

裂纹问题的非局部弹性力学分析^{*}

赵明¹, 程昌钧², 刘国宁¹, 沈亚鹏³

¹ 机械工业部 郑州机械研究所, 郑州 450052;

² 上海大学 力学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

³ 西安交通大学 工程力学系, 西安 710049

摘要: 求解并给出非局部弹性力学平面问题的单位集中不连续位移基本解, 基于这些基本解和经典弹性力学中的不连续位移边界积分方程_边界元方法, 提出了一种非局部弹性力学平面问题的一般解法. 利用该解法, 研究分析了 Griffith 裂纹、边缘裂纹等断裂力学中基本的但又很重要的问题. 结果表明, 裂纹前沿的应力集中系数与裂纹长度有关, 给出了裂纹长度对断裂韧性 K_{Ic} 的影响. 所得结果与已有实验结果一致.

关键词: 裂纹; 边界积分方程; 边界元方法; 非局部弹性力学; 基本解

分类号: O346.1; O343 **文献标识码:** A

引 言

基于经典连续统理论的断裂力学理论已解决了很多重要问题, 但是用于与材料微结构尺度相关的层次上就遇到了困难. 例如短裂纹问题的一些现象和断裂机理还未能很好地加以解释^[1,2].

由 Eringen^[3] 等建立和发展的非局部弹性力学理论, 成功地把经典的连续介质理论和原子点阵力学理论结合起来, 考虑了微结构长程力的影响. 非局部力学理论用在断裂领域内已取得了重要成果, 例如在非局部理论的框架下, 裂纹尖端的应力是有界的, 从而经典的最大拉应力准则仍可用于断裂力学问题^[5~8,16~21]. 再如: 实验证实, K_{Ic} 是一个与微结构尺寸有关的材料参量^[4] 等等. 然而, 非局部弹性力学问题的解法这一问题仍没有很好地解决, 因此就限制了这一理论的进一步应用. 到目前为止, 所研究的对象大都为无限大域中的 Griffith 裂纹问题. 为此, 本文提出了非局部弹性力学问题的一种一般解法. 利用这一解法研究了 I、II、I-II 复合型裂纹及边缘裂纹问题, 从理论上解释短裂纹的一些现象, 取得了与实验一致的结果.

1 基本方程

在不考虑体力和惯性力时, 均匀各向同性非局部弹性力学平面问题的基本方程为^[5,7]:

* 来稿日期: 1997_10_06;

基金来源: 国家自然科学基金资助项目(59375192); 机械工业技术发展基金资助项目(95JA10102); 河南省自然科学基金资助项目(984052100)

作者简介: 赵明 (1963~) 男, 高级工程师, 博士

$$t_{ij,j} = 0, \quad (i, j = 1, 2), \tag{1.1}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{1.2}$$

$$t_{ij} = \int_{\Omega} \alpha(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \sigma_{ij}(x'_1, x'_2) d\Omega(x'_1, x'_2), \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \tag{1.4}$$

其中 t_{ij} , e_{ij} 和 u_i 分别为应力、应变和位移, 这里 $i, j = 1, 2$. λ 和 μ 为Lame 常数. δ_{ij} 为Kronecker 符号. α 为核函数, 对于平面问题可取为:

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\frac{k}{a} \right]^2 \exp \left\{ - \left[\frac{k}{a} \right]^2 [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2] \right\}, \tag{1.5}$$

其中 a 为晶格常数, k 由原子点阵模型拟合给出:

$$k = 1.65 \tag{1.6}$$

显然, 非局部理论和经典弹性理论的主要差别在于本构关系(1.3)、(1.4). 非局部理论表明, 一点 x 的应力 $t_{ij}(x)$ 和所有区域物质点上的应变 $e_{ij}(x')$ 有关. 正由于此, 增加了非局部弹性力学问题求解上的难度.

2 不连续位移基本解

无限大平面 x 轴上有一长为 $2l$ 的裂纹, 如图 1 所示. 裂纹上、下表面位移的间断量记为:

$$\left. \begin{aligned} \llbracket u_x \rrbracket &= u_x(x, 0^+) - u_x(x, 0^-), \\ \llbracket u_y \rrbracket &= u_y(x, 0^+) - u_y(x, 0^-), \end{aligned} \right\} x \in (-l, l). \tag{A1} \tag{2.1}$$

本文所求解的单位集中不连续位移基本解是分别满足下述条件和非局部弹性力学的基本方程(1.1) ~ (1.4) 的两个解:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left\{ \int_{-l}^l \llbracket u_x \rrbracket dl, \int_{-l}^l \llbracket u_y \rrbracket dl \right\} = \{1, 0\}, \tag{2.2}$$

$$\text{it } \lim_{l \rightarrow 0} \left\{ \int_{-l}^l \llbracket u_x \rrbracket dl, \int_{-l}^l \llbracket u_y \rrbracket dl \right\} = \{0, 1\}, \tag{2.3}$$

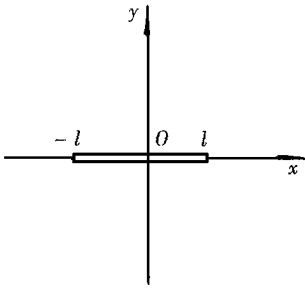


图 1 线裂纹

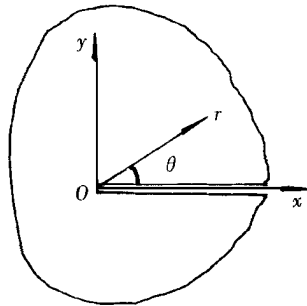


图 2 半无限长裂纹

为求得这两个基本解, 首先研究下面辅助问题的解.

2.1 辅助解

在无限大平面中, 正 x 轴上有一半无限长的裂纹(如图 2 所示). 沿裂纹的法线方向作用均布的不连续位移, 在极坐标系 (r, θ) 下, 裂纹线上的位移间断量为:

$$\left. \begin{aligned} \{ u_r \}_{\theta=0} &= u_r(r, 0) - u_r(r, 2\pi) = 0, \\ \{ u_\theta \}_{\theta=0} &= u_\theta(r, 0) - u_\theta(r, 2\pi) = b. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

参考 Eringen^[17] 的解法, 适合这一问题的经典解可表示为:

$$\alpha_{rr} = \frac{A}{r} \cos \theta, \quad \alpha_{\theta\theta} = \frac{A}{r} \cos \theta, \quad \alpha_{r\theta} = \frac{A}{r} \sin \theta, \quad (2.5)$$

它满足平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\alpha_{rr} - \alpha_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\alpha_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

在(2.5)式中, A 为常数.

由位移_应变关系及本构关系

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = A \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \frac{\cos \theta}{r}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = A \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \frac{\cos \theta}{r}, \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] = \frac{A}{2\mu} \frac{\sin \theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

得到位移

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{A}{2\mu} \left[(1-2\nu) \ln r \cdot \cos \theta + 2(1-\nu) \theta \sin \theta \right] + \\ &\quad \left[B - \frac{A(1-\nu)}{\mu} \cos \theta - C \sin \theta, \right. \\ u_\theta &= \frac{A}{2\mu} \left[-(1-2\nu) \ln r \cdot \sin \theta + 2(1-\nu) \theta \cos \theta \right] - B \sin \theta - C \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

这里 B 和 C 为常数, 与刚体位移有关.

$$A = - \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}. \quad (2.9)$$

利用(2.5)式很容易得到以直角坐标 (x, y) 表示的非局部应力场. 根据下述积分

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(\beta \cos x) \sin(mx) dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \exp(\beta \cos x) \cos(mx) dx &= 2\pi I_m(\beta), \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

式中的 $I_m(\beta)$ 为 m 阶修正的 Bessel 函数, 经过冗长的运算推导, 得到非局部应力场:

$$\left. \begin{aligned} t_{rr} &= \left\{ \frac{k}{a} \frac{A}{\rho} [1 - \rho^2 (1 - e^{-\rho^2})] \cos \theta, \right. \\ t_{\theta\theta} &= \left\{ \frac{k}{a} \frac{A}{\rho} [1 - 2e^{-\rho^2} + \rho^2 (1 - e^{-\rho^2})] \cos \theta, \right. \\ t_{r\theta} &= \left\{ \frac{k}{a} \frac{A}{\rho} [1 - \rho^2 (1 - e^{-\rho^2})] \sin \theta, \right. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

式中 $\rho = kr/a$.

容易验证, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 非局部应力场(2.11)式没有奇性.

在切线方向作用均布的不连续位移问题的解由 Eringen 给出^[17].

2.2 单位集中不连续位移基本解

利用上述两个辅助问题的解(2.11)式及 Eringen 的解^[17], 可很容易导出满足(2.3)、(2.2)的两个基本解. 为了节省篇幅, 直接给出这两个基本解, 形式为:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx}(r, \theta) &= t_{rr}^* \cos^2 \theta + t_{\theta\theta}^* \sin^2 \theta - 2t_{r\theta}^* \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad 2[(\overset{\circ}{t}_{rr} - \overset{\circ}{t}_{\theta\theta}) \sin \theta \cos \theta + \overset{\circ}{t}_{r\theta}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \sin \theta, \\ t_{yy}(r, \theta) &= t_{rr}^* \sin^2 \theta + t_{\theta\theta}^* \cos^2 \theta + 2t_{r\theta}^* \sin \theta \cos \theta - \\ &\quad 2[(\overset{\circ}{t}_{rr} - \overset{\circ}{t}_{\theta\theta}) \sin \theta \cos \theta + \overset{\circ}{t}_{r\theta}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \sin \theta, \\ t_{xy}(r, \theta) &= (t_{rr}^* - t_{\theta\theta}^*) \sin \theta \cos \theta + t_{r\theta}^*(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \\ &= [(\overset{\circ}{t}_{rr} - \overset{\circ}{t}_{\theta\theta})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 4\overset{\circ}{t}_{r\theta} \sin \theta \cos \theta] \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

其中对应于(2.3)式有

$$\left. \begin{aligned} t_{rr}^* &= \left(\frac{k}{a}\right)^2 \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ [\rho^2 + 2\rho^2 e^{-\rho^2} - 3\rho^4(1 - e^{-\rho^2})] \cos^2 \theta - \right. \\ &\quad \left. [\rho^2 - \rho^4(1 - e^{-\rho^2})] \sin^2 \theta \right\} \equiv \\ &\quad f_1(\rho) \cos^2 \theta + f_2(\rho) \sin^2 \theta, \\ t_{\theta\theta}^* &= \left(\frac{k}{a}\right)^2 \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ [\rho^2 - 4\rho^2 e^{-\rho^2} - 4e^{-\rho^2} + 3\rho^4(1 - e^{-\rho^2})] \cos^2 \theta - \right. \\ &\quad \left. [\rho^2 - 2\rho^2 e^{-\rho^2} + \rho^4(1 - e^{-\rho^2})] \sin^2 \theta \right\} \equiv \\ &\quad f_3(\rho) \cos^2 \theta + f_4(\rho) \sin^2 \theta, \\ t_{r\theta}^* &= 2\left(\frac{k}{a}\right)^2 \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} [\rho^2 + \rho^2 e^{-\rho^2} - 2\rho^4(1 - e^{-\rho^2})] \sin \theta \cos \theta \equiv \\ &\quad f_5(\rho) \sin \theta \cos \theta, \\ \overset{\circ}{t}_{rr} &= f_2(\rho) \cos \theta, \\ \overset{\circ}{t}_{\theta\theta} &= f_4(\rho) \cos \theta, \\ \overset{\circ}{t}_{r\theta} &= f_2(\rho) \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

对应于(2.2)式有:

$$\left. \begin{aligned} t_{rr}^* &= -f_5(\rho) \sin \theta \cos \theta, \\ t_{\theta\theta}^* &= -\frac{\mu}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{k}{a}\right)^2 [\rho^2 - 2e^{-\rho^2} - 3\rho^2 e^{-\rho^2} + \\ &\quad 2\rho^4(1 - e^{-\rho^2})] \sin \theta \cos \theta \equiv \\ &\quad f_6 \sin \theta \cos \theta, \\ t_{r\theta}^* &= f_1(\rho) \cos^2 \theta + f_2(\rho) \sin^2 \theta, \\ \overset{\circ}{t}_{rr} &= -f_2(\rho) \sin \theta, \\ \overset{\circ}{t}_{\theta\theta} &= -f_4(\rho) \sin \theta, \\ \overset{\circ}{t}_{r\theta} &= f_2(\rho) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

3 裂纹问题的非局部弹性力学解法

首先, 看一下非局部弹性力学边值问题的提法.

对于给定的区域 Ω , 边界为 S , 基本方程为(1.1) ~ (1.4). 由经典的弹性力学边值问题

的提法,很自然地给出下述两类边界条件:

在 S_u 上,给定位移

$$u_i = \bar{u}_i, \tag{3.1}$$

在另一部分边界 S_t 上给定面力

$$t_{ij}n_j = \bar{t}_i, \tag{3.2}$$

其中 n_i 为边界 S 的外法线方向。当然,(3.1)和(3.2)式的适当组合,给出第三类边界条件,即混合边界条件。

接下来,考虑无限域中的裂纹问题。这时边界仅是裂纹的上、下表面。假设在裂纹线 S 的上、下表面作用的外力大小相等、方向相反,即

$$t_i(p^+) = -t_i(p^-), \quad p^+ \in S^+, p^- \in S^- \tag{3.3}$$

一般说来,这一条件在实际中总能被满足。由前面求得的单位集中不连续位移基本解,通过裂纹线上的不连续位移 $\llbracket u_k \rrbracket$, 得出非局部应力场:

$$t_{ij}(p) = \int_{S^+} t_{ijk}^*(p, q^+) \llbracket u_k(q^+) \rrbracket ds(q^+), \quad p \in \Omega, q^+ \in S^+, \tag{3.4}$$

其中 t_{ijk}^* 为 k 方向作用单位集中不连续位移基本解对应的应力场,注意到 t_{ijk}^* 无奇异性这一事实,将(3.4)代入(3.2)式,得到

$$\int_{S^+} n_j(p^+) t_{ijk}(p^+, q^+) \llbracket u_k(q^+) \rrbracket ds(q^+) = \bar{t}_i(p^+) \tag{3.5}$$

这就是非局部弹性力学中的不连续位移边界积分方程,它把裂纹线上的不连续位移同裂纹线上的面力联系起来。与经典问题的不连续位移边界积分方程一样,求解得到裂纹线上的不连续位移 $\llbracket u_i \rrbracket$, 从而使问题得以解决。

上述过程似乎可行,但是非局部弹性力学问题解的存在性这一问题仍没有很好地解决。对于 Griffith 裂纹问题,文[18]已证明,在应力边值条件(3.2)式下,问题是无解的。因此,文[18]认为应力边界条件应当保持经典弹性力学中的通常提法。在文[18]中,核函数取为

$$\alpha(x_1, x_2; x_1', x_2') = \frac{2(a/2)^4}{\pi[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (a/2)^2]^{3/2}} \tag{3.6}$$

所以本文也仍应用经典的应力边界条件的提法,这样,对应于(3.5)式的不连续位移边界积分方程为:

$$\int_{S^+} T_{ij}^*(p^+, q^+) \llbracket u_j(q^+) \rrbracket ds(q^+) = \bar{t}_i(p^+), \tag{3.7}$$

其中 T_{ij}^* 是经典弹性力学中的单位集中不连续位移基本解的面力^[22]。

求解(3.7)式,得到裂纹线上的不连续位移,代入(3.4)式求得非局部应力场,这就是本文给出的断裂问题的非局部弹性力学求解方法。

4 Griffith 裂纹的非局部弹性力学分析

这一问题是断裂力学中的基本问题。

4.1 I 型裂纹

如图3所示,无限大域中有一长为 $2l$ 的裂纹,在裂纹上、下表面作用均布压力 t_0^I 。

利用本文的解法,计算给出裂纹前沿的应力分布如图4所示,图中 $T_{yy}(x, 0) = t_{yy}(x, 0) + t_0^I$ 。

可以看出,裂尖附近的应力是有界的,但在裂纹前沿存在应力集中,裂纹两端的最大应力

在点 $(l + 0.6a, 0)$ 和 $(-l - 0.6a, 0)$ 附近。当裂纹充分长时, 最大应力 t_{\max}^I 可表示为

$$t_{\max}^I = 0.771 \sqrt{\frac{kl}{a}} t_0^I \quad (4.1)$$

根据最大拉应力理论, 当 t_{\max}^I 达到“粒子”(原子、分子等) 之间的内聚强度 t_c 时, 即

$$t_{\max}^I = t_c \quad (4.2)$$

裂纹将开裂, 对给定的材料, t_c 是依赖于断裂发生的层次的一个材料常数。

4.2 II型裂纹

对图 5 所示的 II 型裂纹, 计算给出裂纹两端的最大拉应力在点 $(l - 0.7a, -1.2a)$ 和 $(-l + 0.7a, 1.2a)$ 附近。当裂纹足够长时, 最大拉应力 t_{\max}^{II} 为:

$$t_{\max}^{II} = 0.788 \sqrt{\frac{kl}{a}} t_0^{II} \quad (4.3)$$

开裂角为:

$$\theta = 68.4^\circ \quad (4.4)$$

与文[18] 基本一致。

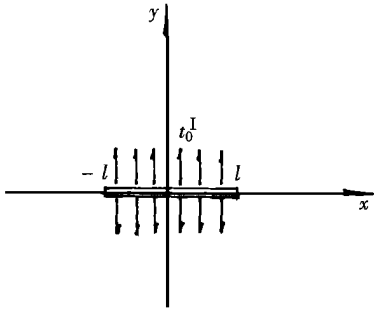


图 3 I 型裂纹

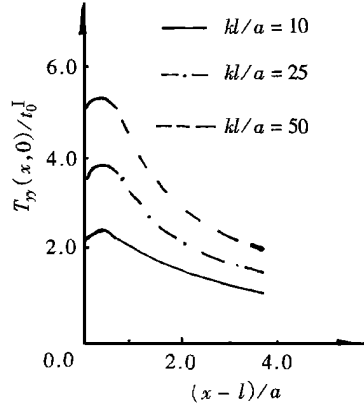


图 4 I 型裂纹前沿的应力分布

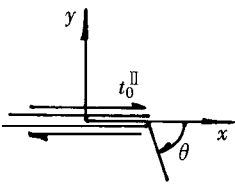


图 5 II 型裂纹

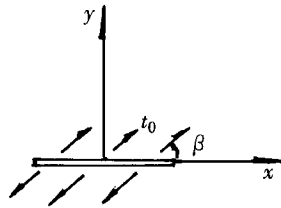


图 6 I-II 型裂纹

4.3 I-II 复合型裂纹

在裂纹上、下表面作用均布面力 t_0 , 有

$$t_0^I = t_0 \sin \beta, \quad t_0^{II} = t_0 \cos \beta \quad (4.5)$$

如图 6 所示。

用本文方法, 计算给出断裂曲线和断裂角, 如图 7 和图 8。可以看出, 本文结果与其它结果吻合较好^[11~14, 18]。

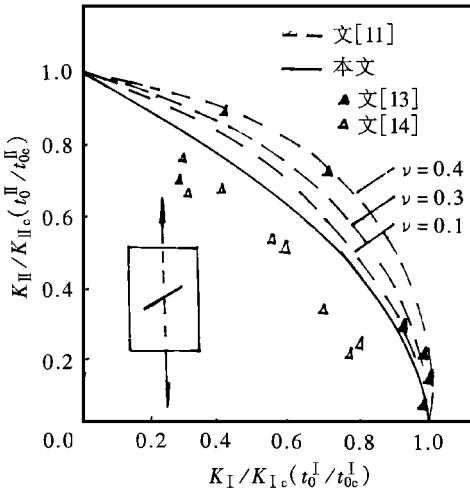


图7 复合型断裂曲线

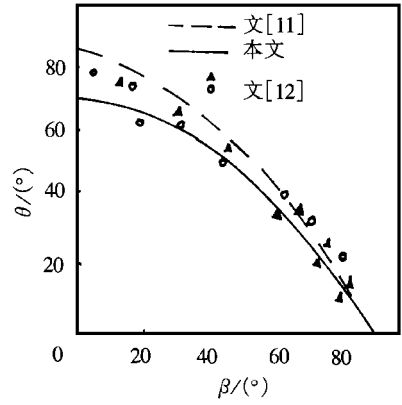


图8 断裂角

5 半无限平面的边缘裂纹

边缘裂纹是断裂力学中的另一重要问题。本文利用非局部理论对这一问题进行研究。

如图9所示, 裂纹长度为 l , 裂纹面上作用均布力 t_0 , 裂纹前沿的量纲一的应力集中因数:

$$F = t_{\max}/0.771 \sqrt{\frac{kl}{a}} t_0, \tag{5.1}$$

在图10中给出。

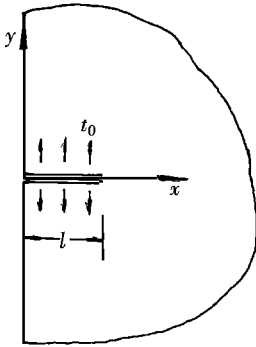


图9 边缘裂纹

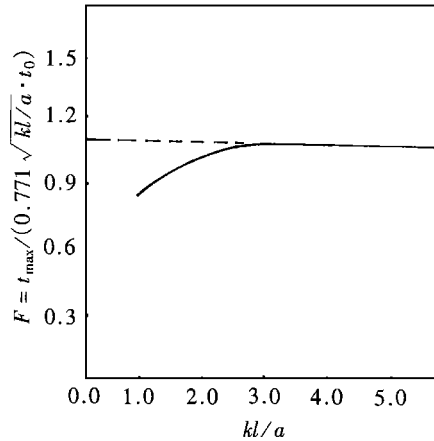


图10 边缘裂纹的应力集中因数

结果表明, 当裂纹足够长时 ($kl/a \geq 10^3$), F 为一常数 1.12^[12], 这正是经典断裂力学中的自由表面修正系数^[12]。而在裂纹不很长时 ($kl/a < 10^3$), F 是变化的, 随着裂纹长度的减少, 应力集中系数变小。继而裂纹前沿最大应力可表示为:

$$t_{\max} = F \cdot 0.771 \sqrt{\frac{kl}{a}} t_0. \tag{5.2}$$

根据最大拉应力准则, 当 t_{\max} 达到临界值 t_c 时, 裂纹将开裂, 这时按经典断裂力学的术语

来讲, 应力强度因子 K_{Ic} 达到临界值 K_{Ic}^* 由(5.2)式, 我们得到:

$$K_{Ic} = 1.79 \sqrt{at_c} / F \quad (5.3)$$

对于给定的材料和断裂发生的层次, t_c 和 a 是常数, 从而可以看出, K_{Ic} 并非材料常数。

接下来, 我们看一下与有关试验结果的对比。根据文[2]的关于 60Si2MnA 脆性材料的试验结果, 裂纹充分长时,

$$K_{Ic} = 41.95 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2} \quad (5.4)$$

晶粒度在 7 级和 8 级之间^[15], 因此可取 $a = 27 \mu\text{m}$, 根据(5.3)式, 得到当裂纹较短时, 断裂韧性 K_{Ic} 随裂纹长度的变化如图 11 所示, 与试验结果基本一致。也就是说, 当裂纹较短时, 断裂力学中的 K_{Ic} 并不是一个材料常数, 此时应考虑微结构的影响。这一现象用经典的断裂力学理论是无法解释的。

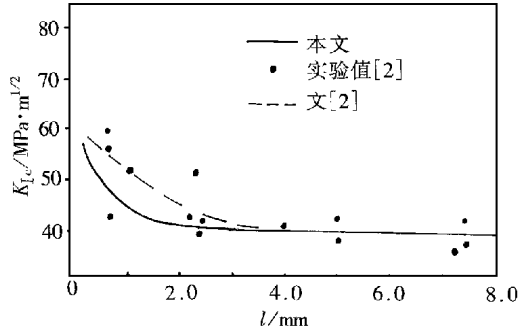


图 11 计算结果 K_{Ic} 与实验结果的对比

6 结 论

本文提出了非局部弹性力学问题的一种解法。利用该解法, 研究分析了断裂力学中的几个重要问题。在非局部力学理论的框架下, 裂纹前沿的应力是有界的, 但存在应力集中, 因而经典的拉应力准则仍可应用于断裂力学问题。有关结果表明, 当裂纹较短时, 应当考虑材料的微结构的影响。非局部力学理论为断裂力学问题的研究提供了一种新的方法。

参 考 文 献

- [1] Li Q F. A study about J_i and δ_i in three_point bend specimens with deep and shallow notches[J]. Eng Fracture Mech, 1985, **22**(1): 9~ 15
- [2] 胡胜海, 李庆芬, 藩信吉. 裂纹深度和形状对断裂韧度的影响[Z]. 见: 第六届全国断裂学术会议文集[C]. 杭州: 中国金属学会, 中国力学学会, 中国航空学会, 中国机械工程学会, 1991, 262~ 265
- [3] Erin en A C, Edelen D G B. On nonlocal elasticity[J]. Int J Engng Sci, 1992, **10**(3): 223~ 248
- [4] Ilcewicz L, Narasimban M, Wilson J. An experimental verification o nonlocal racture criterion[J]. Engng Fracture Mech, 1981, **14**(4): 801~ 808
- [5] Erin en A C, Spezial C G, Kim B S. Crack tip problem in nonlocal elasticity[J]. J Mech Phy Solids, 1977, **25**(5), 339~ 355
- [6] Ramabraham B, Paraeswara Rao M. Line crack in an elastic plates subject to varyin internal pressure in nonlocal elasticity [J]. Indian J Pure Appl Math, 1985, **16**(6): 661~ 672
- [7] Erin en A C. Line crack subject to antiplane shear[J]. Engng Fracture Mech, 1979, **12**(2): 211~ 219
- [8] Erin en A C. On continuous distributions o dislocations in nonlocal elasticity[J]. J Appl Phys, 1984, **56**(10): 2675~ 2680
- [9] Zhao Min hao, Liu Yuanjie, Chen Chan jun. Boundary_inte ral equations and the boundary_element method or three_dimensional racture mechanics[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1994, **13**(4): 333~ 338
- [10] Zhao Min hao, Chen Chan jun, Liu Yuanjie, et al. The analytical method o nonlocal elasticity and its application in racture mechanics[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1995, **8**(S. Issue): 42~ 45
- [11] Sih G C. Mechanics of Fracture[M]. Vol 1, Leyden, The Netherland Noordho International Pub-

- lishin , 1973
- [12] Zhao Yishu. A strain energy criterion for mixed mode crack propagation[A]. In: C Ouyan , M Sakata, C L Chow ed. Proceedings of International Conference on Fracture and Fracture Mechanics [C]. Shan hai, P. R. China: Fudan University Press, 1987, 206~ 210
- [13] 赵廷仕, 赵诒枢, 王元汉, 等. 复合型断裂准则的实验研究[J]. 华中工学院学报, 1985, **13**(1): 47~ 50
- [14] Shah R C. Fracture analysis[Z]. ASTM STP560, 1973, 29
- [15] GB6394_86 金属平均晶粒度测定方法, 1986[S]. 见: 中国国家标准汇编[S]. 70, 北京: 中国标准出版社, 1990, 716~ 737
- [16] Eringen A C. Interaction of a dislocation with a crack[J]. J Appl Phys, 1983, **54**(12): 6811~ 6817
- [17] Eringen A C. Edge dislocation in nonlocal elasticity[J]. Int J Engng Sci, 1977, **15**(3): 177~ 183
- [18] 程品三. 脆性断裂的非局部力学理论[J]. 力学学报, 1992, **23**(3): 329~ 338
- [19] 虞吉林, 郑哲敏. 一种非局部弹塑性连续体模型与裂纹尖端附近的应力分布[J]. 力学学报, 1984, **16**(5): 485~ 494
- [20] 王锐. 非局部弹性力学中的裂纹问题[J]. 中国科学(A辑), 1989, **34**(10): 1056~ 1064
- [21] 高键, 戴天民. 用非局部弹性场研究圆盘裂纹问题[J]. 固体力学学报, 1989, **10**(4): 289~ 309
- [22] Crouch S L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method[J]. Int J Num Meth Engng, 1976, **10**(2): 301~ 343

The Analysis of Crack Problems with Non-Local Elasticity

Zhao Min hao¹, Chen Chan jun², Liu Guonin¹, Shen Yapen³

¹Zhengzhou Research Institute of Mechanical Engineering, Zhengzhou 450052, P R China;

²Department of Mechanics, Shanghai University; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China;

³Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P R China

Abstract: In this paper, the displacement discontinuity fundamental solutions(DDFS) corresponding to the unit concentrated displacement discontinuity or plane problems of nonlocal elasticity are obtained. Based on the displacement discontinuity boundary integral equation (DDBIE) and boundary element method (BEM), a method of analysis of crack problems in non-local elasticity with generalized purpose is proposed. By using this method, several important problems in fracture mechanics such as edge crack are studied. The study of edge crack shows that the stress concentration factor (SCF) near the crack tip is not a constant but varies with the crack length. With this result the effect of crack length on the fracture toughness K_{Ic} is studied. The results obtained in this paper are in accordance with the published ones.

Key words: crack; boundary integral equation (BIM); boundary element method (BEM); non-local elasticity, fundamental solution