

用广义胞映射研究参数不确定的 多吸引子共存系统*

龚璞林^① 徐健学^①

(刘曾荣推荐; 1997 年 4 月 25 日收到, 1997 年 10 月 15 日收到修改稿)

摘 要

本文运用广义胞映射对具有参数不确定的多吸引子共存系统进行了分析, 指出了参数不确定性对多吸引子共存系统全局特性的影响, 并进一步得到可以通过各个吸引子的保护层厚度大小的比较, 来判断随着不确定程度的增加, 哪一个吸引子将要首先消失。

关键词 广义胞映射 多吸引子共存 参数不确定

中图分类号 O322

§ 1. 引 言

非线性动力系统在简谐激励下, 可能会有多个稳定状态, 每个稳定状态对应于相平面上的具有特定吸引域的一个吸引子, 吸引子可能是不动点、极限环、不变环面、奇怪吸引子等。在实际工程中, 人们仅对其中之一, 对应于安全的、可操作的稳定运行状态感兴趣, 其他的解都不需要。而我们通常所得解大都在假设参数等确定的情况下获得的。实际工程中由于人为或者实验误差等因素, 当建立系统的数理模型时, 对某些参数并不确切地了解, 并且更为重要的是系统周围环境对系统参数变化的影响, 使得模型参数不确定。由于这些参数的不确定性将对假设参数确定下所获得的多吸引子共存系统的全局特性产生很大的影响, 有可能使对应于安全运行的吸引子的吸引域丧失, 从而导致系统以另一个稳态形式运动, 这将使系统不能正常运行, 导致事故。对于参数不确定的非线性系统的理论分析仅限于线性或弱非线性^[1, 2]。直接的数值模拟需要计算轨道的长期行为, 非常花费时间, 广义胞映射做为一种有效的进行非线性系统(包括强非线性系统)全局分析的数值方法, 由 Hsu 提出^[3, 4]。在本文中我们将运用广义胞映射方法对具有参数不确定的多吸引子共存系统进行数值分析。

吸引域被看做吸引子的保护区域首先由 Hsu 和 Chiu(1987) 提出^[5], Thompson 在工程完整安全意义下指出, 当一个吸引子的吸收域受到严重侵蚀时, 即可认为系统为不稳定的^[6], 这就使吸引域具有了重要的工程意义。这将与广义胞映射中保护层厚度这个值相对应, 我们将通过算例分析, 得出可以运用保护层厚度这一量来判断随着参数不确定性的增加, 多吸引子共存系统哪个吸引子将要消失。

* 国家自然科学基金资助项目(19672046)

① 西安交通大学非线性动力学研究所, 西安 710049

§ 2. 关于广义胞映射方法

胞映射的基本思想是把动力系统的状态空间离散化为大量状态胞的集合,用胞映射来描述原系统的动力学行为, Hsu 提出两类胞映射方法, 第一种是简单胞映射 (SCM), 第二种是广义胞映射 (GCM), 广义胞映射与简单胞映射相比, 每个胞可以具有多个象胞. 当一个动力系统用广义胞映射来描述时, 就与一时齐的 Markov 链相对应. 假设所研究的微分动力系统:

$$\dot{x} = f(x, t, \mu), \quad x \in R^n, \mu \in R^m \quad (2.1)$$

可以通过庞加莱截面把原系统离散化为点映射动力系统:

$$x(n+1) = g[x(n), \mu], \quad x \in R^n, \mu \in R^m \quad (2.2)$$

为了从点映射 (2.2) 中构造胞映射, 首先在 R^n 中选取一定的研究范围, 把该选定范围离散化为胞状态空间, 用一个胞来代替胞内所有点, 每个胞在 x_i 方向具有大小为 h_i 的边 ($i = 1, 2, \dots, N$), 从而可以把沿各边的间隔定义为一整数 Z_i , Z_i 满足:

$$(Z_i - 1/2)h_i \leq x_i < (Z_i + 1/2)h_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

每个胞可用一 N 维整数来表示. 假定在每个胞内选取了 M 个相同大小的子胞, 从每个子胞的中点出发, 求其象胞. 假如在胞 Z 的 M 个内点中有 M_1 个映射到 Z_1 胞内, 则 $P_{Z_1 Z} = M_1/M$, 同理有 $P_{Z_i Z} = M_i/M$, $i = 1, 2, \dots, m$, m 是胞 Z 的象胞总数, 并且有 $\sum_{i=1}^m P_{Z_i Z} = 1$. 用 p_{ij} 表示由第 j 个胞转移到第 i 个胞的一步转移概率, p_{ij} 构成转移概率矩阵 P , 用 $p_j(n)$ 表示系统在第 n 步映射中位于胞 j 的概率, $p(n)$ 是以 $P_j(n)$ 为元素的 N 维矢量 (N 为总的胞的个数), 则广义胞映射可用下述等式来描述:

$$p(n+1) = Pp(n) \quad (2.4)$$

系统的大部分性质能够从 (2.4) 中获得.

按照广义胞映射的术语, 如果从胞 Z_j 到胞 Z_i 的 k 步转移概率是正的, 则称胞 Z_j 导致胞 Z_i . 如果胞 Z_j 导致胞 Z_i , 胞 Z_i 也导致胞 Z_j 则称胞 Z_i 与胞 Z_j 相连通. 如果由 (2.1) 定义的系统从胞 Z_i 开始最终返回到胞 Z_i , 则胞 Z_i 为一永久胞, 否则 Z_i 是一瞬态胞. 一些彼此相互连通的永久胞构成了永久族. 永久族对应于系统的长期的稳定运动状态. 瞬态胞按其最终吸引至的吸引子分为单驻处瞬态胞与多驻处瞬态胞. 单驻处瞬态胞构成吸收域, 多驻处瞬态胞构成吸引域分界域. 第 g 个吸引子的吸引域定义为 V_g :

$$V_g = \left\{ Z \mid Dm(Z) = 1, DmG(Z, 1) = g \right\}_g \quad (g = 1, 2, \dots, N_{pg}) \quad (2.5)$$

多驻处胞定义为 V_0 :

$$V_0 = \left\{ Z \mid Dm(Z) > 1 \text{ 或 } \text{ei} \right\} \quad (2.6)$$

其中 $Dm(Z)$ 表示胞 Z 的驻处个数, $DmG(Z, i)$ 表示胞 Z 的第 i 个驻处.

§ 3. 分形的吸引域边界和保护层厚度

动力系统: $\dot{x} = f(x, t, \mu)$, $x \in R^N$, $\mu \in R^M$. 其中 x 为状态变量, μ 为系统参数, \dot{x} 表示对时间 t 的导数. 对于参数 μ 当考虑其不确定性因素时, 把 μ 看做为具有特定概率分布的, 以及均值与方差都已知的随机变量, 当 μ 的均值被给定以后, 方差愈大, 参数的不确定性愈强. 上述系统, 有可能有多个共存的吸引子, 各个吸引子具有不同的吸引域, 此时就存在吸引域的边界, 吸引域边界是不稳定不变集的稳定流形. 通常吸引域边界并非一光滑曲线, 而是分

形的,其维数是一非整数值^[10]。当吸引域边界是分形的,如果初始点有 ε 的误差,则在距离吸引域边界 ε 区域以内的各点的最终运动状态不能被确定地预测。另外由于吸引域边界的位置与结构均依赖于系统的参数,系统的参数不确定性将影响到对一个初始点最终状态的预测。吸引域边界在广义胞映射中对应于多驻处胞,可以通过胞状态空间细化来判断吸引域边界是否为分形的。判断一个运动状态是否稳定传统上可以用Liapunov稳定性判别方法,但是这个方法当吸引域边界是分形的时候,所得结果往往不可靠。并且当吸引域边界是分形的时候,参数的小的随机扰动将会导致吸引子的吸引域受到严重的侵蚀,这将导致工程完整安全意义下的不稳定^[6]。从而当吸引域边界是分形的,并且在实际工程中允许参数 μ 有一定的不确定性,这就要从吸引子是否被吸引域包围来判断其的稳定性,如果一个吸引子的吸引域丧失,则其就变为不稳定的。广义胞映射可以不需要花太多的时间,有效地给出系统的全局图,这是其他方法不能做到的。为了定量刻画吸引子是否被其吸引域保护,我们利用广义胞映射中保护层厚度这个概念,但是为了计算上的快捷,在这里我们对保护层厚度作如下定义: $A_g = \{Z \mid Z \text{ 为第 } g \text{ 个永久族里的胞 } i, d(A_g, V_0) \text{ 表示集合 } A_g \text{ 与多驻处胞集合 } V_0 \text{ 间的距离, } V_0 \text{ 的定义见式(2.6)}\}$ 。胞与胞间的距离以及两个胞集合在胞状态空间中的距离的定义参照[7],则第 g 个永久族的保护层厚度为:

$$d_g = d(A_g, V_0) \quad (g = 1, 2, \dots, N_{pg}) \quad (3.1)$$

我们应用各个吸引子的保护层厚度这个值的大小比较来判断多个吸引子共存系统,哪个吸引子随着参数的不确定程度的增加,将要首先消失。而这种比较是建立在同一胞尺度上的,就二者的定量的大小比较而言,用该值是能够较好地进行描述的。

当参数 μ 为不确定性参数时,随着参数的不确定程度的增加,多吸引子共存系统中某个吸引子的吸引域被吸引域边界穿透,导致吸引域的丧失,从而使该吸引子消失。但到底哪个吸引子将要首先消失,这从理论分析中是无法获得的。在后面的算例中,可以看出保护层厚度小的那个吸引子将要消失。这一结论对一般的多吸引子共存系统,同样是适用的。可见保护层厚度具有重要的实际意义。另外,利用广义胞映射能够获得系统的全局图。通过确定性系统与参数具有不确定的系统的全局相图的比较,能够很直观的得到不确定参数对系统全局特性的影响。

当(2.1)中的参数 μ 具有不确定性时,将其视作为具有特定均值与方差的随机变量。当应用广义胞映射求每个胞的象胞及转移概率矩阵时,用随机数发生器生成 N 个满足给定均值与方差的随机数,假设在每个胞内取 M 个均匀分布的点,对每个胞内的每个样点,都要分别取上述 N 个随机数由(2.2)来获得其映射到的胞,可见对于每个胞有 $M \times N$ 个轨道来确定其一步映射的象胞及转移概率。

3.1 算例 1

以工程常见的Mathieu方程为例,Mathieu方程是一个很具有代表性的参数激励变系数常微分方程,具有复杂的动力学特性,当引入立方非线性后则解的特性变得更为复杂。下面我们就考虑有立方非线性、参数激励与强迫激励同时存在的Mathieu方程:

$$\ddot{x} + 25x^3 + 0.173x + (2.62 - 0.456\alpha + 0.456\alpha\cos 2t)x = 0.92\alpha(1 - \cos 2t) \quad (3.2)$$

首先将其转化为一阶常微分方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -25x_1^3 - 0.173x_2 - (2.62 - 0.456\alpha + 0.456\alpha\cos 2\theta)x_1 + 0.92\alpha(1 - \cos 2\theta) \\ \theta = 1 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

其中 $(x_1, x_2, \theta) \in R^2 \times S^1$.

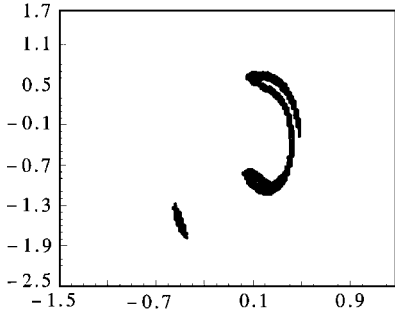


图 1 $\alpha = 3.54$ 时的吸引子

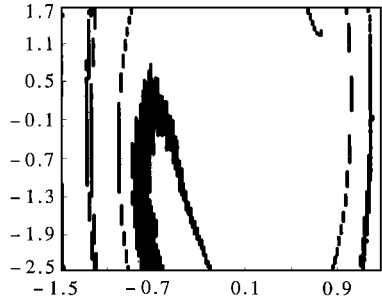


图 2 $\alpha = 3.54$ 时的吸引域边界

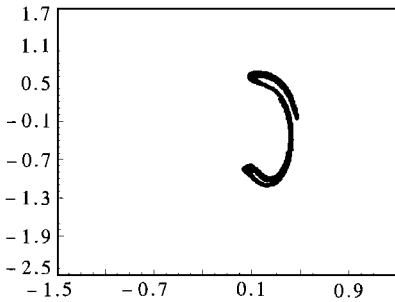


图 3 $\alpha = 3.54$ 细化后的吸引子

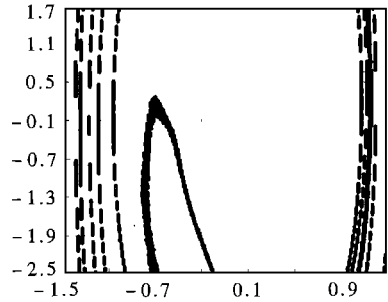


图 4 $\alpha = 3.54$ 细化后的吸引域边界
实际

取一个截面 $\Sigma = \{(x_1, x_2, \theta) \mid \theta = 0\}$, 考虑庞加莱映射 $p: \Sigma \rightarrow \Sigma$. 设 $D = \{-1.5 \leq x < 1.3, -2.5 \leq y < 1.7\}$ 为所感兴趣的区域, 对该区域构造胞映射, 区域以内的为正规胞, 区域以外所有胞看做一个胞称为陷胞. 把 D 区域分为 (150×200) 个胞. 对于参数 α , 我们得到当 $\alpha = 3.54$ 时, 有三个永久族, 其中 PG_0 代表区域以外的陷胞, 可见在区域 D 内系统(3.2) 具有两个共存的吸引子, 两个吸引子见图 1, 吸引域边界见图 2.

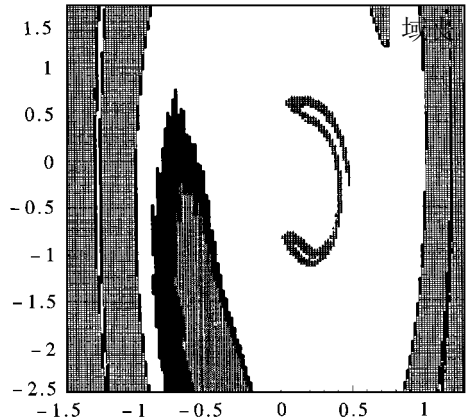


图 5 $\alpha = 3.54$ 的全局图(\square 吸引至陷胞, \diamond p_1 的吸引域, 空白部分为奇怪吸引子的吸引域, \bullet 吸引域边界, \blacktriangle 两个共存的吸引子)

当对胞状态空间细化以后, 得到两个吸引子见图 3, 吸引域边界见图 4.

从图 1 与图 3 的比较中可见, 当对胞状态空间细化后, PG_1 所对应的吸引子在状态空间中所占面积大为减少, 但是 PG_2 所对应的吸引子在状态空间中所占面积变化并不是太大, 细化后的 PG_2 图比细化前更好地表示了吸引子的细微结构. 据广义胞映射的有关理论可见 PG_1 代表 p_1 解, 它对应原系统(2.6) 的以 π 为周期的周期运动, PG_2 代表一奇怪吸引子. 从图 2 与图 4 的比较可见吸引域的边界变化不是太大, 可见吸引域边界是分形的. 单驻处胞构成吸引域, 多驻

处胞构成吸引域边界, $(-1.5, 0.9) \times (-2.5 \times 1.7)$ 间的全局图可见图 5。

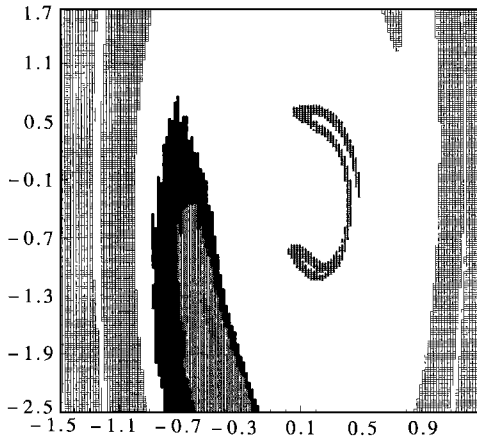


图 6 $E(\alpha) = 3.54, \sigma(\alpha) = 0.001$ 的全局图
(\square 吸引至陷胞, \diamond p_1 的吸引域, 空白部分为奇怪吸引子的吸引域, \bullet 吸引域边界, \blacktriangle 两个共存的吸引子)

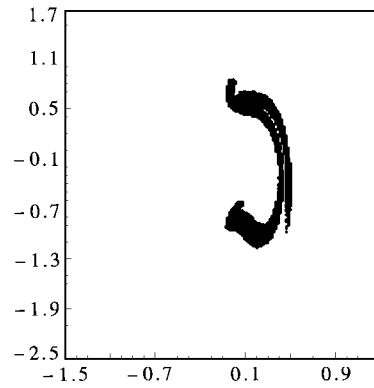


图 7 $E(\alpha) = 3.54, \sigma(\alpha) = 0.018$ 时的吸引子图

据本节所述的保护层厚度这个概念, 我们得到在没有参数不确定时, $\alpha = 3.54$ 的确定性系统(3.2) p_1 吸引子的保护层厚度为 $d_1 = 4$, 奇怪吸引子的保护层厚度为 $d_2 = 25$, $d_1 < d_2$ 。

该系统当参数具有不确定性时, 可以把不确定参数 α 看作与时间无关的具有特定均值与方差的随机变量。对于每个胞, 我们取 9 个均匀分布的内点, 用随机数发生器生成 8 个满足上述均值与方差的随机数。对于每个胞内的每个内点, (3.3) 式 α 分别取所生成的 8 个随机数, 运用四阶龙格—库塔方法从该内点出发积分一个周期 π , 求每个点一步映射所得到的胞映射到的胞, 从而在庞加莱截面上确定每个胞的象胞及转移概率, 则对每个胞有 72 个轨道出发来确定其象胞。为了与 $\alpha = 3.54$ 的确定性系统相比较, 可做其 $E(\alpha) = 3.54, \sigma(\alpha) = 0.001$ 的全局图如图 6 所示, 并求得 p_1 解的保护层厚度 $d_1 = 3$, 奇怪吸引子保护层厚度 $d_2 = 23$ 。当参数的不确定程度增加一些, 也就是说对于 $\sigma(\alpha)$ 再增加一些, 取 $\sigma(\alpha) = 0.018$, 此时只有一个奇怪吸引子, 如图 7 所示。

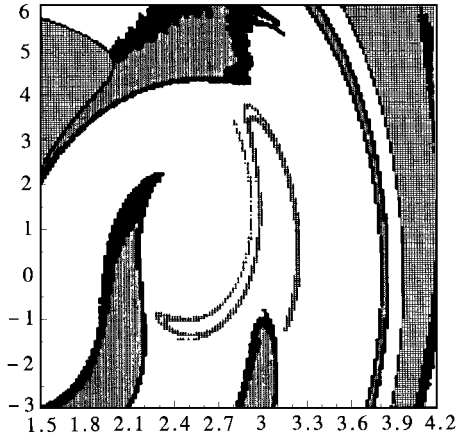


图 8 $\alpha = 0.021$ 时的全局图(\square 吸引至陷胞, \diamond p_3 的吸引域, 空白部分为奇怪吸引子的吸引域, \bullet 吸引域边界, \blacktriangle 两个共存的吸引子)

通过以上的计算结果, 和各种情况的图例比较, 可见参数不确定性程度增大到一定程度, 对应于确定性系统保护层厚度值小的那个吸引子 p_1 解的吸引域丧失, 吸引子 p_1 消失。并且还可以看到当参数具有不确定性时, 多驻处胞将增多, 多驻处胞对应于系统的吸引域边界,

由于吸引域边界是分形的,多驻胞所对应的点具有最终状态的敏感性。可见参数的不确定性,是多驻处胞增多,吸引域分界线所占面积增大,从而增加了系统的不可预测性。并且可见随着不确定程度的增加,永久族所占面积变宽了一些。

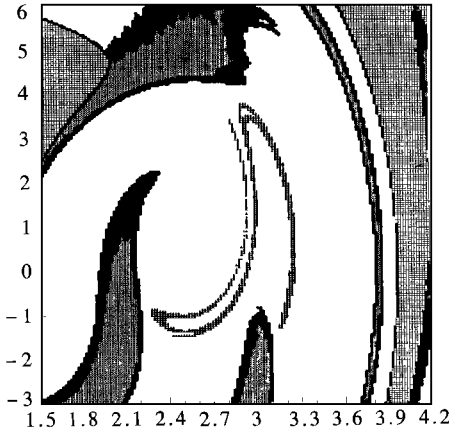


图9 $E(\alpha) = 0.021, \sigma(\alpha) = 0.003$ 的全局图
(□ 吸引至陷胞, ◇ p_3 的吸引域, 空白部分为奇怪吸引子的吸引域, ● 吸引域边界, ▲ 两个共存的吸引子)

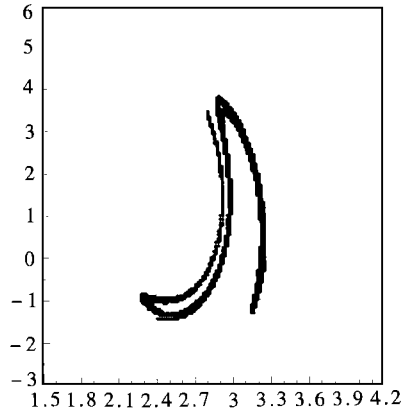


图10 $E(\alpha) = 0.021, \sigma(\alpha) = 0.018$ 时的吸引子图

3.2 算例2

以简谐激励的 Duffing 方程为例:

$$\ddot{x} + kx + \alpha + x^3 = b \cos t \quad (3.4)$$

将(3.4)式转化为一阶常微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_2 - \alpha x_1 - x_1^3 + b \cos t \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

该系统当 $k = 0.25, b = 8.5$ 时,在[5]中作者指出当 $\alpha \leq -0.11$ 时,只有 p_3 解,当 $-0.11 < \alpha \leq 0.053$ 时, p_3 解与奇怪吸引子共存,并且吸引域边界是分形的。当 $\alpha > 0.053$ 时,只有奇怪吸引子。在[9]中,作者考虑了随机激励对该系统的影响。在本文中我们假设 α 具有一定的不确定性,同上例一样,把 α 看作与时间无关的,有特定均值与方差的随机变量。

首先取 $\alpha = 0.021$,假设没有不确定性,此时共有两个吸引子共存,一个是 p_3 解,一个是奇怪吸引子,系统的全局吸引图,如图8所示。并且通过计算得到 p_3 解的保护层厚度为 $d_1 = 2$,奇怪吸引子的保护层厚度为 $d_2 = 4, d_1 < d_2$ 。

接着考虑参数 α 有不确定性时的情形。对于每个胞,我们取9个均匀分布的内点,用随机数发生器生成9个满足给定均值与方差的随机数。对于每个胞内的每个内点,(3.5)式 α 分

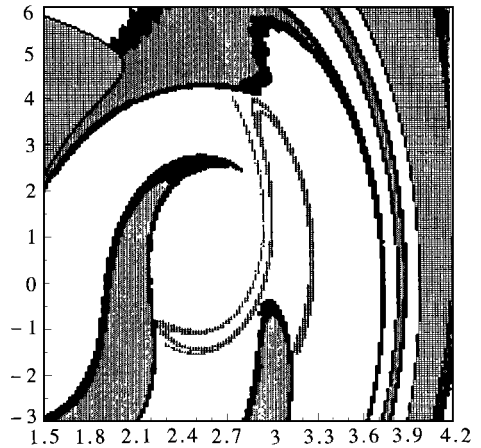


图11 $\alpha = 0.052$ 时的全局图(□ 吸引至陷胞, ◇ p_3 的吸引域, 空白部分为奇怪吸引子的吸引域, ● 吸引域边界, ▲ 两个共存的吸引子)

别取所生成的 9 个随机数。运用四阶龙格—库塔方法积分一个周期 2π , 求每个点所映射到的胞, 从而在庞加莱截面上确定每个胞的象胞及转移概率, 则对每个胞有 81 个轨道出发来确定其象胞。首先取 $E(\alpha) = 0.021$, $\sigma(\alpha) = 0.003$, 得到此时当 α 具有满足该条件的不确定性时, 系统全局图如图 9 所示。

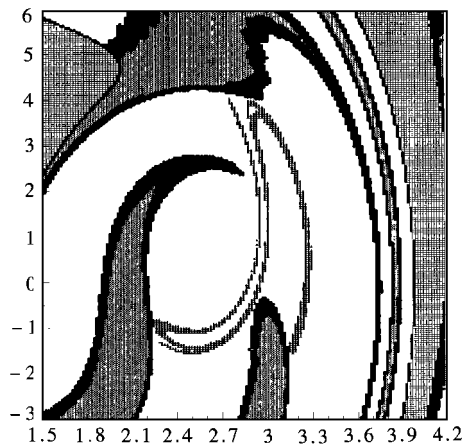


图 12 $E(\alpha) = 0.052$, $\sigma(\alpha) = 0.01$ 的全局图
(□ 吸引至陷胞, ◇ p_3 的吸引域, 空白部分为奇怪吸引子的吸引域, ● 吸引域边界, ▲ 两个共存的吸引子)

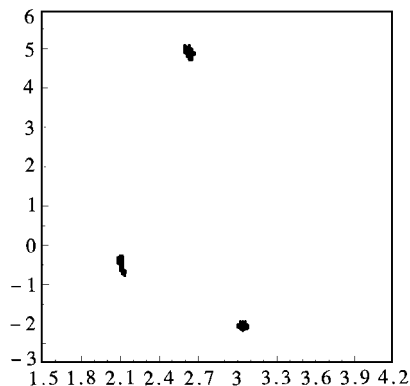


图 13 $E(\alpha) = 0.052$, $\sigma(\alpha) = 0.07$ 时的吸引子图

此时, p_3 解的保护层厚度为 $d_1 = 1$, 奇怪吸引子的保护层厚度为 $d_2 = 3$ 。当参数不确定程度增加时, $\sigma(\alpha) = 0.018$ 时, 仅存在一个吸引子, 如图 10 所示。

从上面对 $\alpha = 0.021$ 时的确定性系统以及当均值为 0.021, 方差为 0.003 时所作全局图 8 与图 9 的比较, 3.1 例中所得结论同样成立, 并且再一次验证了当参数的不确定程度增加到一定值时, 对应于确定性系统保护层厚度值小的那个吸引子将要首先消失。

当 $\alpha = 0.052$ 时, 参数没有不确定时, 仍有一个 p_3 解, 一个是奇怪吸引子, 系统的全局图如图 11 所示。

其中 p_3 解的保护层厚度为 $d_1 = 5$, 奇怪吸引子的保护层厚度为 $d_2 = 2$, $d_1 > d_2$ 。

当 $E(\alpha) = 0.052$, $\sigma(\alpha) = 0.01$ 时, 其全局相图见图 12 所示。并且可以计算得到, 在这种情形下, p_3 解的保护层厚度为 $d_1 = 4$, 奇怪吸引子的保护层厚度为 $d_2 = 1$, 当方差进一步增加到 $\sigma(\alpha) = 0.07$ 时, 此时只有一个 p_3 解, 见图 13 所示。

在这种情况下, 再一次验证了前面所得的有关结论, 并且不确定性程度增大一定程度, p_3 解首先消失。

§ 4. 结 论

我们运用广义胞映射方法研究了两个在工程中很有代表意义的, 具有参数不确定性的多吸引子共存动力系统, 可以看到胞映射不需要做太多的理论分析, 能够有效地给出系统的全局图。我们引入了保护层厚度这一量, 通过各个吸引子保护层厚度的大小比较, 这种比较是建立在同一胞尺度上的, 得到对于具有参数不确定性的多吸引子共存系统, 保护层厚度值小的那个

吸引子随着参数不确定性的增加将要首先消失,可见保护层厚度值可以做为一个量来判断当系统具有不确定参数时哪个吸引子将要首先消失。并且通过以上算例中的确定性多吸引子共存系统与参数不确定多吸引子共存系统的全局相图比较可见,参数具有不确定性将使代表分形吸引域分界域的多驻处胞增加,由于分形吸引域边界内各点最终状态是不可预测的,可见参数的不确定性增加了多吸引子共存系统的不可预测性,并且吸引域也有所变化。

参 考 文 献

- 1 R. Valery Roy Noise, Perturbations of a non_linear system with multiple steady states, Internat. J. Non Linear Mech., **29**(5) (1994), 755—773•
- 2 R Singh and C. Lee, Frequency reponse of linear systems with parameter uncertainties, J. Sound Vibration, **168** (1993), 71—92•
- 3 C. S. Hsu, A generalized theory of cell_to_cell mapping for nonlinear dynamical systems, J. Applied Mechanics, **48** (1981), 634—642•
- 4 C. S. Hsu, Cell_to_Cell Mapping, A Method of Global Analysis for Non linear Systems, Springer_Verlag, New York (1987)•
- 5 C. S. Hsu and H. M. Chiu, Global analysis of a system with multiple responses including a strange attractors, J. Sound Vibration, **114** (1987), 203—218•
- 6 Mohamed S. Soliman and J. M. T. Thompson, Global dynamics underlying sharp basin erosion in nonlinear driven oscillators, Physical Review A, **45**(6) (1992), 3425—3431•
- 7 C. S. Hsu, Global analysis by cell mapping, International Journal of Bifurcation and Chaos, **2** (4) (1992), 727—771•
- 8 Wilfred D. Iwan and Ching_Tung Huang, On the dynamic response of non_linear systems with parameter uncertainties, Internat. J Non Linear Mech., **31**(5) (1996), 631—645•
- 9 J. Q. Sun and C. S. Hsu, Effects of small random uncertainties on non_linear systems studied by the generalized cell mapping method, J. Sound Vibration, **147**(2) (1991), 185—201•
- 10 Steven W. Mcdonald, Celso Grebogi, Edward Ott and James A. Yorke, Fractal basin boundary, Physica D., **17** (1985), 125—153•

On the Multiple Attractor Coexisting System with Parameter Uncertainties Using Generalized Cell Mapping Method

Gong Pulin Xu Jianxue

(Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract

In this paper the generalized cell mapping(GCM) method is used to study multiple attractor coexisting system with parameter uncertainties. The effects that the uncertain parameters has on the global properties of the system are presented. And It is obtained that the attractor with much smaller value of protect thickness will disappear firstly with the degree of the uncertainty of parameter increasing.

Key words generalized cell mapping, multiple attractor coexisting system, parameter uncertainties