论文编号: 1000_0887(1999)02_0211_216

# 拟线性椭圆型 H_半变分不等式*

刘振海

长沙电力学院 数学系, 湖南 410077

(张石生推荐)

**摘要:** 本文研究一类拟线性椭圆型 H_半变分不等式, 即研究具有非凸、非光滑泛函的椭圆型不等式· 这类问题的研究来自力学· 利用 Clarke 广义梯度和伪单调算子理论, 我们证明了拟线性椭圆型 H_半变分不等式解的存在性·

**关键词:** H_半变分不等式; 椭圆型问题; 存在性结果
**分类号:** O175.25　　**文献标识码:** A

## 引　　言

变分不等式理论日臻完善· 它的研究与能量泛函的凸性密切相关· 事实上, 变分不等式解的存在性是基于单调方法[1~4]·

如果对应的能量泛函是非凸、不可微, 这类不等式被称为 H_半变分不等式· 近年来, 借助于 Clarke 广义梯度, 几类 H_半变分不等式已有研究[5~8]·

设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中有界开子集, $2 \leqslant p < \infty$· 算子 $A: W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ (为方便起见, 往下记 $W = W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^* = W^{-1,p'}(\Omega)$) 由下列微分算子产生:

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u),$$

即:

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega a_0(x, u, \nabla u)v\,dx, \qquad \forall u, v \in W, \tag{1}$$

$\langle\ ,\ \rangle$ 表示 Banach 空间 $W$ 和其对偶空间 $W^*$ 之对偶积· 其中 $a_i(x, \eta, \zeta)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 满足适当的正则性和增长性假设·

对于任何 $g \in W^*$, 本文的目的是研究下列 H_半变分不等式:

问题(P):

寻求 $u \in W$, 使得

$$\langle Au, v-u\rangle + \int_\Omega j^0(u, v-u)dx \geqslant \langle g, v-u\rangle, \qquad \forall v \in W· \tag{2}$$

当 $A: V \to V'$ 是有界线性算子, 利用正则方法, Panagiotopoulos[5~7] 证明了解的存在性· 不

* 收稿日期: 1996_09_02; 修订日期: 1997_01_18
基金来源: 博士后基金、留学归国人员基金和电力部新星基金资助项目
作者简介: 刘振海(1958~), 男, 教授, 匈牙利科学院博士

同于 Panagiotopoulos, 我们利用伪单调算子理论, 将证明问题(P)解的存在性•

# 1 解的存在性

设泛函 $J: L^2(\Omega) \to R$ 为

$$J(u) = \int_\Omega j(u(x))\,\mathrm{d}x, \qquad \forall u \in L^2(\Omega), \tag{3}$$

其中 $j: R \to R$,

$$j(t) = \int_0^t \beta(t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in R, \tag{4}$$

$\beta: R \to R$ 是局部有界可测函数, 满足

(H$_1$) $\quad |\beta(t)| \leqslant a_1 + a_2 |t|, \qquad t \in R$,

这里 $a_1, a_2$ 是正常数• 在条件 (H$_1$) 下, 泛函 $J$ 显然是局部 Lip•

记

$$\beta_\delta^-(s) = \operatorname*{ess\,inf}_{|t-s|\leqslant\delta} \beta(t), \quad \beta_\delta^+(s) = \operatorname*{ess\,sup}_{|t-s|\leqslant\delta} \beta(t), \qquad \forall \delta > 0•$$

$$\beta^-(s) = \lim_{\delta\to 0^+} \beta_\delta^-(s), \quad \beta^+(s) = \lim_{\delta\to 0^+} \beta_\delta^+(s)•$$

由 Clarke[9], $j(t)$ 的广义梯度

$$\partial j(t) = [\beta^-(t), \beta^+(t)]•$$

若 $w \in \partial j(t)$, 由条件 (H$_1$), 有

$$|w| \leqslant \max\{|\beta^-(t)|, |\beta^+(t)|\} \leqslant a_1 + a_2|t|, x \qquad \forall t \in R• \tag{5}$$

类似于张恭庆[10] p.108 定理 3.3 的证明, 容易证明广义梯度 $\partial J(u)$ 的如下特性:

**引理 1.1** 对任何 $w \in \partial J(u)$, 有 $w \in L^2(\Omega)$ 且对几乎所有 $x \in \Omega$, 有

$$w(x) \in [\beta^-(u(x)), \beta^+(u(x))]•$$

由[10] p.109, 定理 3.4, 有

$$\partial(J|_W)(u) \subset \partial(J|_{L^2(\Omega)})(u), \qquad \forall u \in W• \tag{6}$$

假设

(H$_2$) 函数 $a_i(x, \eta, \zeta)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 满足 Caratheodory 条件, 且有

$$|a_i(x, \eta, \zeta)| \leqslant a(x) + b|\eta|^{p/p'} + b|\zeta|^{p/p'}, \qquad \text{a.e. } x \in \Omega, \ \forall \eta \in R, \zeta \in R^n,$$

其中 $a(x) \in L^{p'}(\Omega)$, $b$ 是正常数, $p'$ 是常数 $p$ 的 Hölder 共轭数•

(H$_3$) $\quad \sum_{i=1}^n (a_i(x, \eta, \zeta) - a_i(x, \eta, \zeta'))(\zeta_i - \zeta_i') > 0$,

a.e. $x \in \Omega$, $\forall \eta \in R$, $\zeta, \zeta' \in R^n$ 且 $\zeta \neq \zeta'$•

(H$_4$) 存在常数 $c > 0$, $k(x) \in L^1(\Omega)$, 使得

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \eta, \zeta)\zeta_i + a_0(x, \eta, \zeta)\eta \geqslant c|\zeta|^p - k(x), \qquad \text{a.e. } x \in \Omega, \ \forall \eta \in R, \zeta \in R^n•$$

若 $p = 2$, 我们要求 $c > [C(\Omega)]^2 a_2$, 其中 $C(\Omega)$ 是 Poincaré 常数, 即

$$\left(\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant C(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \qquad \forall u \in W(= W_0^{1,2}(\Omega))•$$

我们称多值算子 $T: V \to 2^{V^*}$ ($V^*$ 是 Banach 空间 $V$ 的对偶空间) 是伪单调的[1,12], 如果下列条件满足:

(a) 对任何 $u \in V$, $Tu$ 是非空有界闭凸的•

(b) T 是弱上半连续•

(c) 若 $\{u_n\} \subset V$ 弱收敛于 $u$, $u_n^* \in T(u_n)(n = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\limsup\langle u_n^*, u_n - u\rangle_V \leqslant 0,$$

则对任何 $v \in V$, 存在 $u^*(v) \in Tu$, 使得

$$\liminf\langle u_n^*, u_n - v\rangle_V \geqslant \langle u^*(v), u - v\rangle_V \text{•}$$

算子 $T: V \to 2^{V^*}$ 称为具有 S_ 性质, 如果条件(a), (b) 满足且对任何 $V$ 中序列 $\{u_n\}$, 若 $\{u_n\}$ 弱收敛于 $u$, $u_n^* \in T(u_n)$, 和

$$\limsup\langle u_n^*, u_n - u\rangle_V \leqslant 0,$$

有 $u_n$ 强收敛于 $u$•

我们有

**引理 1.2**(Mustonen[11]) 设(H2) ~ (H4) 满足• 则由(1) 定义的算子 $A: W \to W^*$ 是连续的, 且具有 S_ 性质•

现在我们来证明主要定理:

**定理** 设(H1) ~ (H4) 满足, 则问题(P) 至少有一个解•

**证明** 首先证明 $A + \partial J$ 是伪单调的•

由广义梯度的基本性质 1[10, p.99], 对任何 $u \in W$, $\partial J(u)$ 是一个非空弱 $W^*$ 紧凸子集• 又因 $W$ 是自反 Banach 空间, 故 $\partial J(u)$ 是一个非空有界闭凸集, 从而 $Au + \partial J(u)$ 是一个非空有界闭凸集, 即条件(a) 满足• 而从广义梯度的基本性质 6[10, p.99], 空间 $W$ 的自反性和引理 1.2 中算子 A 的连续性知 $A + \partial J$ 是弱上半连续的, 即条件(b) 成立•

为了证明 $A + \partial J$ 是伪单调的, 我们还需证明条件(c) 成立• 为此, 设 $\{u_n\} \subset W$, $u_n$ 弱收敛于 $u$, 有 $w_n \in \partial J(u_n)$ 使得

$$\limsup\langle Au_n + w_n, u_n - u\rangle \leqslant 0 \text{•} \tag{7}$$

因此可得

$$\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle + \liminf\langle w_n, u_n - u\rangle \leqslant 0 \text{•} \tag{8}$$

从(6) 式, 有

$$w_n \in \partial(J|_{L^2(\Omega)})(u_n),$$

从而 $\quad w_n \in L^2(\Omega)$ •

因此 $\quad \langle w_n, u_n - u\rangle = (w_n, u_n - u)_{L^2(\Omega)}, \tag{9}$

这里 $(\,,\,)_{L^2(\Omega)}$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中内积•

因 $\{u_n\}$ 在 $W$ 中弱收敛于 $u$ 和紧嵌入定理 $W \subset L^2(\Omega)$, 有

$$u_n \to u \quad (n \to \infty), (\text{按 } L^2(\Omega) \text{ 中范数}) \text{•}$$

因 $J|_{L^2(\Omega)}$ 是局部 Lip, 从上式, 我们可设 $\{u_n\}$ 在 $u$ 的邻域内, 由广义梯度的基本性质 2[10, p.99], 有

$$\{w_n\} \text{ 是 } L^2(\Omega) \text{ 中有界序列•}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\langle w_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty}(w_n, u_n - u)_{L^2(\Omega)} = 0 \text{•} \tag{10}$$

由(8) 式, 有

$$\limsup \langle Au_n, u_n - u\rangle \leqslant 0.$$

由此及引理1.2推出

$$u_n \to u \qquad (n \to \infty), (\text{按 } W \text{ 中范数}), \tag{11}$$

$$Au_n \to Au \qquad (n \to \infty), (\text{按 } W^* \text{ 中范数}). \tag{12}$$

利用(11)及 $J|_W$ 是局部Lip. 我们可设 $\{u_n\}$ 在 $u$ 的邻域内(按 $W$ 中拓扑), 由基本性质2[10, p.99] 和 $w_n \in \partial J(u_n)$, 有

算子 $\{w_n\}$ 是 $W^*$ 中有界序列.

从 lim inf 的定义, 对任何 $v \in W$, 存在 $\{u_n\}$ 的子序列 $\{u_{n_i}\}$, 使得

$$\liminf \langle Au_n + w_n, u_n - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_{n_i} + w_{n_i}, u_{n_i} - v\rangle, \tag{13}$$

又 $\{w_{n_i}\}$ 是 $\{w_n\}$ 的子序列, 故 $\{w_{n_i}\}$ 在 $W^*$ 中有界. 我们不妨设 $w_{n_i}$ 在 $W^*$ 弱收敛于 $w$. 利用[9, p.29]的结果和 $w_{n_i} \in \partial J(u_{n_i})$,

有

$$w \in \partial J(u).$$

所以, 从(13)式得

$$\liminf \langle Au_n + w_n, u_n - v\rangle = \langle Au + w, u - v\rangle,$$

这就证明了条件(c). 从而 $A + \partial J$ 是伪单调的.

下证 $A + \partial J$ 满足强制性条件.

任取 $u \in W, w \in \partial J(u)$, 类似于(9)有

$$\langle w, u\rangle = (w, u)_{L^2(\Omega)}. \tag{14}$$

利用(14)和($H_4$), 有

$$\begin{aligned}\langle Au + w, u\rangle &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int_\Omega a_0(x, u, \nabla u)u\,dx + \langle w, u\rangle \geqslant \\ &\int_\Omega c|\nabla u|^p dx - \int_\Omega k(x)dx + (w, u)_{L^2(\Omega)} = \\ &\int_\Omega c|\nabla u|^p dx - \int_\Omega k(x)dx + \int_\Omega w(x)u(x)dx.\end{aligned} \tag{15}$$

由引理1.1, $w(x) \in [\beta^-(u(x)), \beta^+(u(x))]$. 再利用(5)

$$|w(x)| \leqslant a_1 + a_2|u(x)|,$$

因此, $$\int_\Omega w(x)u(x)dx \geqslant -\int_\Omega (a_1 + a_2|u(x)|)|u(x)|dx.$$

故从(15)式, 有

$$\begin{aligned}\langle Au + w, u\rangle \geqslant &\int_\Omega c|\nabla u|^p dx - a_2\int_\Omega |u(x)|^2 dx - \\ &a_1\int_\Omega |u(x)|dx - \int_\Omega k(x)dx.\end{aligned} \tag{16}$$

又因为在 $W(= W_0^{1,p}(\Omega))$ 中的范数为

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{1/p},$$

且有 Poincar 不等式

$$\left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}, \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

若 $p>2$, 由 Hölder 不等式, 有

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant (\text{meas}\,\Omega)^{(p-2)/2p}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cdot$$

所以, 当 $p=2$ 时, 从(16)式, 有

$$\begin{aligned}\langle Au+w,u\rangle \geqslant\ & c\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x-[C(\Omega)]^2a_2\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x-\\ & a_1(\text{meas}\,\Omega)^{1/2}\left(\int_\Omega|u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}-\int_\Omega k(x)\mathrm{d}x\geqslant\\ & [c-(C(\Omega))^2a_2]\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x-\\ & a_1C(\Omega)(\text{meas}\,\Omega)^{1/2}\cdot\\ & \left(\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}-\int_\Omega k(x)\mathrm{d}x\cdot\end{aligned}$$

故由($H_4$), $c-[C(\Omega)]^2a_2>0$ 知

$$\frac{\langle Au+w,u\rangle}{\|u\|}\to\infty \quad \left(\text{当 } \|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\to\infty \text{ 时}\right)\cdot$$

当 $p>2$ 时, 从(16)式, 有

$$\begin{aligned}\langle Au+w,u\rangle \geqslant\ & c\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x-a_2[C(\Omega)]^2\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x-\\ & a_1C(\Omega)(\text{meas}\,\Omega)^{1/2}\left(\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}-\int_\Omega k(x)\mathrm{d}x\geqslant\\ & c\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x-a_2[C(\Omega)]^2(\text{meas}\,\Omega)^{(p-2)/p}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{2/p}-\\ & a_1C(\Omega)(\text{meas}\,\Omega)^{1/2+(p-2)/2p}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}-\int_\Omega k(x)\mathrm{d}x\cdot\end{aligned}$$

由 $p>2$, 从上式有

$$\frac{\langle Au+w,u\rangle}{\|u\|}\to\infty \quad \left(\text{当 } \|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\to\infty \text{ 时}\right)\cdot$$

综上所述, 可得

$$A+\partial J \text{ 是强制的}\cdot$$

因此, 由[12]知

$$\text{Range}(A+\partial J)=W^*\cdot$$

从而, 对任何 $g\in W^*$, 存在 $u\in W$, $w\in\partial J(u)$ 使得

$$\langle Au,v-u\rangle+\langle w,v-u\rangle=\langle g,v-u\rangle,\qquad \forall v\in W, \tag{17}$$

又因为(见 Clarke[9])

$$\partial J(u)=\left\{w\in W^*: J^0(u,v)\geqslant\langle w,v\rangle_W,\ \forall v\in W\right\},$$

$$J^0(u,v)\leqslant\int_\Omega j^0(u,v)\mathrm{d}x,$$

利用(17), 我们有

$$\langle Au,v-u\rangle+\int_\Omega j^0(u,v-u)\mathrm{d}x\geqslant\langle g,v-u\rangle,\qquad\forall v\in W,$$

这就证明了定理•

## 参 考 文 献


[1] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1991

[2] Zhang Congjun, Zhang Shisheng. On recent developments and some open questions in the study of Browder_Hartman_Stampaccia variational inequality[J]. J Math Res Exposition, 1995, **15**(2): 313~317

[3] Panagiotopoulos P D. Inequality problems in mechanics and applications[A]. In: Convex and Nonconvex Energy Functions. Basel: Birkhauser, 1985, 10~25

[4] Hlavacek J, Haslinger J, Necas J, Lovisek J. Solution of Variational Inequalities in Mechanics [M]. New York: Springer, 1988

[5] Panagiotopoulos P D. Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1993

[6] Panagiotopoulos P D. Coercive and semicoercive hemivariational inequalities[J]. Nonlinear Analysis, 1991, **16**(2): 209~231

[7] Panagiotopoulos P D. Hemivariational inequality and Fan_variational inequality, new applications and results[J]. Atti Sem Mat Fis Univ Modena, 1995, **43**(1): 159~191

[8] Naniewicz Z. On the existence of solutions to the continuum model of delamination[J]. Nonlinear Analysis, 1993, **20**(4): 481~507

[9] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York: Wiley, 1983

[10] 张恭庆. 临界点理论及其应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1986

[11] Mustonen V. Mappings of monotone type: Theory and applications[A]. Proceedings of the International Spring School: Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Vol. **4**, Teubner zur Mathematik, Band, 1990, **119**(1): 104~126

[12] Browder F E, Hess P. Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces[J]. J Funct Anal, 1972, **11**(2): 251~294


# On Quasilinear Elliptic Hemivariational Inequalities


Liu Zhenhai

Department of Mathematics, Changsha University of Electric Power, Hunan 410077, P R China



**Abstract:** In the present paper, quasilinear elliptic hemivariational inequalities as a generalization to nonconvex functionals of the elliptic variational inequalities are studied. This extension is strongly motivated by various problems in mechanics. By using the notion of the generalized gradient of Clarke and the theory of pseudomonotone operators, the existence of solutions is proved.



**Key words:** hemivariational inequalities; elliptic problems; existence results