应用数学和力学，第 19 卷 第 10 期(1998 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非线性空间上的大范围周期轨道之同调类

古志鸣[①]

(张鸿庆推荐, 1996 年 10 月 7 日收到, 1997 年 9 月 29 日收到修改稿)

摘　　要

非线性力学系统的大范围周期轨道可以代表等能曲面上的同调类，这些同调类一般非平凡，而等能曲面的拓扑性质又由相空间的拓扑性质及哈密顿函数的大尺度性质决定· 本文用后两类性质估算了等能曲面的第 1 同调群的秩·

关键词　大范围周期运动　同调类　Morse 不等式
中图分类号　O302, O189

§1. 引　　言

我们曾对 Hamilton 系统在平衡位置附近的小振动的类型数进行了估计，这种估计是针对全构形空间的平衡位置而做的，但在每个平衡位置附近仍用了局部线性化的方法· 对于大范围的周期运动，这种局部线性化方法就不适用了· 本文将用相空间及 Hamilton 函数的整体性质对系统的大范围周期运动的类型数进行估计· 我们用的工具是同调群与 Morse 不等式·(可参阅[1], [2] 和[3]·)

设一个 Hamilton 系统的构形空间是 n 维 C^∞_流形 M，其相空间为余切丛 T^*M· 又设其 Hamilton 函数是与时间无关的 $\mathscr{H}: T^*M \to \mathbb{R}$，$\mathscr{H}$ 光滑，E 为它的一个正则值· 根据 Maupertuis 原理，该系统的相轨道位于由 $\mathscr{H}(p, q) = E$ 所确定的 T^*M 的 $2n-1$ 维子流形 K 上，即 C^∞_曲线 $\gamma: I \to K$，其中 I 为长度不等于 0 的闭区间，$I = [t_0, t_1]$· 如果 γ 是闭曲线，就说它是系统的一个周期轨道· 我们的任务就是估计 K 上有多少种可能的周期轨道· 以下把 K 简称为 E 确定的等能曲面·

设 γ_1 与 γ_2 为等能曲面 K 上的周期轨道，如果 γ_1 能在 K 中连续变形为 γ_2，则应认为 γ_1 与 γ_2 是同一类型的· 换言之，我们应该估计 K 上的可能的周期轨道的同伦类有多少，显然，这只须计算 K 的基本群 $\pi_1(K)$· 但是，一般地说，计算同伦群总是比较困难的，我们将用第 1 整同调群 $H_1(K)$ 来代替 $\pi_1(K)$· 依照 Hurewicz 定理，当 K 为道路连通时，有满同态

$$\pi_1(K) \to H_1(K)$$

其核为 $\pi_1(K)$ 的换位子群· 这就是说，若 γ 是 K 上的周期轨道，那么 γ 所代表的同调类中可能有互不同伦的轨道，但是它们之间只相差 $\pi_1(K)$ 中的若干换位子因子· 按照这样分类，我

① 南京航空航天大学理学院 348 信箱，南京 210016

们的问题就转化成估计$H_1(K)$的大小• 具体地说, 我们要给出$H_1(K)$的秩的一个上界• 以下把整同调群$H_q(X)$的秩记作$d_q(X)$, 把$H_q(X, A)$的秩记作$d_q(X, A)$•

设A为$T^* M$的一个紧子集, Hamilton 函数$\mathscr{H}$在A上的限制$\mathscr{H}|A$只有非退化的临界点, 则把$\mathscr{H}|A$的指标为λ的临界点个数记作$C_\lambda(A)$• 如果$\mathscr{H}$在$A = T^* M$(设它为紧致)上只有非退化的临界点, 则称$\mathscr{H}$为 Morse 型函数•

一般地, $2n$维流形$T^* M$不是紧致的• 但可以找一个适当大的正整数m, 使$T^* M$嵌入m维球面S^m, 成为S^m的子流形• 然后再取这子流形在S^m中的闭包, 就得到一个紧致的$2n$维流形W, 它与$T^* M$同伦等价• 另外, $\mathscr{H}: T^* M \to [a, b]$可用$W$上的可允许的 Morse 函数(见[3])$f: W \to [a, b]$代替• 为了讨论的方便, 以下常把$T^* M$与$W$等同, 在§2 中还把$\mathscr{H}$与$f$等同•

§2. 主 要 结 果

我们的第一个估计结果是下面的定理•

定理 1 设 Hamilton 函数$f: W \to [a, b]$与时间无关, $E \in [a, b]$是f的一个正则值, K是E确定的等能曲面• 又设$f^{-1}(a)$是空集或者是单连通的• 若

$$C_2(f^{-1}[E, b]) = 0 \quad \text{或} \quad C_{2n-2}(f^{-1}[a, E]) = 0$$

则有

$$d_1(K) \leqslant C_1(f^{-1}[a, E]) + C_{2n-1}(f^{-1}[E, b]) \tag{2.1}$$

这里$2n = \dim W$•

证明 记

$$f^{-1}[a, E] = Y_1, \ f^{-1}[E, b] = Y_2$$

则

$$Y_1 \cap Y_2 = K, \ Y_1 \cup Y_2 = W$$

根据 Mayer_Vietoris 原理, 有正合序列

$$\cdots \to H_2(W) \xrightarrow{\Delta} H_1(K) \xrightarrow{\tau} H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2) \to H_1(W) \to \cdots$$

其中Δ为复合同态:

$$H_2(W) \to H_2(W, Y_1) \to H_2(Y_2, K) \to H_1(K)$$

当$C_2(Y_2) = 0$时, 知$H_2(Y_2, K) = 0$, 从而Δ为零同态• 由正合性知τ是单同态, 所以有

$$d_1(K) \leqslant d_1(Y_1) + d_1(Y_2) \tag{2.2}$$

再考虑正合序列

$$\cdots \to H_1(f^{-1}(a)) \to H_1(Y_1) \xrightarrow{l} H_1(Y_1, f^{-1}(a)) \to \cdots$$

因为$f^{-1}(a)$或者是单连通的, 或者是空集, 故$H_1(f^{-1}(a)) = 0$• 由此推知l为单同态, 即有

$$d_1(Y_1) \leqslant d_1(Y_1, f^{-1}(a)) \tag{2.3}$$

同理有

$$d_1(Y_2) \leqslant d_1(Y_2, B) \tag{2.4}$$

其中B在$f^{-1}(a) = \emptyset$时为W的边缘, 在$f^{-1}(a) \neq \emptyset$时为$\emptyset$•

把(2.3)与(2.4)代入(2.2), 并应用 Morse 不等式即得

$$d_1(K) \leqslant C_1(Y_1) + C_{2n-1}(Y_2)$$

当 $C_{2n-2}(Y_1)=0$ 时, 证法相同. □

以上的估计方法要求 $f^{-1}(a)$ 是空集或单连通的, 其目的是使得 $H_1(f^{-1}(a))=0$. 下面的一个定理将去掉这个限制条件. 换言之, 要把 $H_1(f^{-1}(a))$ 的影响考虑进去, 从而更有普遍性.

定理 2 设 Hamilton 函数 $f: W\to[a,b]$ 与时间无关. $y_1<y_2<\cdots<y_m$ 是 f 的全部临界值, $E_j\in(y_{j-1},y_j)$, K_j 是 E_j 确定的等能曲面. 则

$$d_1(K_j)\leqslant d_1(f^{-1}(a))+d_0(K_j)+C_{2n-2}(f^{-1}[a,E_j]) \tag{2.5}$$

证明 记 $X_i=f^{-1}[E_{i-1},E_i]$, 其中 $E_i\in(y_{i-1},y_i)$, $i=2,3,\cdots,j-1$. 又设 E_i 确定的等能曲面为 K_i, 并记 $K_1=f^{-1}(a)$.

假定

$$f^{-1}(y_{i-1})=\{x_1^{i-1},x_2^{i-1},\cdots,x_r^{i-1}\}\qquad(i=2,3,\cdots,j)$$

其指标分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$. 则 X_i 是在 K_{i-1} 上粘了维数分别是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 的胞腔所得到的空间.

另一方面, 设

$$f^{-1}(y_i)=\{x_1^i,x_2^i,\cdots,x_s^i\}\qquad(i=2,3,\cdots,j)$$

其指标分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$. 则 X_i 是在 K_i 上粘了维数分别是 $2n-\lambda_1,2n-\lambda_2,\cdots,2n-\lambda_s$ 的胞腔所得到的空间.

现在可以写出两个正合序列:

$$0\to\mathrm{Ker}\,\partial_1^i\to H_2(X_i,K_i)\xrightarrow{\partial_1^i}H_1(K_i)\to H_1(X_i)\to H_1(X_i,K_i)\to\cdots\to 0$$

$$0\to\mathrm{Ker}\,\partial_2^i\to H_2(X_i,K_{i-1})\xrightarrow{\partial_2^i}H_1(K_{i-1})\to H_1(X_i)\to H_1(X_i,K_{i-1})\to\cdots\to 0$$

由正合性可得秩的关系式

$$-\omega_1^i+d_2(X_i,K_i)-d_1(K_i)+d_1(X_i)-d_1(X_i,K_i)+\cdots=0$$

$$\omega_2^i-d_2(X_i,K_{i-1})+d_1(K_{i-1})-d_1(X_i)+d_1(X_i,K_{i-1})-\cdots=0$$

其中 ω_1^i 与 ω_2^i 分别是 $\mathrm{Ker}\,\partial_1^i$ 与 $\mathrm{Ker}\,\partial_2^i$ 的秩. 这两个式子相加得

$$(-\omega_1^i+\omega_2^i)+\theta_2^i-[d_1(K_i)-d_1(K_{i-1})]-\theta_1^i+[d_0(K_i)-d_0(K_{i-1})]=0 \tag{2.6}$$

其中 $\theta_q^i=d_q(X_i,K_i)-d_q(X_i,K_{i-1})$, $q=1,2$.

令 i 从 2 变到 j, 把这 $(j-1)$ 个式 (2.6) 加起来, 得到

$$\sum_{i=2}^{j}(-\omega_1^i+\omega_2^i)+\sum_{i=2}^{j}\theta_2^i-\sum_{i=2}^{j}\theta_1^i-d_1(K_j)$$
$$+d_1(K_1)+d_0(K_j)-d_0(K_1)=0$$

即有

$$\begin{aligned}d_1(K_j)&=d_1(K_1)+d_0(K_j)-d_0(K_1)+\sum_{i=2}^{j}\theta_2^i-\sum_{i=2}^{j}\theta_1^i+\sum_{i=2}^{j}(-\omega_1^i+\omega_2^i)\\&\leqslant d_1(K_1)+d_0(K_j)+\sum_{i=2}^{j}\theta_2^i+\sum_{i=2}^{j}(-\omega_1^i+\omega_2^i)\end{aligned} \tag{2.7}$$

对每个 i, 有

$$-\omega_1^i+\omega_2^i\leqslant\omega_2^i\leqslant d_2(X_i,K_{i-1})\qquad(i=2,3,\cdots,j)$$

将它代入(2.7)式得

$$d_1(K_j) \leqslant d_1(K_1) + d_0(K_j) + \sum_{i=2}^{j} d_2(X_i, K_i) \tag{2.8}$$

由 Morse 不等式,有

$$d_2(X_i, K_i) \leqslant C_{2n-2}(X_i)$$

将它代入(2.8)式即得所求的不等式(2.5)• □

注 定理 2 提出的估计方法需要知道 $d_0(K_j)$, 即 K_j 的连通分支数• 这在有些情况下可通过其它途径得知• 例如, 当 W 是由多项式理想 J 决定的代数流形, 而且 f 是多项式函数时, 可以由 J 与 f 的代数性质来了解 $d_0(K_j)$•

我们以刚体运动为例来说明定理 2 的应用• 设刚体运动如[4]的§4.6 所述, 其中约化系统是定义在半径为 $|\mu|$ 的球面 $S^2_{|\mu|}$ 上的, Hamilton 函数为

$$H_\mu(v) = \frac{1}{2}(Iv, v)$$

I 为惯量张量, H_μ 有 6 个非退化临界点 $\pm x_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$, 指标分别为 1, 2, 0, 使得

$$Ix_{\lambda_i} = \lambda_i x_{\lambda_i}, \ (x_{\lambda_i}, x_{\lambda_i}) = |\mu|^2, \qquad \lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_3$$

根据以上条件容易算出临界值分别为

$$h_i = \frac{1}{2}\lambda_i |\mu|^2, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

而且等能集 $H^{-1}_\mu(h_i)$ 分别为零维球面(即两点集) S^0(当 $i = 2, 3$) 及两个相交于两点的圆周 S^1(当 $i = 1$)• 因 $S^2_{|\mu|}$ 紧致, 故 $H_{|\mu|}$ 的值域为闭区间 $[a, b]$, 且 $a \leqslant h_3 < h_1 < h_2 \leqslant b$•

设 $h_3 < E_1 < h_1 < E_2 < h_2$, 直接用定理 2 可得

$$d_1(K_1) \leqslant 0 + 2 + 1 = 3$$

$$d_1(K_2) \leqslant 0 + 2 + 1 = 3$$

与[4]中的命题 4.6.3 的结论对照,(注: 该命题中诸 h_i 的大小顺序与该书的前文所述相反, 似有误, 但并不影响其结论•) 那里的 K_1 与 K_2 均为 $S^0 \times S^1$, 即两个分离的圆周, 其第 1 同调群的秩为 2, 与我们的计算结果($\leqslant 3$) 相符•

当构形空间 M 为紧致的无边缘流形时, 我们也可以去掉对 T^*M 的紧性的假定和对 Hamilton 函数 $\mathscr{H}$ 在可能出现的 W 的边缘上的限制, 直接在 M 上进行讨论•

设 Hamilton 函数 $\mathscr{H} = T + U$, 其中 T 为系统的动能函数, U 为势函数• 对给定的常数 E, 若 $T + U = E$, 则当 $E > U$ 时, $T = E - U$ 可以定义由 $E > U$ 确定的 M 的开子集上的一个 Riemann 度量, 系统的一个周期轨道投影在这个开子集上就是关于这个度量的闭测地线• 要估计这个开子集上所有可能的闭测地线数, 同样需要知道该开子集的基本群(见[2]), 所以仍可以用第 1 同调群来近似•

定理 3 设构形空间 M 为紧致无边缘的 n 维光滑流形• $U: M \to I\!R$ 为系统的势函数, 而且是 Morse 型函数• E 为 U 的正则值, 则

$$d_1(M_E) \leqslant C_1'(M_E)$$

其中 M_E 为 $E > U$ 确定的 M 的开子集, $C_1'(M_E)$ 是 $U|M_E$ 的指标为 1 的临界点数•

证明 这是 Morse 不等式的直接推论• □

注(i) 如果 $M_E = M$, 则只须直接从 $\pi_1(M)$ 来预测闭测地线, 见[5]•

注(ii) 若对某个 λ 有 $C_{\lambda+1} = C_{\lambda-1} = 0$, 则

$$d_\lambda(-) = C_\lambda(-)$$

(见[2])• 这时可以提高(2.5)式的精度•

§3. 推广到退化情况

在前面的讨论中有一个共同的假定, 即 Hamilton 函数或势函数都是 Morse 型函数• 这个条件还可以减弱•

设 $f: W \to IR$ 为紧致光滑流形 W 上的 C^∞ 类函数• 又设 f 的临界点的全体构成 W 的有限个连通的光滑子流形, f 的 Hesse 矩阵在这些子流形的法方向上仍是非退化的, (当 W 有边缘时, 对 f 在边缘上的性态仍要求与可允许的 Morse 型函数相同•) 则称 f 是广义的 Morse 型函数, 称这些子流形为 f 的非退化临界流形• 显然, 广义 Morse 型函数的临界点一般是退化的•

假定 N 是 f 的一个非退化临界流形, 则把 f 的 Hesse 矩阵在 N 的法方向上的负惯性指标称为 N 的指标•

对于广义的 Morse 型函数, 有广义的 Morse 不等式, 其一般表述请见[2]• 我们在这里只把前面三个定理在 Hamilton 函数或势函数是广义 Morse 型函数条件下的结果总结如下:

设 f (或 U) 的指标为 λ 的非退化临界流形 N_p^λ 共有 C_λ 个(或 C'_λ 个), 而且每个 N_p^λ 的法丛都是可定向的• 若

$$d_s(N_p^\alpha) = d_s(N_q^\alpha) = d_s^\alpha; \qquad p, q = 1, 2, \cdots, C_\alpha \text{ 或 } C'_\alpha \tag{3.1}$$

对每个 s, α 的值都成立, 那么只须把前面各定理中的 $C_k(-)$ (或 $C'_k(-)$) 都换成

$$\sum_{\alpha=0}^{k} C_\alpha \cdot d_{k-\alpha}^\alpha \qquad \left(\text{或} \sum_{\alpha=0}^{k} C'_\alpha \cdot d_{k-\alpha}^\alpha\right)$$

这些定理依然成立• 当(3.1)式不成立时, 仍然可以按照广义 Morse 不等式进行计算•

参 考 文 献

1 Edwin H. Spanier, Algebraic Topology, Springer_Verlag (1966)•

2 R. Bott, Lectures on Morse theory, old and new, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), **7**(2) (1982), 331—358•

3 Morris W. Hirsch, Differential Topology, Springer_Verlag (1976)•

4 Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden, Foundations of Mechanics, Second Edition, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1978)•

5 V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer_Verlag (1978)•

The Homology Classes of Large_Scale Periodic Orbits on Nonlinear Space

Gu Zhiming
(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China)

Abstract

The large_scale periodic orbits of a nonlinear mechanics system can represent the homology classes, which are generally non_trivial, of the energy level surface and the topology properties of an energy level surface are determined by the that of the phase space and the large_scale properties of the Hamiltonian. These properties are used for estimate of the rank of the first homology group of energy level surfaces in the paper.

Key words large_scale periodic motion, homology classes, Morse inequalities