

# 耦合 Van der Pol\_Duffing 振子的强共振分叉解\*

甘春标, 陆启韶, 黄克累

北京航空航天大学应用数理系, 北京 100083

(李骊推荐)

**摘要:** 本文用多尺度方法研究了一非线性耦合 Van der Pol\_Duffing 振子在强共振情形下的分叉解。研究表明, 当分叉参数取不同值时, 此系统将出现单个振子的周期运动、两个振子的锁频分叉运动和拟周期分叉运动, 同时, 本文也给出一些数值结果, 以验证理论的正确性。

**关键词:** 非线性耦合; 多尺度法; 锁频; 拟周期

**分类号:** O175, O323      **文献标识码:** A

## 引言

非线性振动系统的复杂动力学行为是目前非线性动力学研究中的前沿课题, 它们在现实中扮演着重要角色, 工程中的许多动力学问题与此类系统有着密切的联系。一般说来, 描述非线性振动系统的非线性微分方程没有求精确解的一般方法。自本世纪二十年代以来, 学者们一直在寻求比较普遍适用的近似方法, 在这方面, 已有一些专门论著<sup>[1~4]</sup>。但这些经典的方法对于一般性的研究仍很困难, 因此迫切需要探讨和发展现有的摄动理论。最近文[5~7]中在处理强非线性振动系统的研究中对一些方法作了改进, 并取得了可喜的成果。相比之下, 人们对多自由度非线性振动系统的渐近解析方法的研究远不如对单自由度系统来深入, 分析其运动形态比较困难。

众所周知, 单个 Van der Pol\_Duffing 振子

$$\ddot{x} - \lambda x + \gamma x^3 + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0,$$

其中, 常数  $\alpha \in R$ ,  $\gamma, \omega > 0$ 。分叉参数  $\lambda \in R$ 。当  $\lambda$  由负至正地通过原点时, 平衡状态失稳, 与此同时, 从平衡解“冒出”周期解, 即出现 Hopf 分叉。分析此类系统的渐近解相对比较容易, 而且通常可利用中心流形与范式理论研究其分叉行为<sup>[8]</sup>。

本文考虑由两个不同频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的 Van der Pol\_Duffing 振子组成的非线性耦合系统, 即

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - \lambda x + (\gamma_1 x^2 + \delta_1 y^2) x + \omega_1^2 x + \alpha_1 x^3 &= 0, \\ \ddot{y} - \lambda y + (\delta_2 x^2 + \gamma_2 y^2) y + \omega_2^2 y + \alpha_2 y^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,  $\lambda \in R$  为分叉参数; 常数  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ ;  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \omega_1, \omega_2$  为正数。研究表明, 当  $\omega_1$  与

\* 收稿日期: 1997\_03\_26; 修订日期: 1998\_09\_05

基金来源: 国家自然科学基金(19872010), 国家教委博士点基金和航空科学基金资助课题(98B51125)

作者简介: 甘春标(1971~), 博士生

$\omega_2$  很接近时, 若  $\lambda$  由负至正地通过原点, 则在一定条件下系统会出现锁频分叉和拟周期分叉现象。

## 1 振幅方程

对于系统 (1), 我们令  $\varepsilon$  为小参数, 并引入两个时间尺度:  $T_0 = t, T_2 = \varepsilon^2 t$ , 设两个振子的固有频率十分接近, 即

$$\omega_1 - \omega_2 = k\varepsilon^2/2,$$

其中,  $k = O(1)$  (当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时)。我们讨论当  $\lambda$  在零附近时,  $(x, y)$  在  $(0, 0)$  附近的渐近展开式。我们设

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon^n, \\ x(t, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n(T_0, T_2) \varepsilon^n, \\ y(t, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(T_0, T_2) \varepsilon^n. \end{aligned} \right\} \quad \text{有的}$$

把以上各式代入方程 (1) 中, 通过比较  $\varepsilon$  的同次幂系数可得如下结果:

对  $\varepsilon$  阶有

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 x_1 / \partial T_0^2 + \omega_1^2 x_1 &= 0, \\ \partial^2 y_1 / \partial T_0^2 + \omega_2^2 y_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

很容易得到

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1(T_2) e^{i\omega_1 T_0} + \text{c. c.}, \\ y_1 &= B_1(T_2) e^{i\omega_2 T_0} + \text{c. c.}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

其中,  $A_1, B_1$  为待定的  $T_2$  的函数, c. c. 表示其复共轭部分。

对  $\varepsilon^2$  阶有

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 x_2 / \partial T_0^2 + \omega_1^2 x_2 - \lambda_1 \partial x_1 / \partial T_0 &= 0, \\ \partial^2 y_2 / \partial T_0^2 + \omega_2^2 y_2 - \lambda_1 \partial y_1 / \partial T_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

将 (1.2) 式代入 (1.3) 中, 并由长期项等于零的要求, 可得:  $\lambda_1 = 0$ , 且

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= A_2(T_2) e^{i\omega_1 T_0} + \text{c. c.}, \\ y_2 &= B_2(T_2) e^{i\omega_2 T_0} + \text{c. c.}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

其中,  $A_2, B_2$  为待定的  $T_2$  的函数。

对  $\varepsilon^3$  阶有

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 x_3 / \partial T_0^2 + \omega_1^2 x_3 &= \lambda_2 \partial x_2 / \partial T_0 - 2\partial^2 x_1 / (\partial T_0 \partial T_2) - \\ &\quad [ \gamma_1 (\partial x_1 / \partial T_0)^2 + \delta_1 (\partial y_1 / \partial T_0)^2 ] \partial x_1 / \partial T_0 - \alpha_1 x_1^3, \\ \partial^2 y_3 / \partial T_0^2 + \omega_2^2 y_3 &= \lambda_2 \partial y_2 / \partial T_0 - 2\partial^2 y_1 / (\partial T_0 \partial T_2) - \\ &\quad [ \delta_2 (\partial x_1 / \partial T_0)^2 + \gamma_2 (\partial y_1 / \partial T_0)^2 ] \partial y_1 / \partial T_0 - \alpha_2 y_1^3, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

把 (1.2) 式入方程 (1.5) 的第一个方程, 考虑到长期项等于零的要求, 有

$$2dA_1/dT_2 = A_1(a_1 \lambda_2 + a_2 |A_1|^2 + a_3 |B_1|^2 + a_4 |A_1|^2 |B_1|^2 e^{-ikT_2/A_1^2}),$$

其中,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -3\gamma_1 \omega_1^2 + 3i\alpha_1/\omega_1$ ,  $a_3 = -2\delta_1 \omega_2^2$ ,  $a_4 = a_3/2$ . 同样, 由(1.5)的第二式可得

$$2dB_1/dT_2 = B_1(b_1\lambda_2 + b_2|B_1|^2 + b_3|A_1|^2 + b_4|B_1^2|A_1^2 e^{ikT_2}/B_1^2),$$

其中,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = -3\gamma_2 \omega_2^2 + 3i\alpha_2/\omega_2$ ,  $b_3 = -2\delta_2 \omega_1^2$ ,  $b_4 = b_3/2$ . 为解得  $A_1$  和  $B_1$ , 我们令  $A_1 = \rho_1 e^{i\phi_1}$ ,  $B_1 = \rho_2 e^{i\phi_2}$ , 则有

$$\left. \begin{aligned} d(\rho_1^2)/(\rho_1^2 dT_2) &= a_1\lambda_2 + \rho_1^2 \operatorname{Re} a_2 + \rho_2^2 \operatorname{Re} a_3 + \\ &\quad |a_4| \cos[2(\phi_2 - \phi_1) - kT_2 + \arg a_4] \rho_2^2, \\ d(\rho_2^2)/(\rho_2^2 dT_2) &= b_1\lambda_2 + \rho_2^2 \operatorname{Re} b_2 + \rho_1^2 \operatorname{Re} b_3 + \\ &\quad |b_4| \cos[2(\phi_2 - \phi_1) + kT_2 + \arg b_4] \rho_1^2, \\ 2d\phi_1/dT_2 &= \rho_1^2 \operatorname{Im} a_2 + \rho_2^2 \operatorname{Im} a_3 + \\ &\quad |a_4| \sin[2(\phi_2 - \phi_1) - kT_2 + \arg a_4], \\ 2d\phi_2/dT_2 &= \rho_2^2 \operatorname{Im} b_2 + \rho_1^2 \operatorname{Im} b_3 + \\ &\quad |b_4| \sin[2(\phi_2 - \phi_1) + kT_2 + \arg b_4]. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

引入  $\tau = \lambda_2 T_2$ ,  $\mu = k/\lambda_2$ , 且设

$$X = \rho_1^2/\lambda_2,$$

$$Y = \rho_2^2/\lambda_2,$$

$$Z = 2(\phi_2 - \phi_1) - kT_2.$$

则方程(1.6)可写成

$$\left. \begin{aligned} dX/d\tau &= X[1 - 3\gamma_1 \omega_1^2 X - (2 - \cos Z) \delta_1 \omega_2^2 Y], \\ dY/d\tau &= Y[1 - 3\gamma_2 \omega_2^2 Y - (2 - \cos Z) \delta_2 \omega_1^2 X], \\ dZ/d\tau &= -3\alpha_1 Z/\omega_1 + 3\alpha_2 Y/\omega_2 - (\delta_2 \omega_1^2 X + \delta_1 \omega_2^2 Y) \sin Z - \mu, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

式(1.7)称为振幅方程. 我们利用它们去研究当  $\omega_1$  和  $\omega_2$  很接近(即  $\varepsilon$  很小)时的分叉形态.

由前面的讨论知道  $\lambda_1 = 0$ , 故  $\lambda = \lambda_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ . 以下我们集中讨论  $\lambda_2 > 0$  的情形, 此时平衡解失稳并出现分叉解.

## 2 锁频分叉运动

在这一节, 我们要研究系统(1)在  $\lambda > 0$  时可能存在的非平凡周期解(近似至  $O(\varepsilon^2)$  阶).

为此要讨论振幅方程的定常解, 并要求  $X \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $Z \in S_{2\pi}^1$ . 令(1.7)式的右端等于零, 可得以下两种情形:

### (1) 单个振子的周期解

即

$$\left. \begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= 1/(3\gamma_2 \omega_2^2), \\ Z &= \sin^{-1}[3\gamma_2(\mu + \alpha_2/(3\gamma_2 \omega_2^3))/\delta_1] \quad (\mu \in I_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

和

$$\left. \begin{aligned} X &= 1/(3\gamma_1 \omega_1^2), \\ Y &= 0, \\ Z &= -\sin^{-1}[3\gamma_1(\mu + \alpha_1/(3\gamma_1 \omega_1^3))/\delta_2] \quad (\mu \in I_2), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中  $I_1$  和  $I_2$  分别使得(2.1) 和(2.2) 的右端函数有定义。显然, 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &= [-\delta_1/(3\gamma_2) - \alpha_2/(3\gamma_2\omega_2^3), -\delta_1/(3\gamma_2) + \alpha_2/(3\gamma_2\omega_2^3)] \\ I_2 &= [-\delta_2/(3\gamma_1) - \alpha_1/(3\gamma_1\omega_1^3), -\delta_2/(3\gamma_1) + \alpha_1/(3\gamma_1\omega_1^3)] \end{aligned}$$

方程(2.1) 和(2.2) 分别代表单个振子的固定振幅的周期运动, 另一个振子处于静止状态, 其数值分析比较简单, 这里暂且略去。

## (2) 两个振子的锁频周期解:

即满足

$$\left. \begin{aligned} 1 - 3\gamma_1\omega_1^2 X - (2 - \cos Z)\delta_1\omega_2^2 Y &= 0, \\ 1 - 3\gamma_2\omega_2^2 Y - (2 - \cos Z)\delta_2\omega_1^2 X &= 0, \\ 3\alpha_1 X/\omega_1 - 3\alpha_2 Y/\omega_2 + (\delta_2\omega_1^2 X + \delta_1\omega_2^2 Y)\sin Z + \mu &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

记

$$\Delta(Z) = [9\gamma_1\gamma_2 - (2 - \cos Z)^2\delta_1\delta_2]\omega_1^2\omega_2^2 \quad (2.4)$$

由(2.3) 的前面两式得

$$\left. \begin{aligned} X(Z) &= [3\gamma_2\omega_2^2 - (2 - \cos Z)\delta_1\omega_2^2]/\Delta(Z), \\ Y(Z) &= [3\gamma_1\omega_1^2 - (2 - \cos Z)\delta_2\omega_1^2]/\Delta(Z), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

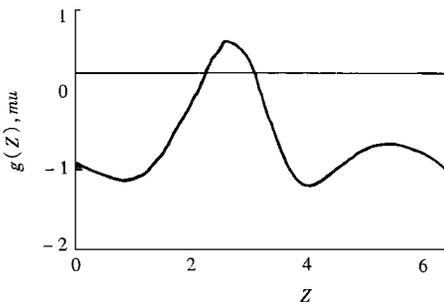
如果  $\gamma_1 > \delta_2$ ,  $\gamma_2 > \delta_1$  则有  $\Delta(Z) > 0$ ,  $X(Z) > 0$ ,  $Y(Z) > 0$ 。把(2.5) 代入(1.7) 的第三式, 可得关于  $Z$  的非线性方程:

$$g(Z) - \mu = 0, \quad (2.6)$$

其中

$$g(Z) = 3\alpha_1 X(Z)/\omega_1 + 3\alpha_2 Y(Z)/\omega_2 - [\delta_2\omega_1^2 X(Z) + \delta_1\omega_2^2 Y(Z)]\sin Z \quad (2.7)$$

现在讨论方程(2.6) 的可解性条件。在对各系数所作的假设下,  $X(Z)$  和  $Y(Z)$  在  $[0, 2\pi]$  上对  $Z$  是有界且一致连续的。记  $\mu_1$  为  $g(Z)$  的下确界,  $\mu_2$  为  $g(Z)$  的上确界, 其中  $Z \in [0, 2\pi]$ 。则对于任何  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ , 至少存在一个  $Z^* \in [0, 2\pi)$ , 使得  $g(Z^*) = \mu$ , 即(2.6) 有解  $Z = Z^*$ , 见图 1。在本文各计算例子中, 均取  $\alpha_1 = \delta_1 = \omega_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = \gamma_2 = 1.5$ ,  $\delta_2 = \gamma_1 = 0.5$ 。把它代入(2.5) 中, 可得(2.3) 的一组解  $(X^*, Y^*, Z^*)$ , 由于方程(1.6) 的第三式可写成



$$(\lambda = 0.01, \omega_1 = 1.0, \omega_2 = 0.999, \mu = 0.2)$$

图 1

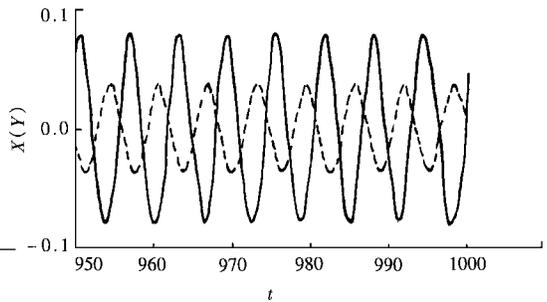


图 2

$$d\phi_1/dT_2 = (-\alpha_1 \lambda_2 X^* / \omega_1 + \delta_1 \omega_2^2 \sin Z^*) / 2 = \nu, \quad (2.8)$$

积分上式, 并取  $\phi_1(0) = 0$ , 有

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \nu \varepsilon^2 t, \\ \phi_2 &= (\nu + k/2) \varepsilon^2 t + Z^* / 2, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

这样便得系统(1)的解为

$$\left. \begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\lambda_2 X^*} e^{i(\omega_1 + \nu \varepsilon^2)t} + \text{c. c.} + O(\varepsilon^2), \\ y(t, \varepsilon) &= \varepsilon \sqrt{\lambda_2 Y^*} e^{i[(\omega_1 + \nu \varepsilon^2) + Z^*/2]t} + \text{c. c.} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

由(2.10)式可知, 如果精确到  $O(\varepsilon^2)$  阶, 在  $\lambda_2 > 0$  时存在两个振子的振幅分别为  $\varepsilon \sqrt{\lambda_2 X^*}$  和  $\varepsilon \sqrt{\lambda_2 Y^*}$  的周期振动. 它们有相同的频率  $\omega_1 + \nu \varepsilon^2$ , 其相位差为  $Z^*/2$ . 故当  $\lambda > 0$  时, 如果  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ , 系统(1)还存在两个振子的锁频运动(见图2), 其上实线为  $x(t)$ , 虚线为  $y(t)$ . 显然, 它们有相同的频率(近似为1, 见图3). 当  $\lambda \rightarrow 0$  (即  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) 时, 振幅趋于零, 从而锁频运动也消失. 这表明在  $\lambda = 0$  处出现锁频分叉.

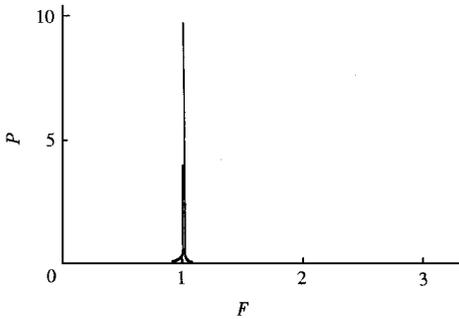


图 3

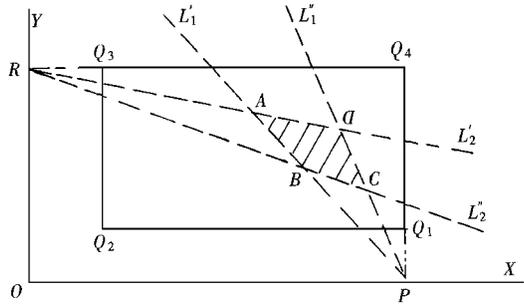


图 4

利用相空间分析方法, 可证当  $\nu_1 > \delta_2$ ,  $\nu_2 > \delta_1$  时, 由(2.1)和(2.2)给出的平衡解是振幅方程的鞍点, 从而它们对应系统(1)的不稳定的单振子周期分叉解. 至于系统(1)的双振子锁频周期解的稳定性分析很复杂, 数值结果表明它们是稳定的.

### 3 拟周期分叉运动

我们用环区定理<sup>[9]</sup>证明对  $\mu > \mu_2$  或  $\mu < \mu_1$ , 三维系统(1.7)至少有一周期解  $(X^*(\tau), Y^*(\tau), Z^*(\tau))$ . 为此在  $R^+ \times R^+ \times S_{2\pi}^1$  空间中选取一个环区  $G$ , 它的  $Z$  为常数的截面  $\Sigma(Z)$  随  $Z$  作周期为  $2\pi$  的变化. 我们证明在  $G$  的边界  $\partial G$  上出发的轨线当  $\tau$  增大时均进入  $G$  的内部, 且通过  $\Sigma(Z)$  的每条轨线当  $\tau$  增大时必定再次通过它. 这样, 方程(1.7)至少存在一条周期轨线. 下面对此加以说明.

#### (1) 环区 $G$ 的取法

因为  $Z \in S_{2\pi}^1$ , 故我们只需讨论  $Z \in [0, 2\pi)$  的情况. 取两族直线

$$L_1(Z): 1 - 3\nu_1 \omega_1^2 X - (2 - \cos Z) \delta_1 \omega_2^2 Y = 0,$$

$$L_2(Z): 1 - 3\nu_2 \omega_2^2 Y - (2 - \cos Z) \delta_2 \omega_1^2 X = 0,$$

对于任何  $Z \in [0, 2\pi)$ ,  $L_1(Z)$  都经过点  $P(1/(3\nu_1 \omega_1^2), 0)$ ,  $L_2(Z)$  都经过点  $R(0, 1/(3\nu_2 \omega_2^2))$ . 由于  $1 \leq 2 - \cos Z \leq 3$ , 因此对于  $L_1(Z)$  和  $L_2(Z)$ , 其斜率  $K_1(Z)$  和  $K_2(Z)$  分别满足

$$-3\nu_1 \omega_2^2 / (\delta_1 \omega_2^2) \leq K_1(Z) \leq -\nu_1 \omega_1^2 / (\delta_1 \omega_2^2),$$

$$-3\gamma_2\omega_2^2/(\delta_2\omega_1^2) \leq K_2(Z) \leq \gamma_2\omega_2^2/(\delta_2\omega_1^2),$$

其中,  $Z \in [0, 2\pi)$ . 容易见到, 对于任何  $Z \in [0, 2\pi)$ ,  $L_1(Z)$  和  $L_2(Z)$  的交点必定位于四边形  $ABCD$  的内部(见图4). 其中  $A, B, C, D$  分别为  $L'_1, L''_1$  与  $L'_2, L''_2$  的交点.  $L'_1$  和  $L''_1$  为过点  $P$  且斜率分别为  $-\gamma_1\omega_1^2/(\delta_1\omega_2^2)$  和  $-3\gamma_1\omega_1^2/(\delta_1\omega_2^2)$  的直线,  $L'_2$  和  $L''_2$  为过点  $R$  且斜率分别为

$-\gamma_2\omega_2^2/(\delta_2\omega_1^2)$  和  $-3\gamma_2\omega_2^2/(\delta_2\omega_1^2)$  的直线.

作矩形  $M = Q_1Q_2Q_3Q_4$  包围四边形  $ABCD$ , 由前面讨论可知对任何  $Z \in [0, 2\pi)$ , 有下列结果:

- (i) 在  $Q_1Q_2$  上,  $dX/d\tau > 0$ ,
- (ii) 在  $Q_2Q_3$  上,  $dY/d\tau > 0$ ,
- (iii) 在  $Q_3Q_4$  上,  $dX/d\tau < 0$ ,
- (iv) 在  $Q_4Q_1$  上,  $dY/d\tau < 0$ .

于是我们可得环区  $G = M \times S^1_{2\pi}$ . 显然系统(1.7) 在边界  $\partial G$  上的一切轨线当  $\tau$  增大时都进入  $G$  的内部.

(2) 参数  $\mu$  的取法

方程(1.7) 的第三式可以写成

$$dZ/d\tau = g(Z) - \mu.$$

由  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的定义可知, 对于任何  $Z \in [0, 2\pi)$ , 有

$$\mu_1 \leq g(Z) \leq \mu_2,$$

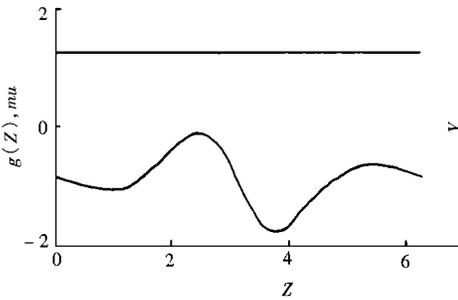


图 5

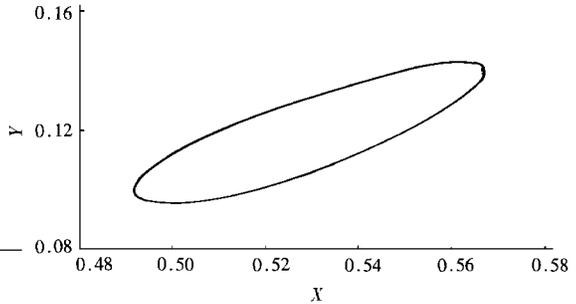


图 6

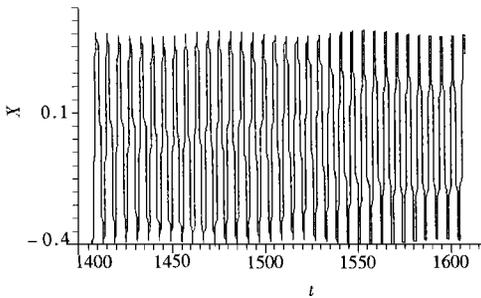


图 7

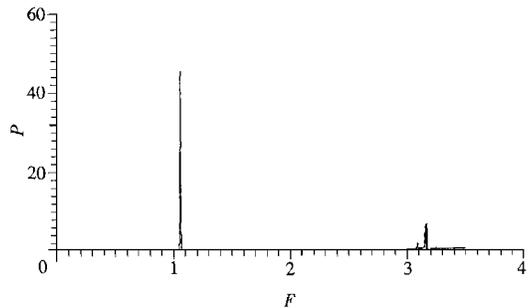


图 8

$$(\lambda = 0.08, \omega_1 = 1.0, \omega_2 = 0.95, \mu = 1.25)$$

因此,当  $\mu > \mu_2$  时,对任何  $Z \in [0, 2\pi)$  有  $dZ/d\tau < 0$ ; 当  $\mu < \mu_1$  时,对任何  $Z \in [0, 2\pi)$  有  $dZ/d\tau > 0$ . 由上面的讨论,可知系统(1.7)的在  $G$  内的一切轨线当  $\tau$  增大时,  $Z$  单调变化且不会逃离环区  $G$ . 当  $\mu > \mu_2$ (见图 5) 或  $\mu < \mu_1$  时,  $G$  内经过在  $Z$  处的截面  $\Sigma$  的一切轨线当  $\tau$  增大时必定再次经过截面  $\Sigma$ .

于是由环区定理可知,三维系统(1.7)当  $\mu > \mu_2$ (或  $\mu < \mu_1$ ) 时,至少存在一个周期解  $(X^*(\tau), Y^*(\tau), Z^*(\tau))$ , 见图 6. 从而,系统(1)在一定条件下存在拟周期运动, 见图(7~8). 图 7 为系统(1)中  $x$  的时间历程, 图 8 为它的功率谱图. 在  $\mu = \mu_1$  和  $\mu_2$  处, 拟周期运动消失, 从而该处出现拟周期分叉.

## 4 结 论

本文分析了一非线性耦合 Van der Pol-Duffing 振子系统, 利用经典的多尺度方法得到单个振子和双振子的周期解的渐近展开式, 结果表明, 当两振子的固有频率很接近时, 则在一定条件下, 系统(1)存在两个振子的锁频周期分叉运动或拟周期分叉运动. 数值结果说明我们的理论结果是正确的.

## 参 考 文 献

- [1] Nayfeh A H. Perturbation Methods [M]. New York: Wiley-Interscience, 1973
- [2] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: Wiley-Interscience, 1979
- [3] Kevorkian J, Cole J D. Perturbation Methods in Applied Mathematics [M]. Springer-Verlag, World Publishing Corporation, 1985
- [4] Bogæovski V N, Povzner A. Algebra Methods in Nonlinear Perturbation Theory [M]. Springer-Verlag, World Publishing Corporation, 1990
- [5] Cheung Y K, Chen S H, Lau S L. A modified Lindstedt-Poincaré method for certain strongly nonlinear oscillators[J]. Int J Non Linear Mech, 1991, 26(2): 367~ 378
- [6] Chen S H, Cheung Y K. A modified Lindstedt-Poincaré method for a strongly nonlinear two degree-of-freedom system[J]. J S V, 1996, 193(4): 751~ 762
- [7] Chen H S Y, Chung K W, Xu Z. A perturbation incremental method for strongly nonlinear oscillators [J]. Int J Non Linear Mech, 1996, 26(1): 59~ 72
- [8] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M]. Springer-Verlag, World Publishing Corporation, 1985
- [9] 李炳熙. 高维动力系统的周期轨道: 理论和应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984

# Strongly Resonant Bifurcations of Nonlinearly Coupled Van der Pol\_Duffing Oscillator

Gan Chunbiao, Lu Qishao, Huang Kelei

Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing

University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P R China

**Abstract:** In this paper, the strongly resonant bifurcations of a nonlinear coupled Van der Pol\_Duffing Oscillator by the classical multi\_scale method are studied. It is shown that there exist periodic motions of a single oscillator, frequency\_locking and quasi\_periodic motions of two oscillators when the parameters vary. Meanwhile, some numerical results are given to test the theoretical ones.

**Key words:** non\_linearly coupling; multi\_scale method; frequency\_locking; quasi\_periodic