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)}, \quad T_i^{\mu_i+1}(1, 3) = -\frac{12(\mu_i/\mu_{i+1}-1)}{5(1-\nu_{i+1})r_i^5} \\ T_i^{\mu_i+1}(2, 3) &= -\frac{4(1-2\nu_{i+1})(\mu_i/\mu_{i+1}-1)}{7(1-\nu_{i+1})r_i^7}, \quad T_i^{\mu_i+1}(3, 3) = \frac{(7+5\nu_{i+1}) + 4(7-10\nu_{i+1})\mu_i/\mu_{i+1}}{35(1-\nu_{i+1})} \\ T_i^{\mu_i+1}(4, 3) &= 0, \quad T_i^{\mu_i+1}(1, 4) = \frac{4[(4-5\nu_i)(7-5\nu_{i+1}) - (4-5\nu_{i+1})(7-5\nu_i)\mu_i/\mu_{i+1} - 27(\mu_i/\mu_{i+1}-1)]}{75(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)r_i^3} \\ T_i^{\mu_i+1}(2, 4) &= -\frac{12(1-2\nu_{i+1})(\mu_i/\mu_{i+1}-1)}{35(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)r_i^5} \\ T_i^{\mu_i+1}(3, 4) &= \frac{r_i^2[105(1-\nu_{i+1}) + 12(7-10\nu_{i+1})(\mu_i/\mu_{i+1}-1) - 14(4-5\nu_i) - 7(7-5\nu_i)\mu_i/\mu_{i+1}]}{105(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)} \\ T_i^{\mu_i+1}(4, 4) &= \frac{(1-2\nu_{i+1})[2(4-5\nu_i) + (7-5\nu_i)\mu_i/\mu_{i+1}]}{15(1-\nu_{i+1})(1-2\nu_i)} \end{aligned}$$



## 参 考 文 献

- 1 R. M. Christensen, *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley & Sons, New York (1979), 52—58.
- 2 王玉庆等, 涂层对复合材料残余应力的影响, *复合材料学报*, **11**(4) (1994), 76—80.
- 3 卢子兴、高镇同, 含空心球复合材料有效模量的确定, *北京航空航天大学学报*, **23**(4) (1997), 461—466.
- 4 卢子兴、黄筑平、王仁, 基于三相球模型确定泡沫塑料的有效模量, *固体力学学报*, **17**(2) (1996), 95—102.

## The Effective Moduli of Composite Reinforced by Spherical Coating Particles

Lu Zixing

(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,  
Beijing 100083, P. R. China)

### Abstract

The effective moduli of composite reinforced by spherical coating particles are investigated by the four phase spheroidal model and the theory of equivalent media. The theoretical predicting formulae of bulk modulus and shear modulus have been derived for this kind of composite in this paper. These formulae can reduce to the results of three phase spheroidal model which had been obtained by others for composite reinforced by particles.

**Key words** spherical coating particles, composite, effective modulus