

压弯耦合对各向异性叠层板 稳定特性的影响*

黄小清, 张 红

华南理工大学力学系, 广州 510641

摘要: 本文用动态松弛法(DRM)研究了压弯耦合对承受均匀单轴压力作用的非对称叠层复合材料圆柱微曲板在加载和卸载过程中的非线性稳定特性的影响。给出了 S4S4 和 S4S2 边界条件下十字叠层平板和曲板的数值计算结果。计算结果表明, 耦合系数的绝对值和符号对板的稳定特性的影响是显著的。

关键词: 压弯耦合; 叠层板; 稳定特性; 加载和卸载路径; 动态松弛法
分类号: O342 **文献标识码:** A

引 言

由于具有高比强度和比刚度, 先进的纤维增强复合材料叠层平板和曲板越来越多地应用于结构物当中。但是, 在其力学特性中由于有弹性耦合效应, 使得这些叠层结构的分析比传统的各向同性板及正交异性板困难许多。如果采用非对称叠层板, 这种复杂性将更进一步, 因为拉弯耦合需要更复杂的理论。许多结构部件都承受明显的压载荷。所以, 仔细地分析和了解压缩载荷下的屈曲和后屈曲特性对可靠和轻型结构的设计是十分必要的。

Leissa^[1]曾对关于叠层复合材料的屈曲和后屈曲的 352 篇文献做过摘要和评论。这些文献大多限于叠层板的线性屈曲问题。Chia^[2]系统地叙述了对板的非线性分析的解析工作, 包括对非对称复合材料叠层板后屈曲问题的应用。Jensen 和 Lagace^[3]进行了一般各向异性碳/环氧叠层板屈曲和后屈曲特性的实验和分析研究。Zhang 和 Matthews 研究了圆柱叠层曲板的分叉特性^[4, 5], 讨论了同时承受压、剪载荷的非对称铺层筒支圆柱曲板的非分叉特性^[6]。Dong 和 Huang 研究了复合材料叠层圆柱曲板在加载和卸载全过程中载荷和挠度的对应关系发现了加载和卸载路径不重合的现象^[7]。

本文进一步应用 DRM 研究正交反对称叠层复合材料圆柱微曲板承受均匀单轴压力作用时, 在加载和卸载过程中的非线性特性。DRM 在解决几何或物理非线性结构的问题中十分有效^[8, 9, 10]。这种方法的基本思想是, 通过添加惯性项和阻尼项将静态问题转化为动态问题, 并求出其稳态解。此法易于公式化和编程, 所需内存较少。结果表明, 板的非线性稳定特性受压弯耦合系数绝对值影响显著, 同时对其系数的符号也十分敏感。有时, 因符号不同而特

* 收到日期: 1997_05_02; 修订日期: 1998_10_03
基金来源: 广东省自然科学基金资助课题(960225)
作者简介: 黄小清(1945~), 女, 教授, 系主任, 副院长

性迥异•

1 基本迭代方程

考虑由各向异性复合材料叠层构成的圆柱微曲板, 其中面半径为 R (见图 1)• 分别沿板的母线和弧线方向取 x, y 坐标, z 轴沿板的法向•

应用 Donnell 公式并考虑大转动 (Von Karman 意义上), 板中面应变可表示如下:

$$\varepsilon_x^0 = u_{,x}^0 + (w_{,x})^2/2, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_y^0 = v_{,y}^0 + (w_{,y})^2/2 - w/R, \quad (1.2)$$

$$\gamma_{xy}^0 = u_{,y}^0 + v_{,x}^0 + w_{,xy}, \quad (1.3)$$

其中, u^0, v^0, w 表示中面位移; 逗号表示求导, 注意 w 沿 z 轴正向为正• 板单元的动态控制方程是:

$$\rho_u u_{,t} + \mu_u u_{,t} = N_{x,x} + N_{xy,y}, \quad (1.4)$$

$$\rho_v v_{,t} + \mu_v v_{,t} = N_{xy,x} + N_{y,y}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \rho_w w_{,t} + \mu_w w_{,t} = & M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \\ & N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + \\ & N_y (w_{,yy} + 1/R), \end{aligned} \quad (1.6)$$

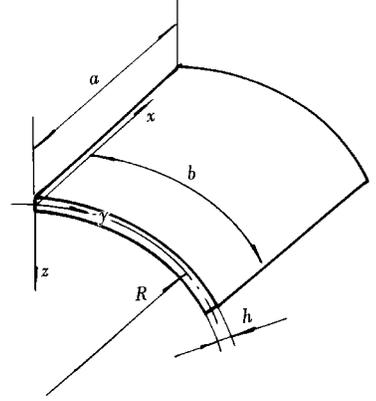


图 1 板的几何定义

其中, ρ_r 和 μ_r ($r = u, v, w$) 分别是虚拟密度和阻尼系数; 下标 t 表示时间• 对方程(1.4) ~ (1.6) 在时间轴和空间轴上进行有限差分, 并令

$$\mu = 0.5 \mu_r \Delta t / \rho_r \quad (r = u, v, w, \text{不求和}) \quad (1.7)$$

速度的显式迭代公式可写成:

$$u \dot{\gamma}_{i,j},n = [(1 - \mu) u \dot{\gamma}_{i,j},n-1 + A_{(i,j)} \Delta t / \rho_u] / (1 + \mu), \quad (1.8)$$

$$v \dot{\gamma}_{i,j},n = [(1 - \mu) v \dot{\gamma}_{i,j},n-1 + B_{(i,j)} \Delta t / \rho_v] / (1 + \mu), \quad (1.9)$$

$$w \dot{\gamma}_{i,j},n = [(1 - \mu) w \dot{\gamma}_{i,j},n-1 + C_{(i,j)} \Delta t / \rho_w] / (1 + \mu), \quad (1.10)$$

其中, $A_{(i,j)}, B_{(i,j)}, C_{(i,j)}$ 分别是等式(1.4) ~ (1.6) 右边的有限差分形式•

在上述迭代式中采用了双下标记号• 例如, $u \dot{\gamma}_{i,j},n$ 表示沿 z 方向在节点 (i, j) 处, $(n \cdot \Delta t)$ 时刻的速度•

对时间 t 应用中央差分, 位移迭代公式为:

$$u(i, j),n+0.5 = u(i, j),n-0.5 + u \dot{\gamma}_{i,j},n \Delta t, \quad (1.11)$$

$$v(i, j),n+0.5 = v(i, j),n-0.5 + v \dot{\gamma}_{i,j},n \Delta t, \quad (1.12)$$

$$w(i, j),n+0.5 = w(i, j),n-0.5 + w \dot{\gamma}_{i,j},n \Delta t, \quad (1.13)$$

经典叠层理论本构关系为:

$$N = A \varepsilon + B \kappa, \quad (1.14)$$

$$M = B \varepsilon + D \kappa, \quad (1.15)$$

式中,

$$N = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T,$$

$$M = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T,$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0]^T,$$

$$\kappa = [\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}]^T,$$

其中, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} 分别是 3×3 的弹性拉伸、耦合和弯曲刚度矩阵; N_x , N_y , N_{xy} 是薄膜力, M_x , M_y 和 M_{xy} 是弯矩和扭矩; ϵ_x^0 , ϵ_y^0 和 γ_{xy}^0 是方程(1.1) ~ (1.3) 给出的中面应变; K_x , K_y 和 K_{xy} 是曲率和扭率:

$$K_x = -w_{,xx},$$

$$K_y = -w_{,yy},$$

$$K_{xy} = -2w_{,xy},$$

方程(1.14) ~ (1.15) 可写成有限差分格式, 以得到合力和合力矩的迭代公式。

2 虚拟密度的估计

控制非线性动态松弛解的收敛性和数值稳定性的虚拟密度的计算方法参见文献[9, 10, 11]。对非线性问题, 虚拟密度在迭代过程中是变化的。比如:

$$\rho_{u(i,j)} = 0.25 \left\{ [N_x(i+1,j) + N_x(i-1,j)] / (2\Delta x) + [N_{xy(i,j+1)} + N_{xy(i,j-1)}] / (2\Delta y) \right\} \quad (2.1)$$

$$N_x(i,j) = A_{11}\epsilon_x(i,j) + A_{12}\epsilon_y(i,j) + A_{16}\gamma_{xy(i,j)} + 4|B_{11}| / (\Delta x)^2 + 4|B_{12}| / (\Delta y)^2 + 2|B_{16}| / (\Delta x \Delta y) \quad (2.2)$$

$$N_{xy(i,j)} = A_{16}\epsilon_x(i,j) + A_{26}\epsilon_y(i,j) + A_{66}\gamma_{xy(i,j)} + 4|B_{16}| / (\Delta x)^2 + 4|B_{26}| / (\Delta y)^2 + 2|B_{66}| / (\Delta x \Delta y) \quad (2.3)$$

其中:

$$\epsilon_x(i,j) = 1/(\Delta x) + 0.5|w_{(i+1,j)} - w_{(i-1,j)}| / (\Delta x)^2 \quad (2.4)$$

$$\epsilon_y(i,j) = 1/(\Delta y) + 0.5|w_{(i,j+1)} - w_{(i,j-1)}| / (\Delta y)^2 + 1/R \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xy(i,j)} = 1/(\Delta x) + 1/(\Delta y) + 0.5[|w_{(i,j+1)} - w_{(i,j-1)}| + |w_{(i+1,j)} - w_{(i-1,j)}|] / (\Delta x \Delta y) \quad (2.6)$$

为方便计, 在方程(2.1) ~ (2.4) 中已略去了各变量的第二下标 ($n - 0.5$)。

3 计算和结果

算例为承受单向均匀轴压力的 $(90/0)_{n/2}$ 和 $(0/90)_{n/2}$ (n 为偶数) 碳/环氧圆柱曲板。这里, $a/b = 1$, $b/h = 100$, 并令 $k = b^2/(Rh)$ 。

计算中用到的碳/环氧的材料特性如下:

$$E_{11} = 206.9 \text{ GN/m}^2,$$

$$E_{22} = 5.2 \text{ GN/m}^2,$$

$$\nu_{12} = 0.25, \quad G_{12} = 2.6 \text{ GN/m}^2.$$

考虑两种简支边界条件:

(1) 所有边界内可动。记为 S4S4:

$$w = M_x = N_{xy} = 0, \quad N_x = -N, \quad (x = 0, a)$$

$$w = M_y = N_{xy} = N_y = 0, \quad (y = 0, b)$$

(2) 承载边内部分可动, 另外两边内可动。记为 S4S2:

$$w = M_x = v = 0, \quad N_x = -N, \quad (x = 0, a)$$

$$w = M_y = N_{xy} = N_y = 0, \quad (y = 0, b)$$

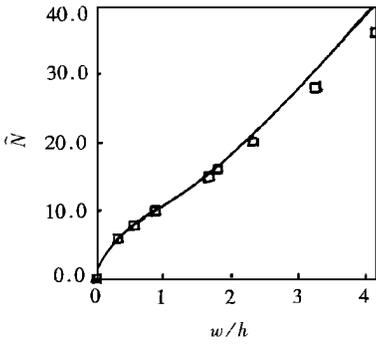


图 2 (90/0) 平板在 S4S2 和 S4S4 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线(—S4S2; □S4S4)

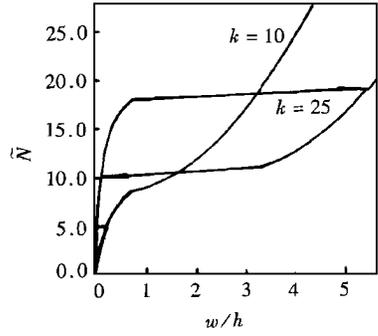


图 3 (90/0) 曲板 (\$k=10, 25\$) 在 S4S2 边界条件下, 板中央量纲一的挠度与无量纲压力的关系曲线

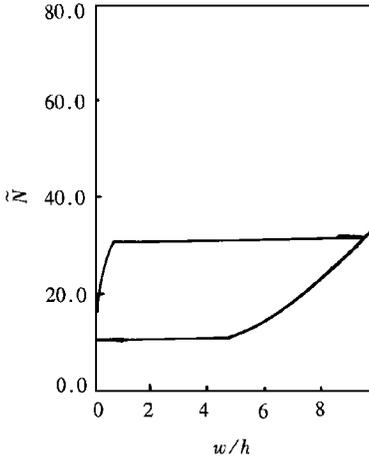


图 4 (90/0) 曲板 (\$k=35\$) 在 S4S2 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

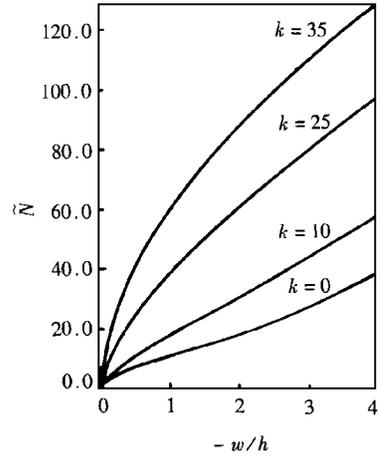


图 5 \$k=0, 10, 25, 35\$ 的 \$(0/90)\$ 曲板在 S4S2 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

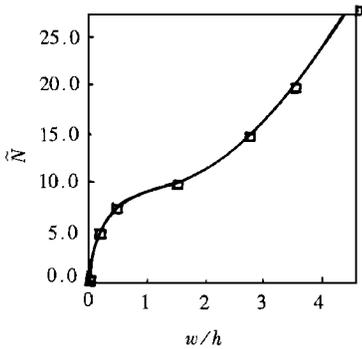


图 6 \$k=10\$ 的 \$(90/0)\$ 曲板在 S4S2 与 S4S4 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线(—S4S2; □S4S4)

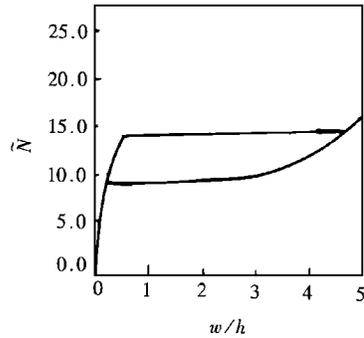


图 7 \$k=25\$ 的 \$(90/0)\$ 曲板在 S4S4 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

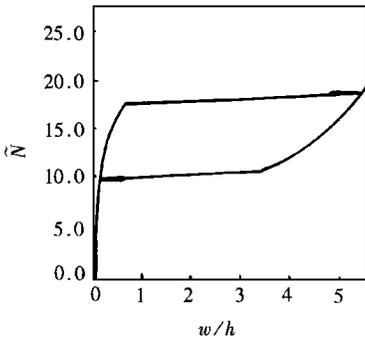


图 8 $k=25$ 的(90/0)曲板在 S4S2 边界条件下,板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

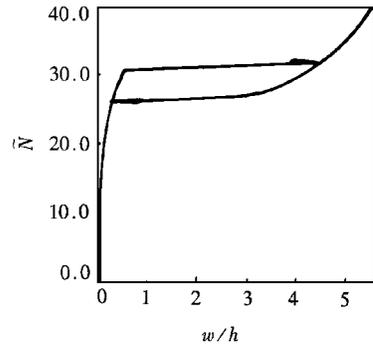


图 9 $k=25$ 的(90/0/90/0)曲板在 S4S4 边界条件下,板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

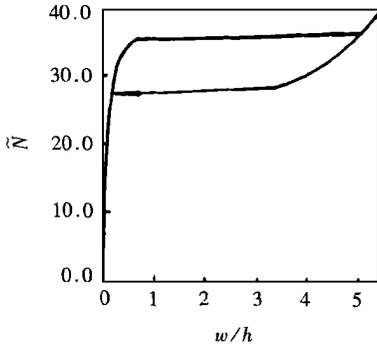


图 10 $k=25$ 的(90/0/90/0)曲板在 S4S2 边界条件下,板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

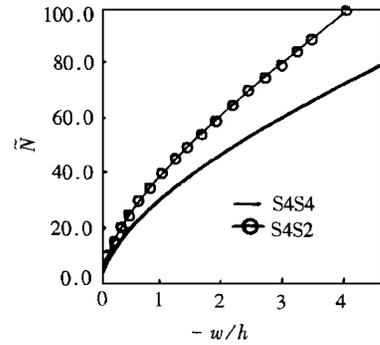


图 11 $k=25$ 的(0/90)曲板在 S4S2 和 S4S4 边界条件下,板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

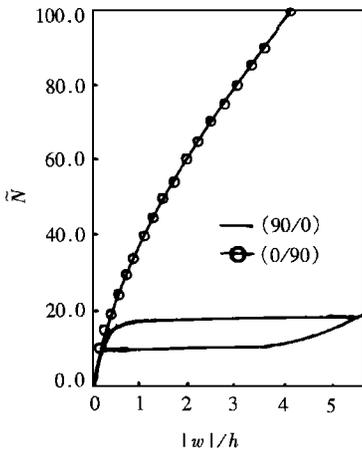


图 12 $k=25$ 的(90/0)和(0/90)曲板在 S4S2 边界条件下,板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

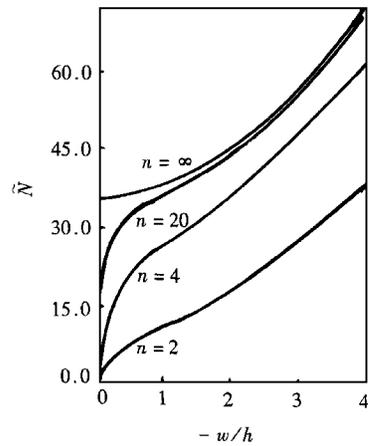


图 13 $(0/90)_{n/2}$ ($n=2, 4, 20, \infty$) 平板在 S4S2 边界条件下,板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

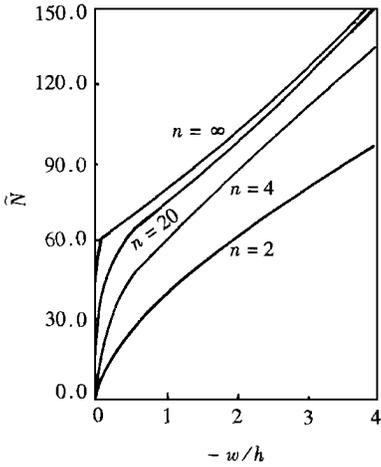


图 14 $k=25$ 的 $(0/90)_{n/2}$ ($n=2, 4, 20, \infty$) 曲板在 S4S2 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

(90/0) 平板在 S4S4 和 S4S2 边界条件下, 板中央挠度 w/h 与量纲一压力 $N = Nb^2/(E_{22}h^3)$ 的关系曲线如图 2 所示。

图 3 和图 4 分别为曲率参数 $k=10, 25, 35$ 的 (90/0) 曲板在 S4S2 边界条件下的计算结果。图中显示了板中央挠度随单向均匀轴压力的增加和减少而变化的加载路径和卸载路径。

图 5 是 $k=0, 10, 25$ 和 35 的 (0/90) 曲板在 S4S2 边界条件下的计算结果。加载路径和卸载路径相吻合。

图 6 是 $k=10$ 的 (90/0) 曲板在 S4S4 和 S4S2 边界条件下的结果。图 7 和图 8 是 $k=25$ 的 (90/0) 曲板分别在 S4S4 和 S4S2 边界条件下的结果。

$k=25$ 的 (90/0/90/0) 曲板在 S4S4 和 S4S2 边界条件下的加载路径和卸载路径分别见图 9 和图 10。

图 11 是 $k=25$ 的 (0/90) 曲板分别在 S4S4 和 S4S2 边界条件下的结果。

铺层顺序的影响如图 12 所示。

层数的影响见图 13~ 图 16。图 13 是 S4S2 边界条件下, $(0/90)_{n/2}$ ($n=2, 4, 20, \infty$) 平板的计算结果。S4S2 边界条件下 $k=25$ 的 $(0/90)_{n/2}$ ($n=2, 4, 20, \infty$) 曲线的计算结果见图 14。 $k=25$ 的 $(90/0)_{n/2}$ ($n=2, 4, 20$) 曲板在 S4S2 边界条件下, 板中央挠度随单向均匀轴压力的增加和减少而变化的加载路径和卸载路径见图 15 和图 16。

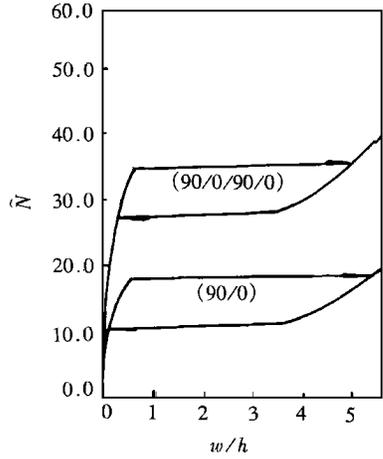


图 15 $k=25$ 的 (90/0) 和 (90/0/90/0) 曲板在 S4S2 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

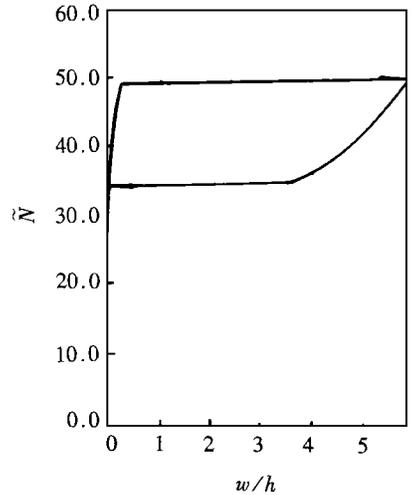


图 16 $k=25$ 的 $(90/0)_{10}$ 曲板在 S4S2 边界条件下, 板中央量纲一挠度与量纲一压力的关系曲线

4 讨论和结论

从以上计算和数值结果的分析可得出以下结论:

(1) 由于非对称十字叠层平板的压弯耦合效应, 横向挠度在加载开始即产生, 并随载荷增加而增大, 即使层数为 20 层亦如此。结果表明分叉的概念不完全适用于简支边界条件下存在压弯耦合效应的非对称叠层板。因此, 为充分描述叠层板的特性, 需进行详尽的非线性分析。

(2) 在均匀单向轴压力作用下, 非对称复合材料十字叠层圆柱微曲板的非线性特性受铺层顺序影响很大。比如, 在加载和卸载过程中, 对 $k = 25$ 的 $(0/90)_{n/2}$ 圆柱曲板挠度跳跃现象不会发生, 但是对相同曲率的 $(90/0)_{n/2}$ 圆柱曲板则产生这一现象。这一结果表明了耦合系数的符号对叠层曲板稳定特性的影响。

(3) 耦合系数的绝对值对非对称十字叠层复合材料平板和圆柱微曲板的非线性稳定特性的影响也是甚为显著。若板的总厚度不变, n 越大, 则承载能力越强。例如, 当板的中心挠度达到一个板厚时, 层数为无限多的 $(0/90)_{n/2}$ 板 (即 $B_{11} = 0$) 所受的轴向压力大约是层数为两层时的三倍多 ($k = 0$) 和二倍 ($k = 25$)。

(4) 板的曲率对载荷—挠度曲线影响显著。对 $(90/0)$ 圆柱曲板, 当曲率较小 ($k = 0, 10$) 时, 未出现挠度跳跃现象, 但当曲率较大 ($k = 25, 35$) 时, 产生挠度跳跃现象。

(5) 计算结果表明, 只要不出现挠度跳跃现象, 加载和卸载路径就重合, 而只要出现跳跃现象, 加载和卸载路径就不重合。在加载的情况下, 当载荷从零渐增至上临界值时, 挠度突然增加出现跳跃现象。在卸载过程中, 挠度沿不同的路径减小, 并且当载荷渐减至下临界值时出现又一次跳跃。

(6) 对出现挠度跳跃的情况, 面内边界约束对下临界载荷值的影响比对上临界载荷值的影响要小。

参 考 文 献

- [1] Leissa A W. A review of laminated composite plate buckling [J]. Appl Mech Rev, 1987, **40**(5): 575 ~ 591
- [2] Chia C Y. Nonlinear Analysis of Plates [M]. New York: McGraw_Hill Inc, 1980
- [3] Jensen D W, Lagace P A. Influence of mechanical coupling on the buckling and postbuckling of anisotropic plates [J]. AIAA J, 1988, **26**(10): 1269~ 1277
- [4] Zhang Y, Matthews F L. Initial buckling of curved panels of generally layered composite materials [J]. Composite Structures, 1983, **1**(1): 3~ 30
- [5] Zhang Y, Matthews F L. Postbuckling behavior of curved panels of generally layered composite materials [J]. Composite Structures, 1983, **1**(2): 115~ 136
- [6] Zhang Y, Matthews F L. Large deflection behavior of simply supported laminated panels under in-plane loading [J]. ASME J of Appl Mech, 1985, **52**(3): 553~ 558
- [7] Dong W L, Huang X Q. A Study of the postbuckling path of cylindrically curved panels of laminated composite materials during loading and unloading [J]. ICCM_VII, 1989, **3**; Appl Math and Mech (English Edition), 1990, **11**(7): 651~ 657
- [8] Underwood P. Dynamic relaxation [A]. In: eds T Belytschko & T J R Hughes. Computational Method for Transient Analysis [M]. Amsterdam: North_Holand, 1983
- [9] 黄小清. 动态松弛法在复合材料叠层板非线性弯曲问题中的应用[J]. 复合材料学报, 1985, **2**(2):

47~ 51

- [10] 黄小清,董万林. 横向剪切对双模量复合材料叠层矩形板非线性弯曲的影响[J]. 应用数学和力学, 1987, **8**(1): 79~ 85
- [11] Cassell A C, Hobbs R E. Numerical stability of dynamic relaxation analysis of nonlinear structures [J]. Int J Num Meth Engng, 1976, **10**(6): 1407~ 1410

Influence of Compression_Bending Coupling on the Stability Behavior of Anisotropic Laminated Panels

Huang Xiaoqing Zhang Hong

Department of Mechanics, South China University of
Technology, Guangzhou 510641 P R China

Abstract: Dynamic_Relaxation Method(DRM) is applied to studying the influence of compression_bending coupling on nonlinear behavior of cylindrically slightly curved panels of unsymmetric laminated composite materials subjected to uniform uniaxial compression during loading and unloading. Numerical results are given for cross_ply plates and panels under S4S4 and S4S2 boundary conditions. The results show that the effects of absolute value and the sign of the coupling coefficient on the stability behavior of the panels are significant.

Key words: compression_bending coupling; laminated panels; stability behavior; loading and unloading paths; dynamic_relaxation method