

随机调幅 Rattling 系统建模*

冯 奇

同济大学力学系, 上海 200092

(张景绘推荐)

摘要: 本文研究了一个随机调幅 Rattling 系统, 代替常用的数值分析方法, 采用非高斯截断技术, 导出一个由三维平均映射描述的离散的随机模型。实测指出该模型能揭示混沌随机性质, 故更适于用以模拟齿轮箱噪声源。

关键词: Rattling 系统; 非高斯截断技术; 混沌随机振动; 平均映射

分类号: O32 **文献标识码:** A

引 言

Rattling 是发生在齿轮传动过程中, 一种不期望出现的振动现象。近年来, 已发展了许多模型用于解释这种现象^[1~4]。其中, 一种较新的模型是将由温度及制造误差引起的齿间隙作为非线性单元, 即“play”单元考虑。基于这种假设, 1988 年, Pfeiffer 建立了一个离散的 Rattling 模型, 该模型指出了混沌性质^[5]。随后, 他及他的学生又将随机模型引入分析中^[6]。但他们仅考虑迭加噪声的情况, 并仅研究概率密度。事实上, 由于 Rattling 振动的激励是由主动轮的摆动引起的, 摆幅具有一定的随机性, 因此, 随机调幅情况也可能发生。此外, 由于 Rattling 振动是产生齿轮箱噪声的声源, 在作声学测量中感兴趣的物理量是平均值^[7], 所以本文的目的旨在建立以均值表示的随机调幅的数学力学模型, 用以模拟齿轮箱噪声源。研究结果表明, 上述模型具有混沌随机性质。

混沌随机运动的概念是由 Kapitaniak 在 1988 年提出的^[8], 但他的研究是基于有限次数值仿真的平均结果, 每获一个采样集合, 往往需要进行 200 次的上仿真, 耗费的计算机时间是大量的, 这在工业中执行是非常不经济的。本文中, 避免了冗长的数值计算, 应用非高斯截断技术, 导出一个三维平均映射, 用于描述随机调幅 Rattling 振动。为了与确定性模型^[5]作一比较, 本文中采用与此相同的数据进行调查。调查结果表明, 随机模型指出混沌随机性质, 并由均值描述更符合实际情况, 因此, 更适于用以模拟齿轮箱噪声源。

1 数学力学模型的建立

1.1 确定性模型

为了发展随机模型, 有必要简短地回顾确定性模型。离散的确定性模型是由 Pfeiffer 在

* 收稿日期: 1997_04- 25; 修订日期: 1998_10_03

作者简介: 冯奇(1946~), 女, 教授, 著有《工程中的混沌振动》等专著

1988年建立的^[5]。他假设在轻载或空载情况下,由于主动轮的带动,从动轮在齿间隙中作自由运动,在齿与齿接触边界作理想碰撞,故从动轮的运动可分为二相,并假设正规化齿间隙为1,则有

$$\begin{aligned} \text{在自由相: } & x \in (-0.5, 0.5), \\ & \dot{x} = y, \dot{y} = -\beta y + \gamma + \alpha_m (\sin \tau + \beta \cos \tau) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \text{在接触相: } & x \in \left\{ -0.5, 0.5 \right\}, \quad \text{动;} \\ & y^+ = -\varepsilon y^- \end{aligned} \quad (1.2)$$

在上述方程中, x 和 y 分别表示相对位移和相对速度, β 为阻尼系数, γ 为滞后常力矩, 上标 \pm 表示碰撞前后, ε 为碰撞系数, α_m 为非激励幅值。

上述模型精确解已获得^[5], 但这模型仅仅描述了理想化情况, 在实际问题中随机性是客观存在的。其一, 在轻载或空载情况, Rattling 振动的激励是由主动轮摆动引起的, 它的摆幅有一定的随机性; 其二, 我们测得的齿间隙仅仅是一平均值, 它有一定的误差, 基于上述观点, 下面考虑一个随机调幅模型。

1.2 随机调幅模型

假设外激励幅值 α 由二部分组成: 确定性部分和随机部分, $\alpha = \alpha_m + \varepsilon \eta(\tau)$; $\eta(\tau)$ 是理想的噪声, 它满足下述条件:

$$E[\eta(\tau)] = 0 \quad \text{和} \quad E[\eta(\tau)\eta(s)] = \delta(\tau - s)$$

ε 为噪声强度; 并假设齿间隙也有两部分组成: 平均值和测量误差, 正则化后齿间隙为 $1 + 2d$, 设 d 为一均值为零的随机变量, 最大值为 d_m 。由此, 修正后的运动方程可写为:

$$\begin{aligned} \text{在自由相, } & x_\varepsilon \in (- (0.5 + d), (0.5 + d)), \\ & \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, \dot{y}_\varepsilon = -\beta y_\varepsilon + \gamma + (\alpha_m + \varepsilon \eta(\tau)) (\sin \tau + \beta \cos \tau), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{用脚标 } \varepsilon & \text{ 表示接触相, } x_\varepsilon \in \left\{ - (0.5 + d), (0.5 + d) \right\}, \\ & y_\varepsilon^+ = -\varepsilon y_\varepsilon^-, \end{aligned} \quad (1.4)$$

脚标 ε 表示被扰系统, 与未扰系统以示区别。

方程(1.3)虽然是一个非线性方程, 但由于无高次项存在, 有可能解耦。我们假设噪声强度不大, 此时随机模型是对确定性模型的一种修正, 因此, 方程(1.3)和(1.4)的解可以改写成如下形式, 即

$$x_\varepsilon = x + \xi, \quad y_\varepsilon = y + \zeta \quad \text{且} \quad |x| \leq 0.5, \quad (1.5)$$

(1.5)式中 ξ, ζ 为随机变量, x, y 为未扰系统(1.1)和(1.2)的解, 它们满足方程(1.1)和(1.2)。将方程(1.5)代入(1.3), 减去方程(1.1), 得

$$\begin{aligned} \text{在自由相, } & \xi \in (- (0.5 + d) - x, (0.5 + d) - x), \\ & \dot{\xi} = \zeta, \dot{\zeta} = -\beta \zeta + \varepsilon (\sin \tau + \beta \cos \tau) \eta(\tau). \end{aligned} \quad (1.6)$$

于是自由相分解成确定性部分(1.1)和随机部分(1.6), 为了使接触相也分解成与自由相匹配的两部分, 首先对方程(1.4)取平均, 则

$$y^+ + E[\zeta^+] = -\varepsilon (y^- + E[\zeta^-]), \quad E[x_\varepsilon] = x \in \left\{ -0.5, 0.5 \right\} \text{ re}$$

上式中 $E[\zeta]$ 为方程(1.6)的一阶矩方程解, 由

$$E[\dot{\xi}] = E[\zeta], \quad E[\dot{\zeta}] = -\beta E[\zeta],$$

可解得 $E[\zeta] = E[\zeta_0] e^{-\beta \Delta \tau}$, 当初值 $E[\zeta_0] = 0$ 时, $E[\zeta] = 0$, 则

$$y^+ = -\varepsilon y^-, \quad x \in \left\{ -0.5, 0.5 \right\},$$

这个方程与方程(1.2)完全相同,由此可知确定性模型的碰撞条件是随机模型的碰撞条件的平均模型。因此,将关系(1.5)代入(1.4),减去方程(1.2),得

$$\begin{aligned} \text{在接触相, } & \xi \in \left\{ - (0.5 + d) - x, (0.5 + d) - x \right\}, \\ & \zeta^+ = - \xi^-, \end{aligned} \quad (1.7)$$

确定性部分(1.1)和(1.2)的解 x, y 可精确地求得。积分(1.1)式,并将(1.2)作为初值代入,我们可得碰撞前映射 $H: X_k^- \rightarrow X_{k+1}^-$, 在此 X 为状态矢量 $X = [x, y]^T$, 有迭代算子

$$\begin{aligned} x_{k+1}^- &= x_k^- + \alpha_m (\sin \tau_{k+1} - \sin \tau_k) + \\ & \beta^{-1} [1 - \exp(-\beta \Delta \tau_k)] [-\gamma_k^- - \alpha_m \cos \tau_k - \gamma \beta^{-1} + \gamma \beta^{-1} \Delta \tau_k], \\ y_{k+1}^- &= \alpha_m \cos \tau_{k+1} + \left[-\gamma_k^- - \alpha_m \cos \tau_k - \gamma \beta^{-1} \right] \exp(-\beta \Delta \tau_k) + \gamma \beta^{-1}, \end{aligned} \quad \text{为} \quad (1.8)$$

在上述算子中,相继两次碰撞间时差 $\Delta \tau_k$ 暂时未定。

随机部分是由方程(1.6)和(1.7)组成。自由相方程(1.6)是一个随机非线性方程,它的精确解得不到。由于方程(1.6)的非线性是由于缺少恢复力项引起的,因此,随机变量 ξ 和 ζ 由矩方程求得的 λ_{11} 可能大于 $\alpha_\xi \alpha_\zeta$, 故该系统不满足高斯分布规律。为了求得方程(1.6)的解,在此应用非高斯截断技术。本文取 Edgeworth^[9] 展开式逼近真实的分布,二维 Edgeworth 展开式如下:

$$\begin{aligned} P^*(\xi, \zeta) &= P(\xi, \zeta) \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} H_n \left(\frac{\xi}{\alpha_\xi} \right) H_n \left(\frac{\zeta}{\alpha_\zeta} \right) + \sum_{j+l=3}^N \frac{\lambda_{jl}}{j!l!} \frac{1}{\alpha_\xi^j \alpha_\zeta^l} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} H_{n+j} \left(\frac{\xi}{\alpha_\xi} \right) H_{n+l} \left(\frac{\zeta}{\alpha_\zeta} \right) \right. \\ \text{上式} & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j+l=3}^N \frac{1}{j!l!r!s!} \frac{\lambda_{jlrs}}{\alpha_\xi^j \alpha_\zeta^l} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} H_{n+j+r} \left(\frac{\xi}{\alpha_\xi} \right) H_{n+l+s} \left(\frac{\zeta}{\alpha_\zeta} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

在上面公式中, $\lambda_{np} = E[\xi^n \zeta^p]$, 相关系数 $\alpha_{\xi\zeta} = \lambda_{11} / \alpha_\xi \alpha_\zeta$ 。多项式 $H_k(z)$ 有如下形式

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = z, \quad H_2(z) = z^2 - 1, \quad H_3(z) = z^3 - 3z, \dots$$

在此, $P(\xi, \zeta)$ 表示标准高斯分布

$$P(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi\alpha_\xi\alpha_\zeta} \exp\left[-\frac{(\xi - m_\xi)^2}{2\alpha_\xi^2}\right] \exp\left[-\frac{(\zeta - m_\zeta)^2}{2\alpha_\zeta^2}\right], \quad 1 \quad (1.10) \quad R$$

m_ξ, m_ζ 是均值, α_ξ 和 α_ζ 是标准离差。

Edgeworth 展开式(1.9)中系数 λ_{np} 由相应的矩方程解得,在自由相,

$$\lambda_{np} = E \left[\zeta \frac{\partial \lambda_{np}}{\partial \xi} \right] - \beta E \left[\zeta \frac{\partial \lambda_{np}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 [1 - \cos 2(\tau + \alpha_0)] \right] E \left[\frac{\partial^2 \lambda_{np}}{\partial \xi^2} \right], \quad (1.11)$$

其中, $\varepsilon_0 = \varepsilon \sqrt{1 + \beta^2}$, $\alpha_0 = \arctan(-\beta)$,

$$\text{在接触相, } \lambda_{np}^+ = -\varepsilon \lambda_{np}^- \quad (p \neq 0), \quad \lambda_{np}^+ = \lambda_{np}^- \quad (p = 0). \quad (1.12)$$

积分(1.11)式,代入碰撞条件(1.12),可得离散的各阶矩表达式。代入初始条件 $[\lambda_{np}]_0 = 0$, 则所有奇阶矩为零,偶阶矩如下:

$$\begin{aligned} [\lambda_{02}]_{k+1} &= a_2 \exp(-2\beta \Delta \tau_k) + a_{00} + a_{01} \sin 2\tau_{k+1} + a_{02} \cos 2\tau_{k+1}, \\ [\lambda_{11}]_{k+1} &= b_1 \exp(-\beta \Delta \tau_k) + b_2 \exp(-2\beta \Delta \tau_k) + b_{01} \sin 2\tau_{k+1} + b_{02} \cos 2\tau_{k+1}, \\ & \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \end{aligned}$$

其中, $a_2 = - \left\{ E[\lambda_{02}]_k + \varepsilon_0^2 (1 + \beta^2) / (2\beta) + 0.5 \varepsilon_0^2 \sin 2(\tau_k + \alpha_0) \right\}$;

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0^2(1 + \beta^2)}{2\beta}; \quad a_{01} = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \cos 2\alpha_0; \quad a_{02} = 0.5 \varepsilon_0^2 \sin 2\alpha_0;$$

... ..

我们改写概率分布(1.9), 得到在时间间隔 $\Delta \tau_k$ 中的简单表达式

$$P_k^*(\xi, \zeta) = P_k(\xi, \zeta) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [a_{ij}]_k H_i \left(\frac{\xi}{\sigma_\xi} \right) H_j \left(\frac{\zeta}{\sigma_\zeta} \right), \quad (1.13)$$

系数 a_{ij} 是 λ_{ip} 的函数。

$$[a_{01}]_{k+1} = 0; \quad [a_{11}]_{k+1} = |\lambda_{11}| / \sigma_\xi \sigma_\zeta = \rho_{k+1}; \quad [a_{21}]_{k+1} = |\lambda_{21}| / 2\sigma_\xi^2 \sigma_\zeta; \dots$$

积分(1.13)式, 可求得在每个时间段 $\Delta \tau_k$ 中的随机变量 ξ 和 ζ 的均值。

$$E[\xi]_{k+1} = \int_{-(0.5 + d_m + x_k)}^{0.5 + d_m - x_k} \xi \left(\int_{-\infty}^{\infty} P_k^*(\xi, \zeta) d\zeta \right) d\xi = \sigma_\xi A_k,$$

$$E[\zeta]_k = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta \left(\int_{-(0.5 + d_m + x_k)}^{0.5 + d_m - x_k} P_k^*(\xi, \zeta) d\xi \right) d\zeta = \sigma_\zeta B_k, \quad (1.14)$$

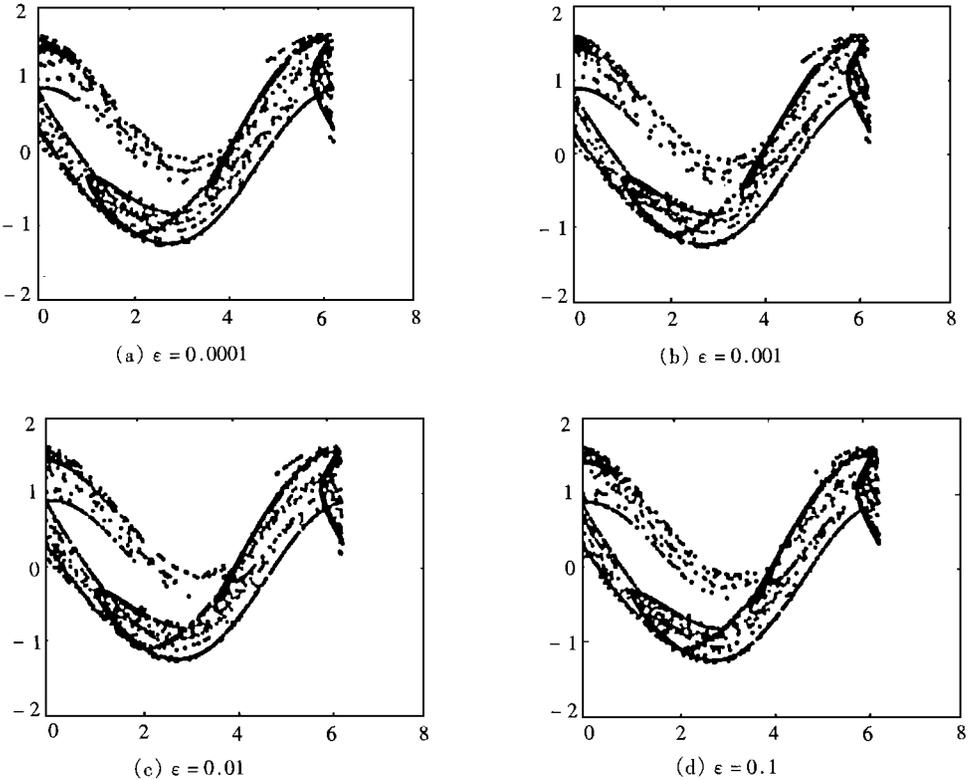


图 1 平均 Poincaré 图(DAT11 随机模型)

在此, $A_k = \psi_0 + [a_{30}]_k \psi_3 + [a_{40}]_k (\psi_4 - 2\psi_2 + \psi_0) + \dots,$

$$B_k = \sum_{i=0}^{\infty} [a_{i1}]_k m_i,$$

$$\psi_i = d_1^i \exp\left[-\frac{d_1^2}{2}\right] - d_2^i \exp\left[-\frac{d_2^2}{2}\right], \quad d_{1,2} = \frac{\pm(0.5 + d_m) - x_k}{[\sigma_\xi]_k},$$

$$m_0 = \text{erf}(d_1) - \text{erf}(d_2); \quad m_1 = \psi_0; \quad m_2 = \psi_1; \quad m_3 = \psi_2 - \psi_0;$$

$$m_4 = \psi_3 - 3\psi_0; \quad m_5 = \psi_4 - 6\psi_2 + 3\psi_0; \quad m_6 = \psi_5 - 10\psi_3 + 15\psi_1.$$

在采用非高斯截断技术时, 一般情况, 由于矩方程中存在高于 $n + p$ 阶矩, 各阶矩不可能唯一地解得, 存在截断误差, 因此, 当 N 增加时, 统计值的精度有可能降低^[10]. 而对于我们研究的问题, 矩方程(1.11) 中不含有高于 $n + p$ 阶矩项, 各阶矩可以唯一地求得, 因此采用非高斯截断技术时可取得较好的精度, 当 N 足够大时, (1.14) 式的精度可以保证.

考虑碰撞前情况, 作平均映射 $H_m: E[X_\varepsilon]_{k-1} \rightarrow E[X_t]_{k+1}$, 在此 $X_\varepsilon = [x \ \vartheta \ \varepsilon]^T$, 叠加确定性部分和随机部分的算子, 得离散模型(1.15)

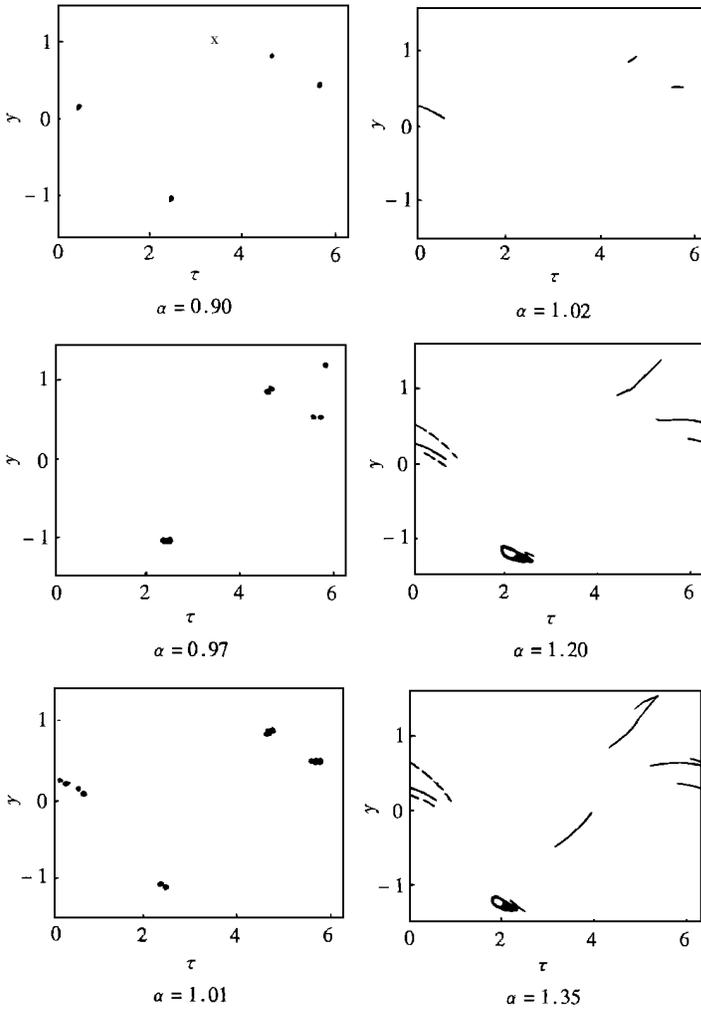


图2 Poincaré 图(DAT11 确定性模型)

$$\begin{aligned} E[x_\varepsilon]_{k+1} &= x_{k+1} + \alpha_s A_{k+1}^-, \\ E[y_\varepsilon]_{k+1} &= y_{k+1} + \alpha_s B_{k+1}^- = \left(-\mathcal{E}E[y_t]_{k-1} - \alpha_m \cos \tau_k - \gamma/\beta \exp(-\beta \Delta \tau_k) + \right. \\ &\quad \left. \gamma/\beta + \alpha_m \cos \tau_{k+1} + [B_{k+1}^- + \mathcal{B}_k^- \exp(-\beta \Delta \tau_k)] \alpha_s \right), \\ \tau_{k+1} &= \tau_k + \Delta \tau_k \pmod{2\pi} \end{aligned} \tag{1.15}$$

上式中, α_s, α_c 为 $\tau \rightarrow \infty$ 时, 矩方程(1.11) 的解, 时差 $\Delta \tau_k$ 可由齿轮啮合条件 $E[x_\varepsilon]_{k+1} =$

$E[x_\varepsilon]_k$ 或反向啮合条件 $E[x_\varepsilon]_{k+1} = -E[x_\varepsilon]_k$ 得到。

随机离散模型(1.15)和确定性离散模型(1.8)比较,多了修正项 αA_k 和 αB_k , 修正项的意义将在下一节中讨论。

2 结果和讨论

为了和确定性模型作比较,选择与文献[6]中相同数据,本文中仅列出有代表性的结果。当我们采用文献[6]中数据 DAT11 时, $\alpha_m = 0.70$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.15$ 及 $\varepsilon = 0.7$, 并考虑仅向啮合情况。图1给出平均 Poincaré 图,纵标是量纲一的平均速度,横标是量纲一的时差 ΔT_k , 噪声强度分别取 0.0001, 0.001, 0.01 和 0.1。在图中可以看出在不大的噪声扰动下, Poincaré 集合显示出奇怪吸引子结构,而在对应的确定性模型的 Poincaré 图中显示出完全不同的结构(见图2),对应 $\alpha = 0.90 \sim 0.101$, Poincaré 集合显示出周期吸引子结构。离散模型是用以描述齿轮箱噪声源,浑沌解更接近实际的齿轮箱产生的噪声,因此随机模型更接近真实情况。模拟噪声源的目的是为控制噪声,随机模型的优点在于发现可以用外噪声抑制齿轮箱噪声。图3给出平均速度的功率谱,纵标表示量纲一的平均速度的谱密度,横标表示量纲一的频率,图3显示出窄带连续谱性质。在图3中发现功率谱密度不随调幅噪声强度增加而增加。在图3(b), $\varepsilon_0 = 0.001$, 谱带较宽,峰值较低,意味着噪音不太刺耳,这事实指出,我们可以通过叠加调制噪声抑制齿轮箱噪声。

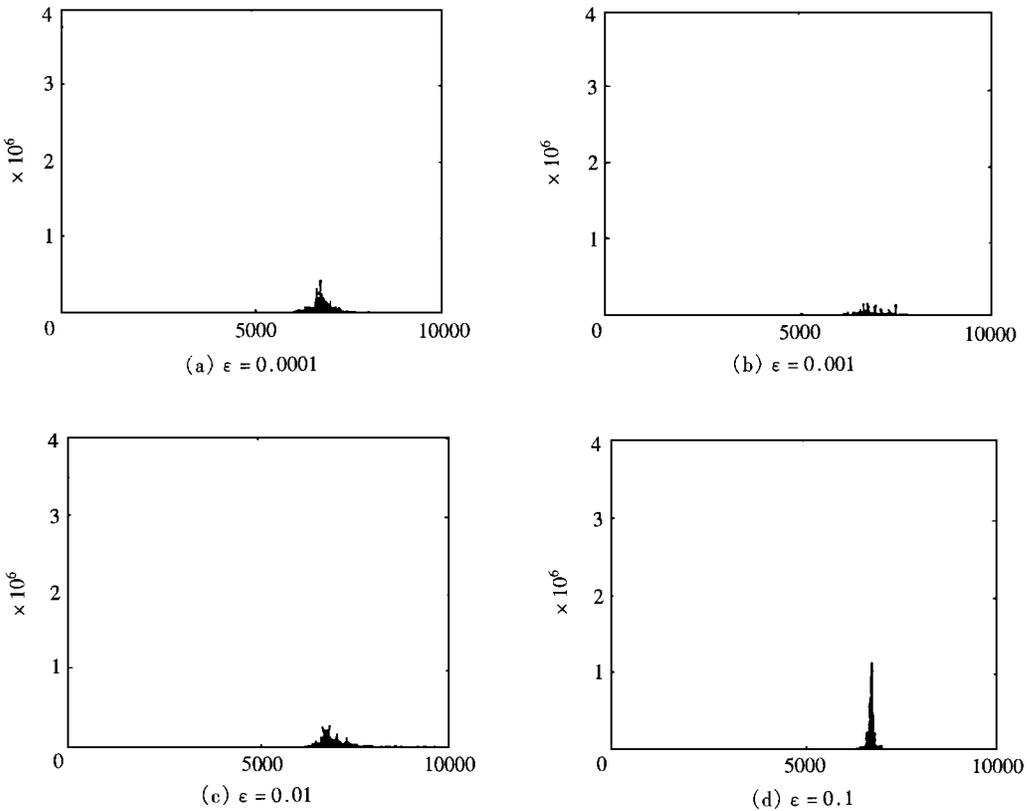


图3 平均速度功率谱(DAT11 随机模型)

为了解途径随机浑沌的路径, 我们发展了在频域内显示的平均速度的分岔图, 见图 4, 它显示出与确定性模型完全不同的模式。在图 4 中, x 轴表示量纲一频率, y 轴表示外激励幅值 α_m , z 轴表示平均速度谱密度。图中单位均为量纲一形式。该例数据采用[6]中 DAT 11, 噪声强度选择 $\varepsilon = \sqrt{\alpha_m}$ 。图 5 为对应的确定性情况。图 5 显示出周期倍分岔通往浑沌的路径, 而图 4 中, 已很难分辨出倍分岔的路径, 因调幅噪声的影响, 在分岔图中, 似乎处处都“浑沌”。

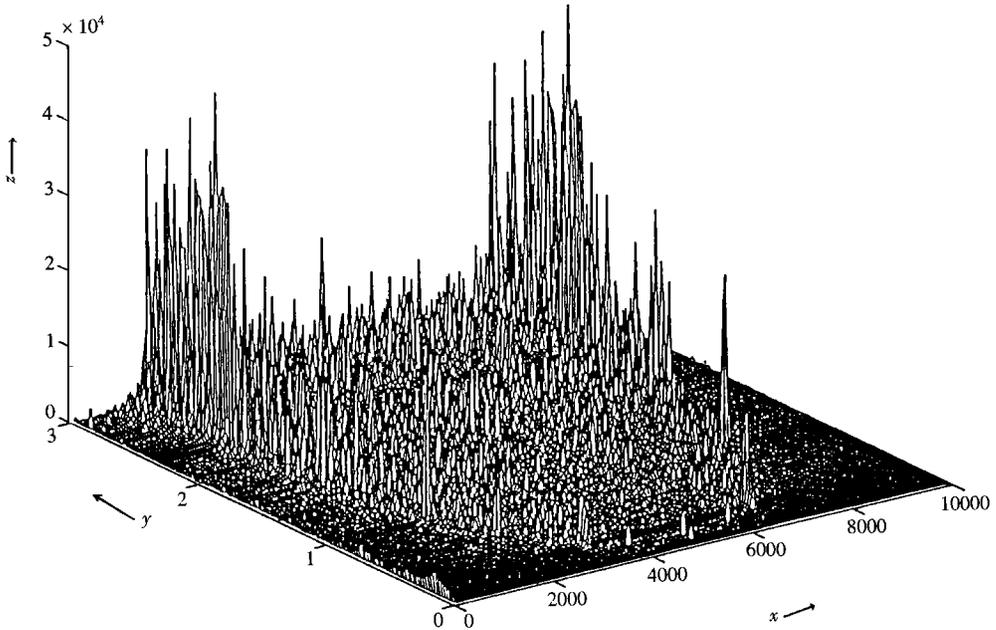


图 4 在频域内表示的平均速度分岔图(DAT11 随机模型)

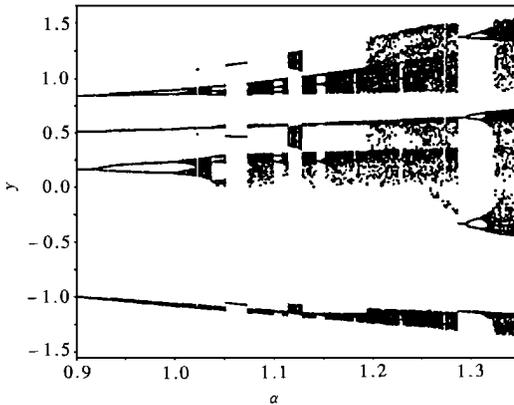


图 5 平均速度分岔图(DAT11 确定性模型)

3 结 论

在本文中, 我们发展了一个离散的随机模型用的模拟齿轮传动的 Rattling 振动。由于 Rattling 振动是齿轮箱的主要噪声源, 因此建立 Rattling 振动的数学力学模型对于进一步控制

齿轮箱噪声源有着重要的意义。本文发展的随机模型是对确定性模型进行了修正,使之更加符合实际情况,并指出可通过外加噪声方法抑制齿轮箱噪声。由于模型是用均值描述的,较之用概率密度描述的模型^[6],更适于声学研究,因此,离散的随机调幅模型更适合用于模拟齿轮箱噪声源。

参 考 文 献

- [1] K c kay F. Dynamik der zahnradgetriebe[A]. Modell , Ver bahren Verhalten [M], Berlin_Heiderberg: springer Verlag, 1987
- [2] K c kay F. Pfeibber F. Uber Rassel in kfz_schaltgetriebe[J]. Ing_Archiv , 1986, **56**(1): 25~ 37
- [3] Pfeiffer F. Mechanische System mit unetigen Übergang[J]. Ing_Archi v, 1984, **54**(3): 232~ 240
- [4] Pfeiffer F. On stdady dynamics in machines with plays[A]. Proc 7th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms [R], Sevilla, 1987
- [5] Pfeiffer F. Seltsama Attraktoren in Zahnradgetrieben[J]. Ing_Ar chiv , 1988, **58**(2): 113~ 125
- [6] Kunert A. Dynamik spielbehafter Maschinenteie[Z]. VDI_Bericht Nr: VDI VEKlag, 1992, 175
- [7] Karaginnis K, Pfeiffer F. Theoretical and experimental investigations of gear rattling[J]. Nonlinear Dynamics, 1991, **2**(3): 367~ 387
- [8] Kapitaniak T. Chaos on System with Noise[M]. Singapore: World Scientific etc, 1988
- [9] Ibrahim R A. Parametric random vibration[M]. New York John Wiley and Sons, INC, etc, 1985
- [10] Crandall S H. Non_Gausslan closure techniques for stationary random vibration [J]. Int J Non_Linear Mechanics, 1985, **20**(1): 1~ 8

Modeling of Stochastic Modulated Rattling System

Feng Qi

Department of Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P R China

Abstract: Rattling vibration is an important noise source of gear_box. To control that noise, it is necessary to elaborate a mathematics_mechanical model on rattling gears. In this paper, a rattling system modulated by noise was investigated. Instead of performing the very tedious numerical calculation, a discrete stochastic model described by three dimensional mean mapping was established by means of the Non_Gaussian closure technique. Through the example, the chaotic stochastic behavior may be revealed. In comparison with deterministic model, the model developed in this paper is more approximate to practice and more available for acoustic investigation, so that it is suggested to be applied to modeling on rattling vibration.

Key words: Rattling systme; non_Gaussian closure technique; chaotic stochastic vibration; mean mapping