

# 一种非经典晶体塑性本构模型及其应用\*

彭向和<sup>①</sup> 曾祥国<sup>①</sup> 范镜泓<sup>①</sup>

(张汝清推荐, 1997 年 5 月 5 日收到, 1998 年 6 月 24 日收到修改稿)

## 摘 要

根据不可逆变形过程中材料微结构的储能特性, 采用由弹簧和塑性阻尼器构成的简单机械模型建立了不采用屈服判据的单晶本构关系。在此基础上形成了与 KBW 自洽理论相应的多晶计算格式。计算格式中无需对滑移系的开动和滑移方向进行搜索, 使计算过程大为简化。在多晶体分析中, 提出了一种基于正 20 面体各面内取向随机分布单晶响应的高斯平均和在空间完全均匀分布的 20 个方向上算术平均的混合平均方案, 与通常的纯高斯积分平均方案相比, 在计算精度和效率上都有较大提高。用所发展的模型和算法分析了 316 不锈钢在具有代表性的路径下的循环塑性, 得到了与实验相一致的结果。

**关键词** 晶体塑性 本构关系 多晶堆积模型 非比例循环塑性

**中图分类号** O344

## § 1. 引 言

自 30 年代以来人们开始了对晶体塑性的研究<sup>[1]</sup>。60 年代以后实验技术、位错直接观察技术和位错理论的进步以及计算机及其分析软件的发展, 促进了晶体塑性理论向深度和广度发展。自从 Hill<sup>[2]</sup>、Hill 和 Rice<sup>[3]</sup> 建立了晶体塑性理论的几何学和运动学的完整体系后, 晶体塑性理论的应用, 尤其是在复杂加载条件下多晶材料的响应分析中的应用日益引起人们的注意, 而其关键在于: 建立合理的单晶本构关系和寻求简单易行的多晶数值分析方法。

迄今为止的单晶本构关系在本质上仍以经典塑性理论为基本框架, 即以屈服剪应力的存在为基本前提。设作用于单晶的应力为  $\sigma_c$ , 则第  $i$  个滑移系运动与否由下式决定<sup>[4]</sup>:

$$\dot{\gamma}^i = \begin{cases} \geq 0, & \text{如果 } \sigma_c: \mathbf{d}^i = \tau^i \text{ 且 } \sigma_c: \mathbf{d}^i = \tau^i \\ \stackrel{A}{=} 0, & \text{如果 } \sigma_c: \mathbf{d}^i < \tau^i; \text{ 或 } \sigma_c: \mathbf{d}^i = \tau^i \text{ 且 } \sigma_c: \mathbf{d}^i < \tau^i \end{cases} \quad (1.1)$$

式中

$$\mathbf{d}^i = \frac{1}{2}(\mathbf{n}^i \dot{\gamma}^i \mathbf{s}^i + \mathbf{s}^i \dot{\gamma}^i \mathbf{n}^i) \quad (1.2)$$

为滑移系的取向张量,  $\mathbf{n}^i$  和  $\mathbf{s}^i$  分别表示滑移面法向和滑移方向的单位矢量。单晶硬化律一般可表示为

\* 教育部“跨世纪优秀人才培养计划”基金资助项目

① 重庆大学工程力学系, 重庆 400044

$$\vec{\epsilon} = \sum_{j=1}^N h^{ij} \vec{\nu}^j \quad (1.3)$$

式中  $h^{ij}$  为硬化系数, 人们曾根据产生硬化的不同物理机制提出了相应的硬化律<sup>[5-12]</sup>。

在已有的工作中, 由于假定屈服剪应力的存在并采用了相应的滑移准则(见式(1.1)), 使得数值分析卷入了对滑移系的开动和滑移方向进行搜索的附加迭代, 不仅增加了数值分析的复杂性, 而且可能影响多晶分析的精度、收敛性和计算效率。

本文根据多晶体在变形过程中不可避免地存在着各种微缺陷及其微应力场, 基于一个简单机械模型建立了不采用屈服判据的单晶本构关系, 形成了与 KBW 自洽理论相应的多晶计算格式。尽管所发展的本构模型能够包含经典单晶本构关系为其特例, 但由于它不采用屈服判据和相应的滑移系开动准则, 对应的多晶计算格式无需包含对滑移系的开动和滑移方向进行搜索的有关过程, 使计算大为简化, 也有利于保证计算结果的唯一性。在多晶响应的分析中, 以正 20 面体为基础, 提出了一种基于各面内取向随机分布单晶响应的高斯积分平均和 20 个方向上的算术平均的混合平均方案, 具有较高的计算精度和计算效率。用所发展的模型与算法分析了 316 不锈钢在具有代表性的二维路径下的循环塑性, 较好地描述了主要实验现象。

## § 2. 单晶本构关系

多晶中的任何单晶都不是孤立的, 其变形不可避免地受到相邻晶体的约束。当多晶体发生宏观塑性变形时, 由于各晶体取向等的差异, 可能导致晶体的弹性畸变; 同时多晶及晶体内部不可避免地存在着各种缺陷及其变化(如晶界、相界以及位错及其运动和增殖等)及其相应的微应力场。贮存于畸变晶体和微应力场中的能量在一定条件下可能被释放从而减少晶体滑移所需的外部能量。据此引入图 1 所示的描述单晶滑移的简单机械模型。

图 1 中, 贮存于弹簧  $C$  (其刚度为  $C$ ) 中的能量表示贮存于材料微结构中的能量, 塑性滑块  $a_m$  (其塑性阻尼系数为  $a_m$ ) 的运动表示滑移系的不可逆运动。则弹簧的响应为

$$\tau_m = C(\gamma_m - p_m) \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

式中  $\gamma_m$  和  $\tau_m$  分别为第  $m$  个滑移系的滑移量和剪应力,  $N$  为晶体的独立滑移系数目,  $p_m$  为内变量, 其变化与  $\tau_m$  之间应满足耗散不等式  $\tau_m dp_m \geq 0$  ( $m$  不作和)。引入如下定义的广义时间量度  $\zeta_m$

$$d\zeta_m = |d\gamma_m| \quad (2.2)$$

可以假设  $\tau_m$  和  $p_m$  的变化间满足如下现象学关系:

$$\tau_m = a_m \frac{dp_m}{d\zeta_m} \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.3)$$

式中  $a_m > 0$  以保证耗散不等式在任何条件下均成立。

在滑移过程中, 位错的运动可能导致塞积、缠结等障碍, 它们增加了对位错运动的阻力, 导致了材料的宏观硬化。这种硬化可由  $a_m$  的变化现象学地加以描述。设滑移系的硬化包含了自身

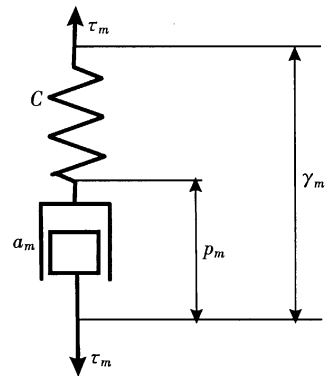


图 1 滑移系本构关系的简单机械模型

硬化和潜在硬化两部分, 分别由  $f_m$  和  $H_m$  描述, 令

$$a_m = a_0 f_m H_m, \quad dz_m = \frac{d\zeta_m}{f_m H_m} \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.4)$$

式中  $a_0$  为初始阻尼系数,  $z_m$  为描述第  $m$  个滑移系运动的广义时间标度, 由式(2.3) 和(2.4) 可得

$$\tau_m = a_0 \frac{d\gamma_m}{dz_m} \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.5)$$

联立式(2.1)、(2.3) 和(2.4) 可得

$$d\tau_m = C d\gamma_m - \alpha \tau_m dz_m \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.6)$$

式中  $\alpha = C/a_0$ . 如果  $C \rightarrow \infty$ , 由图 1 可知  $p_m = \gamma_m$ , 由式(2.2) 和(2.3) 立即得到

$$\tau_m = \pm a_0 f_m H_m \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.7)$$

这正是通常采用的单晶本构关系中的临界条件, 而  $a_0$  即为初始临界剪应力. 式(2.6) 可进一步表示为

$$\tau_m = T_m \gamma_m \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.8)$$

$$\text{式中} \quad T_m = C - \frac{\alpha \Gamma_m}{f_m H_m} \tau_m, \quad \Gamma_m = \frac{d\gamma_m}{d\zeta_m} \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.9)$$

如果定义硬化系数

$$h^{mn} = T_m \delta^{mn} \quad (m \text{ 不作和}) \quad (2.10)$$

则可得如下单晶本构关系

$$\tau_m = \sum_{n=1}^N h^{mn} \gamma_n \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (2.11)$$

不难证明  $h^{mn}$  正定. 这可保证解的存在和唯一性.

### § 3. 硬化函数及其细观机制

式(2.4) 引入了  $f_m$  和  $H_m$  分别描述滑移系的自身硬化和潜在硬化. 在塑性变形过程中, 引起晶体硬化的机制是复杂的, 但大致可归结为两种基本类型: 塞积型硬化和缠结型硬化.

塞积型硬化源于位错在障碍前的塞积所造成的对运动位错的阻碍. 它导致长程应力场, 且对运动位错的作用效果与位错运动的方向有关, 可较好地解释 Bouchinger 效应. 与某一滑移系对应的塞积硬化为所有滑移系的塞积应力场对其影响效果的叠加.

缠结型硬化则主要源于开动位错与林位错间的相互作用. 它导致短程应力场, 相应的硬化表现为位错网络对位错运动的牵制或位错结构对运动位错的钉扎. 缠结对位错运动的作用不显著受其运动方向的影响, 但缠结依赖于各滑移系的位错状态和滑移史. 不同滑移系上位错的相互作用可能产生不同的缠结形式, 所导致的硬化间可能存在显著的差异. 缠结型硬化的数学描述应能描述其历史相关性和不同滑移系间的位错状态和运动位错间相互作用的差异.

由于位错总是按最小阻力的方式运动, 故对晶体硬化的描述应综合考虑上述两种硬化机制. 为此假设滑移系的硬化与滑移系的累积滑移量以及当前的硬化状态密切相关, 考虑到当塑性变形充分发展时, 晶体硬化存在饱和状态, 可使  $f_m$  的演化满足

$$\frac{df_m}{dz_m} = \beta_1 (d_1 - f_m) \quad (3.1)$$

式中  $\beta_1$  和  $d_1$  为材料参数,  $d_1$  为  $f_m$  的饱和值而  $\beta_1$  表示  $f_m$  趋近于  $d_1$  的快慢程度。

Bassani<sup>[10]</sup> 在对潜在硬化进行了分析的基础上, 提出了一种能够较好地对其进行描述的单晶硬化律。本文直接引用 Bassani 的有关结果作为潜在硬化函数, 即

$$H_m = 1 + \sum_{k \neq m} f_{mk} \tanh(2\beta_s \zeta_k) \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (3.2)$$

其中  $\zeta_k$  为第  $k$  个滑移系的累积滑移;  $\beta_s$  和  $f_{mk}$  为材料参数,  $\beta_s$  表示  $H_m$  趋近于饱和值的快慢程度而  $f_{mk}$  为第  $k$  个滑移系和第  $m$  个滑移系间的耦合硬化系数, 由滑移系间的相对取向决定, 反映了第  $k$  个滑移系的累积滑移对第  $m$  个滑移系硬化的贡献。

容易看出,  $f_m$  和  $H_m$  分别具有饱和值  $d_1$  和  $1 + \sum_{k \neq m} f_{mk}$ , 容易证明当塑性变形充分发展时, 滑移系的剪应力存在饱和值。而当剪应力趋近于其饱和值时, 滑移系的硬化模量  $T_m$  趋近于零。

## § 4. 应用与验证

### 4.1 单晶本构关系的增量形式

当  $a$  很大时, 直接将式(2.6) 改写为增量形式以计算滑移系的响应可能导致很大的误差并影响解的收敛性<sup>[13]</sup>。利用式(2.6) 的积分形式, 可得到如下增量型本构方程<sup>[13]</sup>

$$\Delta \tau_m = A_m \Delta \gamma_m + B_m \Delta z_m \quad (m \text{ 不作和}) \quad (4.1)$$

式中

$$A_m = k_m C, \quad B_m = -k_m \alpha \tau_m(z_m^{(n)}), \quad z_m = z_m^{(n)} + \Delta z_m$$

$$k_m = \frac{1 - e^{-\alpha \Delta z_m}}{\alpha \Delta z_m}, \quad \Delta z_m = \frac{\Delta \zeta_m}{f_m H_m}, \quad \Delta \zeta_m = |\Delta \gamma_m| \quad (m \text{ 不作和}) \quad (4.2)$$

$z_m^{(n)}$  和  $\tau_m(z_m^{(n)})$  分别表示第  $m$  个滑移系在第  $n$  次加载后的广义时间标度和分解剪应力, 藉此可将式(2.8) 写为如下增量形式

$$\Delta \tau_m = T_m \Delta \gamma_m, \quad T_m = A_m + \frac{\Gamma_m B_m}{f_m H_m}, \quad \Gamma_m = \frac{\Delta \gamma_m}{\Delta \zeta_m} \quad (m \text{ 不作和}) \quad (4.3)$$

利用式(2.10), 可得增量单晶本构关系

$$\Delta \tau_m = \sum_{n=1}^N h^{mn} \Delta \gamma_n \quad (4.4)$$

### 4.2 基于 KBW 自治理论的多晶塑性求解格式

假设所研究的单晶和多晶均为体积塑性不可压缩, 则在等温和小变形条件下由 KBW 自治理论可得

$$\Delta \sigma_c - \Delta \sigma = -2G(1 - \beta)(\Delta \mathcal{E}^c - \Delta \mathcal{E}^p) \quad (4.5)$$

式中  $\Delta \sigma_c$  和  $\Delta \mathcal{E}^c$  分别表示单晶体的应力和塑性应变增量,  $\Delta \sigma$  和  $\Delta \mathcal{E}^p$  分别表示多晶体的平均应力和平均塑性应变增量,  $G$  为材料的剪切弹性模量,

$$2G(1 - \beta) = \frac{2(7 - 5\nu)}{15(1 - \nu)} G \quad (4.6)$$

由式(4.5) 易得

$$(\Delta \sigma_c)_{kk} = \Delta \sigma_{kk}, \quad \Delta s_c - \Delta s = -2G(\Delta \mathcal{E}^c - \Delta \mathcal{E}^p) \quad (4.7)$$

式中  $\Delta s_c$  和  $\Delta s$  分别为单晶增量偏应力和多晶平均增量偏应力。若定义

$$\Delta q = \Delta s + \frac{2(7 - 5\nu)}{15(1 - \nu)} G \Delta \mathcal{E}^p = \Delta s_c + \frac{2(7 - 5\nu)}{15(1 - \nu)} G \Delta \mathcal{E}^c \quad (4.8)$$

且 
$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{m=1}^N \boldsymbol{\alpha}^m \Delta \gamma_m, \quad \Delta \boldsymbol{\tau}^n = \boldsymbol{\alpha}^n : \Delta \boldsymbol{s}_c \quad (4.9)$$

则可得 
$$\sum_{m=1}^N A^{mn} \Delta \gamma_m = b^n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (4.10)$$

其中 
$$A^{nm} = h^{nm} + \frac{2(7-5\nu)}{15(1-\nu)} G \boldsymbol{\alpha}^n : \boldsymbol{\alpha}^m, \quad b^n = \Delta \boldsymbol{q} : \boldsymbol{\alpha}^n \quad (4.11)$$

在上述关系中, 多晶平均增量塑性应变  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  取为各单晶增量塑性应变  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  的平均, 即

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \left\{ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_c^p \right\} \quad \uparrow \quad (4.12)$$

而多晶体的应力增量为

$$\Delta \boldsymbol{s} = 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad \Delta \sigma_{hk} = 3K \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{hk} \quad (4.13)$$

式中  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  为多晶的平均增量偏应变,  $K$  为体积弹性模量。

### 4.3 多晶塑性应变增量的混合平均方法

根据单晶增量塑性应变计算多晶平均增量塑性应变(式(4.12))的方法之一是体积平均, 即

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N'} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_c^{p(i)} V_i \quad (4.14)$$

式中  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_c^{p(i)}$  和  $V_i$  分别为第  $i$  个单晶的增量塑性应变和体积。如进一步假设多晶中各单晶具有相同的体积, 即  $V = N' V_i$ , 则上式可改写为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N'} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_c^{p(i)} \quad (4.15)$$

在多晶计算中, 通常将多晶体视为具有无数随机取向的单晶的集合。在这一理想化的前提下, 式(4.15)可表示为积分形式并采用高斯求积的方法计算。这种处理方法的实质是选择一些特殊取向的单晶, 采用加权的方法近似求得多晶响应, 它难以保证所取向在空间分布的均匀性, 这在  $\theta$  和  $\phi$ (见图2) 方向上尤为突出。本文采用了一种求  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  的混合平均方法, 即以正20面体为基础, 以中心至各面(均为正三角形)形心的连线方向(即为该面的法线方向)确定  $\theta_i$  和  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 20$ ), 由此得到在空间完全均匀分布的20个方向; 进而假设在各面内均存在无数取向随机分布于该平面内的单晶, 即假设在各面内  $\omega$  是连续变化的, 则式(4.15)可表示为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_c^p(\theta_i, \phi_i, \omega) d\omega \quad (4.16)$$

如进一步对  $\omega$  采用高斯积分平均, 考虑到对称性, 并注意到正20面体的20个面是两两平行的, 则上式可进一步表示为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^4 A_j^\omega \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_c^p(\theta_i, \phi_i, \omega_j) \quad (4.17)$$

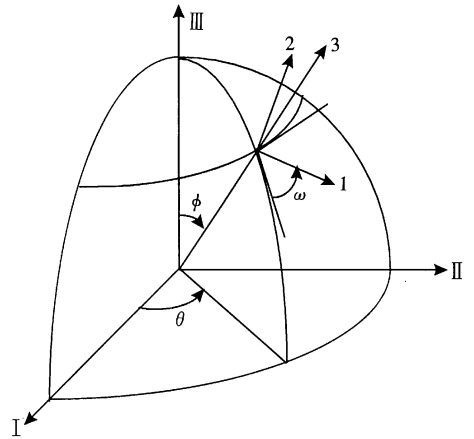


图2 整体坐标系与局部坐标系

其中高斯点坐标  $\omega_j$  和加权系数  $A_j^\omega$  见表 1,  $\theta_i$  和  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) 的值见表 2。

如不计采用高斯加权系数带来的精度改善, 采用式(4. 17) 计算多晶平均增量塑性应变相当于对 40 个不同取向的晶体进行平均。分析表明, 由于晶向分布合理, 采用混合平均法无论在计算精度和计算效率上较纯高斯积分平均法都有较大的提高。

表 1 高斯点坐标  $\omega_j$  及其加权系数  $A_j^\omega$

$j$	1	2	3	4
$\omega_j$ (rad)	0. 1090633	0. 5183777	1. 052419	1. 461733
$A_j^\omega$	0. 3478548	0. 6521452	0. 6521452	0. 3478548

表 2 10组独立的  $\theta_i$  和  $\phi_i$  值

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta_j$ ( $^\circ$ )	0	72	144	216	288	288	216	144	72	0
$\phi_j$ ( $^\circ$ )	37. 38	37. 38	37. 38	37. 38	37. 38	142. 62	142. 62	142. 62	142. 62	142. 62

#### 4. 4 计算与验证

本文对面心立方(FCC) 材料在具有代表性的二维复杂应变路径下的响应特性进行了分析, 其局部坐标系中 12 个独立的滑移系排序及其相应的滑移面法向量  $\mathbf{n}^i$  和滑移方向矢量  $\mathbf{s}^i$  见表 3。

表 3 FCC 的 12 对独立的滑移系矢量

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{n}^i$	(1 1 $\bar{1}$ )	(11 $\bar{1}$ )	(1 1 $\bar{1}$ )	(1 $\bar{1}$ 1)	(1 $\bar{1}$ 1)	(1 $\bar{1}$ 1)	(1 $\bar{1}$ $\bar{1}$ )	(1 $\bar{1}$ $\bar{1}$ )	(1 $\bar{1}$ $\bar{1}$ )	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)
$\mathbf{s}^i$	[1 0 1]	[0 1 1]	[1 $\bar{1}$ 0]	[1 1 0]	[0 1 1]	[1 0 $\bar{1}$ ]	[1 0 1]	[1 1 0]	[0 1 $\bar{1}$ ]	[1 0 $\bar{1}$ ]	[0 $\bar{1}$ 1]	[1 $\bar{1}$ 0]

在上述排序下, 耦合强化系数  $f_{mn}$  可用矩阵表示为

$$[f_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & C_1 & C_3 & C_2 & C_1 & C_1 & C_2 & C_2 & C_1 & C_3 & C_2 \\ & 0 & C_1 & C_2 & C_1 & C_2 & C_1 & C_3 & C_1 & C_3 & C_1 & C_2 \\ & & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_2 & C_1 & C_3 & C_2 & C_2 & C_1 \\ & & & 0 & C_1 & C_1 & C_2 & C_1 & C_2 & C_2 & C_3 & C_1 \\ & & & & 0 & C_1 & C_3 & C_2 & C_1 & C_2 & C_1 & C_3 \\ & & & & & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_1 & C_2 & C_2 \\ & & & & & & 0 & C_1 & C_1 & C_1 & C_2 & C_3 \\ & & & & & & & 0 & C_1 & C_3 & C_2 & C_2 \\ & & & & & & & & 0 & C_2 & C_1 & C_1 \\ & & & & & & & & & 0 & C_1 & C_1 \\ & & & & & & & & & & 0 & C_1 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

对称

在指定的应变(或应力)史下计算多晶体的应力(或应变)响应可采用增量和迭代的方法进

行。在给定应变史的条件下, 设已完成第  $n - 1$  次加载并已求得  $s_{(n)}$  以及各滑移系的  $\{f_m\}_{(n)}$ ,  $\{H_m\}_{(n)}$ ,  $\{\tau_m\}_{(n)}$ ,  $\{\zeta_m\}_{(n)}$ ,  $\{z_m\}_{(n)}$ , 现给定增量  $\Delta \epsilon$  且已经历  $k$  次迭代并分别求得  $s_{(n)}^{(k)}$ 、各单晶之  $\{\Delta \epsilon_c^{(k)}\}_{(n)}$  以及各滑移系的  $\{\Delta \gamma_m^{(k)}\}_{(n)}$ ,  $\{\Delta \zeta_m^{(k)}\}_{(n)}$ ,  $\{\Delta z_m^{(k)}\}_{(n)}$ , 则可根据式 (4.2)、(4.3) 和 (2.10) 计算  $[h^{ij}]^{(k)}_{(n)}$ , 根据式 (4.8) 和 (4.13) 可计算  $[A^{ij}]^{(k)}_{(n)}$ ,  $\{b^j\}_{(n)}^{(k)}$ , 求解方程 (4.11) 可得  $\{\Delta \gamma_i\}_{(n)}^{2(k+1)}$  并依次求得  $\{\tau_m^{(k+1)}\}_{(n)}$ ,  $\{\zeta_m^{(k+1)}\}_{(n)}$ ,  $\{z_m^{(k+1)}\}_{(n)}$ ,  $\{s\}_{(n)}^{(k+1)}$ ,  $\{q\}_{(n)}^{(k+1)}$ , 当相对误差

$$\delta = \frac{|(\Delta q)_{(n)}^{(k+1)} - (\Delta q)_{(n)}^{(k)}|}{|(\Delta q)_{(n)}^{(k+1)}|} \leq \delta_0 \quad (4.18)$$

时, 迭代结束, 将有关量分别叠加到第  $n - 1$  次增量加载的结果得到  $s_{(n)}$ 、各单晶之  $\{\Delta \epsilon_c^{(n)}\}_{(n)}$  及各滑移的  $\{\tau_m^{(n)}\}_{(n)}$ ,  $\{\zeta_m^{(n)}\}_{(n)}$ ,  $\{z_m^{(n)}\}_{(n)}$ ,  $\{f_m^{(n)}\}_{(n)}$ ,  $\{H_m^{(n)}\}_{(n)}$  后进入下一步增量加载。  $\delta_0$  为容许误差, 本工作中取  $\delta_0 = 0.01$ 。值得注意的是, 由于采用了不含屈服判断的滑移模型, 数值分析中避免了与判断滑移系的开动与滑移方向相关的附加搜索和迭代过程, 计算格式简单明了。

利用所发展的模型与算法对 316 不锈钢在室温环境二维复杂加载路径下的响应进行了分析, 根据 Murakami 等<sup>[14]</sup> 实验结果确定有关材料参数如下:

$G = 78 \text{ GPa}$ ,	$\nu = 0.231$		
$C = 3.4 \times 10^6 \text{ MPa}$ ,	$\alpha = 4.5 \times 10^4$ ,	$d_c = 1.2$ ,	$\beta_1 = 20$
$C_1 = 0$ ,	$C_2 = 0.23$ ,	$C_3 = 0.32$ ,	$\beta_3 = 20$

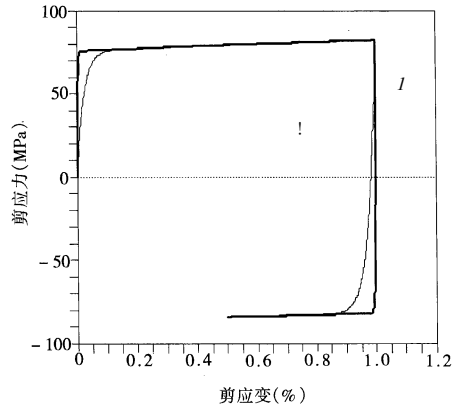


图 3 滑移系的加一卸载与反向加载特性

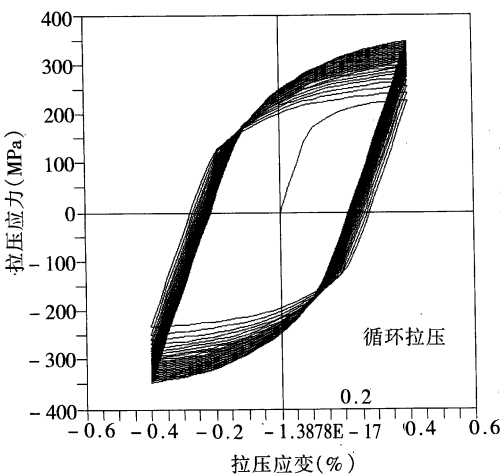


图 4 应变控制对称循环拉压下的材料响应

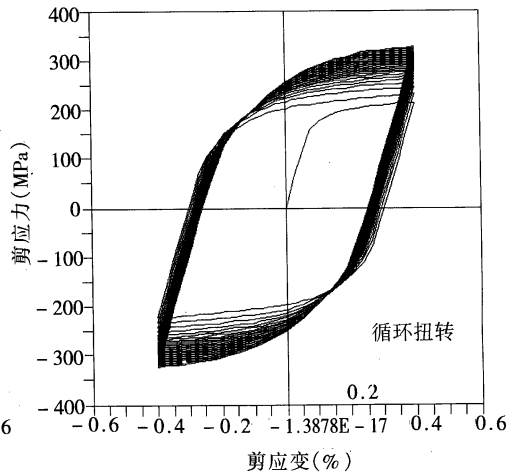


图 5 应变控制对称循环剪切下的材料响应

图 3 是根据上述材料参数计算的剪切加一卸载和反向加载过程中的等效应力—应变曲线 (见粗实线), 图中细实线为当  $C$  和  $\alpha$  分别减少到原值的 10%, 其它参数和加载条件保持不变

时的材料响应。可见当  $\alpha$  充分大时, 材料的响应与采用含屈服判据的滑移模型的响应极为相似。合理地选取  $\alpha$  值, 能在一定程度上描述 Bauchinger 效应。

为了描述材料在拉压—剪切二维应变路径下的应力响应, 定义如下矢量:

$$\bar{\sigma} = \sigma n_1 + \sqrt{3} \tau n_2, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon n_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma n_2 \quad (4.19)$$

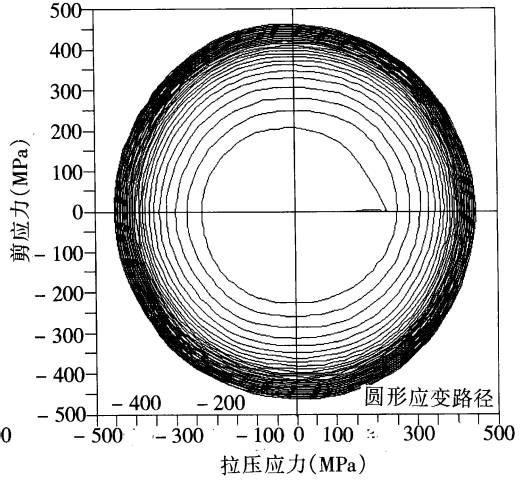
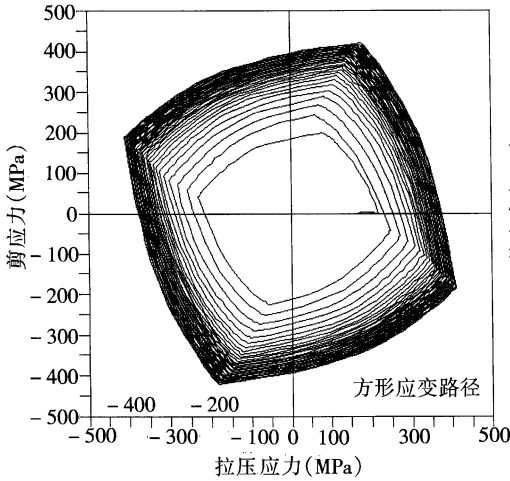


图6 方形应变路径循环时材料二维应力响应      图7 圆形应变路径循环时材料二维应力响应

式中  $\sigma$  和  $\tau$  分别表示正应力和剪应力,  $\epsilon$  和  $\gamma$  分别表示正应变和剪应变,  $n_1$  和  $n_2$  为一组正交的单位基矢。等效应力和应变和多晶体的宏观累积应变分别为

$$\sigma_e = |\bar{\sigma}| = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad \epsilon_e = |\bar{\epsilon}| = \sqrt{\epsilon^2 + \frac{1}{3}\gamma^2}, \quad \zeta = \int |d\bar{\epsilon}| \quad (4.20)$$

图4和图5分别为材料在等效应变幅  $\epsilon_e = 0.4\%$  的对称拉压和剪切循环中的应力响应, 它较好地描述了实验现象<sup>[14]</sup>。比较两种路径下的响应可知采用多晶塑性理论得到的结果除了在滞后回线的形态上存在差别外, 剪切应变循环对应的应力幅值明显地小于拉压应变循环的应力幅值(见图8)。这可归因于两种循环应变下晶体内部滑移状况的差异, 而这种差异不能简单地由 Mises 等效准则精确地加以描述。

在二维复杂循环应变路径下, 通常将循环应变路径的最小外接圆半径定义为等效循环应变幅值  $\epsilon_e$ , 则图6和图7分别为方形和圆形应变路径当  $\epsilon_e = 0.4\%$  的二维应力响应。结果与实验吻合<sup>[14, 15]</sup> 得很好。

与在相同的等效应变幅值下沿比例路径的循环相比, 其应力幅值提高了40%以上(见图8)。在类似问题的现象学分析中, 通常通过定义恰当的非比例度及其相应的非比例硬化将变形路径的非比例特征引入本构描述, 但由于在不可逆变形中材料内部组织结构的变化十分复杂, 人们迄今仍难以较好地描述某些基本的实验现象。在多晶塑性的描述

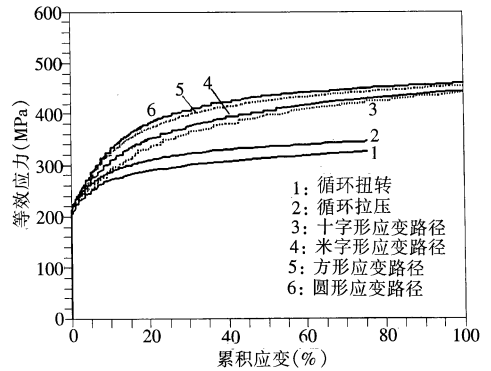


图8 在具有代表的6种循环应变路径下材料的等效应力随累积应变的变化



中,我们未引入任何非比例参数,但通过考虑变形过程中不同滑移系的相互作用(如潜在硬化)即较好地描述了材料在具有代表性的二维应变路径下的响应特性,表明了多晶塑性理论在非比例循环塑性的分析中具有良好的应用前景。图8为恒应变幅( $\varepsilon_a = 0.4\%$ )具有代表性的6种二维应变路径下的等效应力 $\sigma_e$ 随累积应变 $\zeta$ 变化的分析结果。6种路径可大致分为3类<sup>[17]</sup>:比例路径(如拉压、剪切),过原点的幅射状路径(十字形(stellate)、米字形(cruciform)),不过原点的路径(方形(square),圆形(circular))。从图8中可见比例路径下的饱和应力水平较低而第三类路径下的饱和应力水平较高。分析结果与不同研究者的实验结果<sup>[16, 17]</sup>在定性或定量上都吻合得很好。

## § 5. 结 论

考虑到不可逆变形过程中材料微结构能够以残余内应力的方式贮存变形能,这种能量在一定的条件下能以一定的方式被释放并减少滑移所需的外部能量。据此采用由弹簧和塑性阻尼器构成的简单机械模型建立了不采用屈服判据的单晶本构关系,进而形成了与KBW自治理论相应的多晶计算格式。计算格式中无需对滑移系的开动和滑移方向进行搜索,使计算过程大为简化,且有利于保证计算结果的唯一性。在多晶体响应的分析中以由正20面体各面的法向量确定的在空间完全均匀分布的20个方向为基础,提出了一种基于各面内随机取向单晶的高斯积分平均和20个方向上的算术平均的混合平均方案,与通常的纯高斯积分平均方案相比,在计算精度和效率上都有较大提高。用所发展的模型和算法分析了316不锈钢在具有代表性的路径下的循环塑性,得到了与实验相吻合的结果。

## 参 考 文 献

- 1 G. I. Taylor, Plastic strain in metals, J. Inst. Metals, **62** (1938), 307—324.
- 2 R. Hill, Generalized constitutive relations for incremental deformation of metals and crystals multi-ship, J. Mech. Phys. Solids, **14** (1966), 95—102.
- 3 R. Hill and J. R. Rice, Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain, J. Mech. Phys. Solids, **20** (1972), 401—413.
- 4 E. Schmid and W. Boas, Kristallplastizität, Springer-Verlag, Berlin (1950).
- 5 B. Budiansky and T. T. Wu, Theoretical prediction of plastic strain of polycrystals, Proc. 4th US National Congr. Appl. Mech. (1962), 1175—1185.
- 6 J. W. Hutchinson, Elastic-plastic behavior of polycrystalline metals and composites, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, (319) (1970), 247—272.
- 7 G. J. Weng, Kinematic hardening rule in single crystals, Internat. J. Solids Structures, **15** (1979), 861—875.
- 8 G. J. Weng, Dislocation theories of work hardening and yield surfaces of single crystals, Acta Mech., **37**(3,4) (1980), 217—228.
- 9 R. J. Asaro, Crystal plasticity, J. Appl. Mech., **50**(4b) (1983), 921—934.
- 10 J. L. Bassani, Single crystal hardening, Appl. Mech. Rev., **43**(5) (1990), 320—327.
- 11 梁乃刚、刘洪秋、王自强, 基于等效滑与潜在硬化机制的多晶金属亚宏观弹塑性模型, 中国科学(A辑), **25**(8) (1995), 858—866.
- 12 孙守光, 非比例循环加载下的晶体塑性本构理论, 清华大学博士学位论文 (1992).

- 13 X. Peng and J. Fan, A new numerical approach for nonclassical plasticity, *Computers and Structures*, **47**(2) (1993), 313—320
- 14 S. Murakami, M. Kawai, K. Aoki and Y. Ohmi, Temperature dependence of multiaxial nonproportional cyclic behavior of type 316 stainless steel, *J. Engng. Mat. Tech.*, **111**(1) (1989), 32—39.
- 15 Y. Ohashi, E. Tanaka and M. Ooka, Plastic deformation behavior of type 316 stainless steel subjected to out\_of\_phase strain cycles, *J. Engng. Mat. Tech.*, **107**(4) (1985), 286—292
- 16 N. Ohno, Recent topics in constitutive modeling of cyclic plasticity and viscoplasticity, *Appl. Mech. Rev.*, **43**(11) (1990), 283—295
- 17 E. Tanaka, S. Murakami and M. Ooka, Effect of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, **33**(6) (1985), 559—575

## A Nonclassical Constitutive Model for Crystal Plasticity and Its Application

Peng Xianghe    Zeng Xiangguo    Fan Jinghong

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

### Abstract

A nonclassical constitutive description for a slip system is formulated by using a simple mechanical model consisting of a spring and a plastic dashpot-like block. The corresponding constitutive model for a single crystal and the analysis for polycrystalline response is proposed based on the KBW's self-consistent theory. The constitutive model contains no yield criterion, so the corresponding numerical analysis is greatly simplified because it involves no additional process to search for the activation of slip systems and slip direction. A mixed averaging approach is proposed to obtain the response of polycrystalline material, which consists of the Gaussian integral mean for the  $\omega$  which varies continuously within each face of the isosahedron and the arithmetic mean for the spatially uniformly distributed twenty sets of  $\theta$  and  $\phi$  determined by the normal of each face of the isosahedron. The main features 316 stainless steel subjected to typical biaxial nonproportional cyclic strain paths are well described. Calculation also shows that the developed model and the corresponding analytical approach are of good accuracy and efficiency.

**Key words** crystal plasticity, constitutive relation, aggregation model, nonproportional cyclic plasticity