

非线性尺规近似法在圆杆颈缩局部有限变形分析中的应用*

崔希民, 陈至达

中国矿业大学(北京), 北京 100083

摘要: 形变局部化和不稳定的研究是当前力学问题的一个热点, 其中最典型的问题是圆杆拉伸颈缩和滑移带的塑性分析。传统的微小变形弹塑性力学不能彻底解决此问题。本文采用以 S (应变) $_R$ (转动) 分解定理为基础的非线性尺规数值算法, 并应用计算机模拟优化技术求出圆杆拉伸轴对称塑性有限变形的局部应变分布与发展形态。

关键词: 非线性几何场论; 非线性尺规方法; 变形局部化

分类号: O39; TB12 **文献标识码:** A

引言

颈缩和剪切带是延性金属塑性不稳定变形破坏的主要形式, 也是实验中最常见的两种变形局部化现象。W. Johnson 认为变形局部化的研究可追溯到 1878 年 Tresca 实验工作的总结, 进入 70 年代以来, 变形局部化的研究更是材料、力学及工程工作者关注的课题。局部变形不仅存在于金属加工成型过程中, 也广泛存在于岩土工程中, 如边坡稳定中的滑移面就是典型的变形局部化问题。因此材料变形局部化已引起人们广泛关注, 并进行了大量的理论和实验研究。大多数关于变形局部化的研究是在 Hill^[1] 提出的基本框架基础上, 采用各种物性模型进行有限元数值模拟。例如 Pietruszczak 和 Mroz^[2] 采用 Coulomb 接触屈服函数, Tvergaard, Needleman 和 Lo^[3] 则假定材料满足宏观唯象角点塑性理论, Aravas^[4] 采用 Gurson 塑性模型, Ortiz, Leroy 和 Needleman^[5] 考虑了 J_2 软化物性方程, Ramakrishnan, Okada 和 Atluri^[6] 则采用了包含 J_2 流动和剪应力阈值的双屈服物性模型。

事实上, 在形变局部化区内, 不但塑性状态处处不同, 而且存在微元体的大变形与大转动, 研究此类力学问题必须采用有限变形力学理论。如应用小变形力学方法, 因误差大而不可靠。在传统的有限变形几何学中, 在应变度量上一般采用 Green 应变或极分解定理定义的应变。Green 应变尽管消除了刚性转动对形变度量的失真, 但却没有相应的转动张量与之匹配, Biot^[7] 在其增量力学著作中就指出 Green 应变是不合理的应变度量。极分解定理的左右分解则人为将物体客观形变对应于两种应变度量, 存在着非唯一性, 在物理意义上是不合理的, 数学证明只有当形变状态为各向均等扩张, 平面形变与平面转动次序才可以交换。

* 收稿日期: 1997_04_17; 修订日期: 1998_07_08

基金来源: 国家科委高科技基础研究基金资助课题

作者简介: 崔希民(1967~), 男, 讲师, 博士

目前在有限变形力学文献中, Green 应变张量常和 Cauchy 的应力定义配伍组成应变能的概念。事实上这是缺乏物理意义的。在小变形情况下, 应变能 U 的定义在单向伸长时为

$$[\sigma][\varepsilon] = \frac{F}{L^2} \frac{S}{L} = \frac{W}{V} = [U],$$

如采用 Green 应变定义

$$[\sigma][\dot{\varepsilon}] = \frac{F}{L^2} \frac{S^2}{L^2} \neq \frac{W}{V},$$

其中 F 为力, L 为长度, S 为伸长, W 为功, V 为体积, 但因应变是量纲一的量, 故易产生二者匹配的误解。合理的有限变形力学理论在有限力学^[8]中已有详细论述。

1 有限变形力学的基本理论

在非线性连续体力学中, 为了描述变形体的形变状态, 将 Euler 的经典刚体运动的动坐标法加以推广, 引入尺规变换的概念。物体的形变与转动在数学上看成是局部坐标系矢量场的尺规变换。在自然拖带参考系中, 设在初始时刻变形体中一点的局部坐标系基标矢量为 \mathbf{g}_i^0 , 形变后为 \mathbf{g}_i , 变换函数为 F , 变换 T 表示为:

$$T: \mathbf{g}_i^0 \rightarrow \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{g}_i = F_i^j \mathbf{g}_j^0, \quad F_i^j = \delta_i^j + u^j |_{i},$$

δ_i^j 为 Kronecker 符号, $u^j |_{i}$ 表示位移矢量沿初始基标的分量 u^j 对拖带坐标 x^i 的协变导数。

根据 S-R 分解定理, 任何可逆的线性微分变换函数 F 有唯一的加法分解:

$$F_i^j = R_j^i + S_j^i,$$

R_j^i 代表正交性质的转动张量, S_j^i 代表对称性质的应变张量。在张量空间的准确表达式为:

有限应变张量

$$S_j^i = \frac{1}{2}(u^i |_{j} + u^i |_{j}^T) - L_k^i L_j^k (1 - \cos \Theta), \quad (1.1)$$

局部转动张量

$$R_j^i = \delta_i^j + L_j^i \sin \Theta + L_k^i L_j^k (1 - \cos \Theta), \quad (1.2)$$

平均整旋角

$$\Theta = \pm \arcsin \left\{ \frac{1}{2} [(u^1 |_{2} - u^1 |_{2}^T)^2 + (u^2 |_{3} - u^2 |_{3}^T)^2 + (u^3 |_{1} - u^3 |_{1}^T)^2]^{1/2} \right\}, \quad (1.3)$$

局部转轴方位数

$$L_j^i = \frac{1}{2 \sin \Theta} (u^i |_{j} - u^i |_{j}^T). \quad (1.4)$$

在工程应用中, 张量分量必须化成物理分量计算。详细公式参见 [8]。和 S_j^i 共轭的应力张量 σ^i_j 是定义在同一自然拖带参考系中。运动方程可表示为

$$\rho w_i = \dot{\sigma}^i |_{j} + G_i, \quad (1.5)$$

上式中 ρ 为变形后单位体积质量, w_i 为加速度分量, G_i 为重力分量, $(|_{j})$ 表示在实时拖带系的协变导数。在工程应用中, 方程式 (1.5) 要化为用物理分量表达的形式。

由于非线性问题形变过程的计算须用增量方式表示, 而且在形变计算中, 力的作用面积和体积随时间而变, 所以必须采用应力速率公式:

$$\dot{\sigma}^i_j = \dot{\sigma}^i_j - \sigma_k^i \dot{S}_j^k + \sigma_j^k \dot{S}_k^i, \quad (1.6)$$

其中上标“·”表示对时间的导数。上式的计算方法与物理意义示例参见[8]、[9]。

2 有限变形的物性方程

上节所述的形变几何学和应力平衡方程在数学力学意义上是准确的公式。但物性方程是建立在材料物理性能的基础上,由于物性和物质分子与原子的结构排列直接相关,所以材料的物性方程实质上是物理方程,表达这种物理方程的数学表达式根本上是决定于实验事实。因物性方程要满足客观性条件的要求,所以合理的数学表达式应是张量方程。一个合理而实用的物性方程在[8, 10]中已建立。

在理论上,我们将物性方程分为二部分:畸变与体积应变。表示应变偏量 γ 增率, $\dot{\gamma}^i$, $\dot{\gamma}^j$ 分别表示弹性、塑性应变偏量增率,则增率方程表达为

$$\dot{\gamma}^i = \epsilon \dot{\gamma}^i + \rho \dot{\gamma}^i = \frac{1}{2G(1-\beta)} \dot{\tau}^i = \frac{1}{2G} \dot{\tau}^i + \frac{\beta}{2G(1-\beta)} \dot{\tau}^i, \quad (2.1)$$

上式中

$$\dot{\gamma}^i = S_j^i - \frac{1}{3} S_k^k \delta_j^i, \quad \tau^i = \sigma_j^i - \frac{1}{3} \sigma_k^k \delta_j^i, \quad (2.2)$$

其中 G 为材料抗剪弹性模量, β 为塑性参数(参见[8])。

体积应变增率

$$\dot{S}_i^i = \frac{1}{3k} \dot{\sigma}_i^i, \quad (2.3)$$

上式材料的体积模量 k 是 β 的演化参数。塑性参数 β 之值由实验测定,它是 von Mises 屈服强度 k 的函数或用等价的应变偏量的屈服强度 g 表达

$$k^2 = \tau^j \tau_j, \quad g^2 = \gamma_j^j \gamma_j^j. \quad (2.4)$$

(2.1) 式物性方程在计算中的应用证明能反映实验实质并具有计算简单的优点。

3 非线性有限变形的数值解法——非线性尺规近似法

在线性偏微分方程的近似解法中,有的数学家将 Ritz、Galerkin、最小二乘法近似列入残余法一类。非线性尺规近似法是属于残余法的一种新开拓。根据 S-R 分解定理(Stokes, Chen)建立的准确应变和局部转动公式,创立了一种可靠的直观几何凭据,使我们有可能充分利用计算机仿真技术逼近准确解。在已解答的问题中,它可以节省大量计算而所得结果仍然相当可靠。

考虑位移场 u 的非线性微分方程组,

$$N_a(x, t) = f(x, t), \quad x \in B, \quad (3.1)$$

$$C_a(x, t) = 0, \quad x \in \partial B, \quad \partial B = \partial B_p \cup \partial B_u \cup \partial B_c. \quad (3.2)$$

N_a 在有限变形力学中是高度非线性算子, $C_a(x, t)$ 是随时间而变的边界条件,包含力和位移。 ∂B_p 和 ∂B_u 为给定力和位移条件的边界部份, ∂B_c 为表面接触部分。我们定义

$$R(u) = N_a - f \quad (3.3)$$

为残余值。假设 $R(u) = 0$, 则 $U = u$ 为(3.1)的准确解。在实际问题中,因算子十分复杂,我们采用可行路线如下:

(1) 选定位移试函数

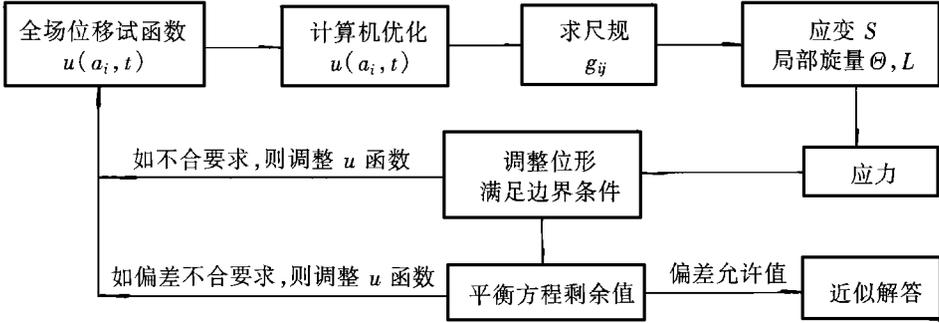
$$u^i = \dot{u}^i(x^1, x^2, x^3; a_1, a_2, \dots, a_n; t), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.4)$$

式中 x^i 为自然拖带坐标, a_i 为形状参数, t 为时间. 利用计算机技巧调整 a_i 参数, 使 u^i 函数满足已知几何条件, u^i 函数的选取主要根据经验和实验, 变形后, 一点 x^i 相对于初始参考系的坐标 x^i 为:

$$x^i(x^1, x^2, x^3; t) = x^i + u^i(x^1, x^2, x^3; a_1, a_2, \dots, a_n; t), \tag{3.5}$$

$$x^i(x^1, x^2, x^3; 0) = x^i; \tag{3.6}$$

(2) 求尺规和应变、应力的计算步骤如下:



应力的计算: 当公式(2.4)中 $g \leq g_y$ 或 $k \leq k_y$, (g_y, k_y) 为材料屈服时的 g, k 值, 此时应力_应变关系用全量形式; 当公式(2.4)中的 $g > g_y$, 应力_应变关系采用增量算法.

$${}^{(n+1)} \Delta S_j^i = {}^{(n+1)} S_j^i - {}^{(n)} S_j^i, \tag{3.7}$$

$${}^{(n+1)} \Delta \dot{\varphi}^j = 2G(1 - {}^{(n)} \beta) [{}^{(n)} \Delta S_j^i + \left(\frac{1}{2k(1 - {}^{(n)} \beta)} - \frac{1}{3} {}^{(n)} \Delta S_k^k \dot{\varphi}^j \right)], \tag{3.8}$$

上式中 k 为材料的容变模量, β 由实验曲线 β_k 或 β_g 确定. 应力增长率(静力问题):

$${}^{(n+1)} \Delta \dot{\varphi}^j = {}^{(n)} \ddot{\varphi}^j \Delta t = {}^{(n)} \dot{\varphi}^j \Delta t - {}^{(n)} \dot{\varphi}^j {}^{(n)} S_j^l \Delta t + {}^{(n)} \dot{\varphi}^j {}^{(n)} S_k^k \Delta t = {}^{(n)} \Delta \dot{\varphi}^j - {}^{(n)} \dot{\varphi}^j {}^{(n)} \Delta S_j^l + {}^{(n)} \dot{\varphi}^j {}^{(n)} \Delta S_l^l. \tag{3.9}$$

非线性尺规法以平衡方程余量估计计算精度. 在自然拖带系中, 当考虑静态并不计体力时, 平衡方程余量为

$$\text{Re } s(j) = \dot{\varphi}^j \parallel_i = \frac{\partial \dot{\varphi}^j}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^i \dot{\varphi}^m - \Gamma_{ji}^m \dot{\varphi}^m, \tag{3.10}$$

式中 Γ_{jk}^i 为 Christoffel 符号.

$$\begin{aligned} \text{Re } s(1) = & \frac{\partial \sigma_1^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_1^3}{\partial x^3} + \sigma_1^1(\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) - \sigma_2^2 \Gamma_{21}^2 - \sigma_3^3 \Gamma_{31}^3 + \\ & \sigma_1^2(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3) - \sigma_2^1 \Gamma_{11}^2 + \sigma_1^3(\Gamma_{13}^1 - \Gamma_{31}^1 + \\ & \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{33}^3) - \sigma_3^1 \Gamma_{11}^3 - \sigma_2^3 \Gamma_{21}^3 - \sigma_3^2 \Gamma_{31}^2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其余两方向的平衡余量同理可得. 用差商代替微商, 当 $\text{Re } s(j) = 0$ 时, 则计算结果为变形状态的真实反映. 而有限单元法是通过变分原理使平衡方程得以微弱满足.

4 圆杆颈缩局部有限形变分析

软钢圆杆拉伸出现局部颈缩现象以后, 经典微小形变的数学方法已不适用, 因其近似性将导致较大误差. 在圆柱自然拖带系中, 有限形变和有限转动的应变分量公式已由陈^[11]给出, 对轴对称问题 u^i 的物理分量可简化为

$$\hat{u}^1 \equiv \hat{u}^z = z - z, \quad \hat{u}^2 \equiv \hat{u}^\varphi = 0, \quad \hat{u}^3 \equiv \hat{u}^r = r - r, \tag{4.1}$$

有限应变分量

$$S_z^z = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^z}{\partial z} + 1 - \cos \Theta, \tag{4.2a}$$

$$S_\varphi^\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} u_r, \tag{4.2b}$$

$$S_r^r = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^r}{\partial r} + 1 - \cos \Theta, \tag{4.2c}$$

的注 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u^z}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^r}{\partial z} \right), \tag{4.2d}$

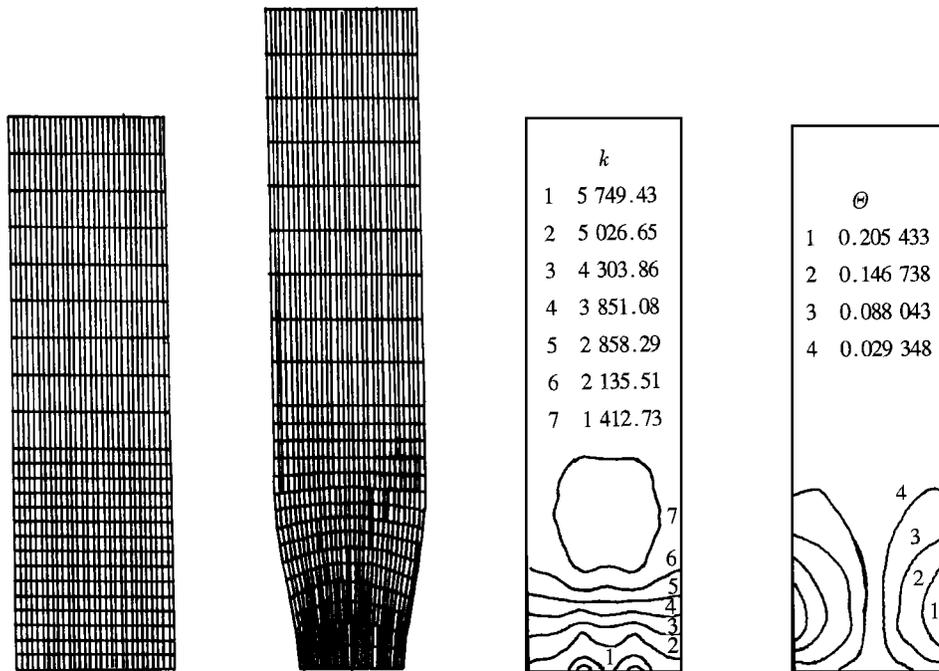
$$S_\varphi^r = S_z^\varphi = 0; \tag{4.2e}$$

平均整旋角

$$\sin \Theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^r}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u^z}{\partial r} \right); \tag{4.3}$$

转轴方位数

$$l_1 = 0, l_2 = 1, l_3 = 0. \tag{4.4}$$



(a) 初始位形

(b) 实时位形

(c) 塑性区的扩展

(d) 局部整旋

图 1

根据实验测定的拉伸变形结果, 选取位形试函数, 以外表面几何形状为基础·

$$u^r = - \frac{\Delta R}{R} \left[1 - \frac{z^2}{L^2} r e^{-\alpha^2/L^2} \right], \tag{4.5}$$

$$u^\varphi = 0, \tag{4.6}$$

$$u^z = z \left\{ \frac{\Delta L}{L} - b e^{-\alpha^2/L^2} \right\} - \left[8 \left(1 + \frac{r}{R} \right) - 4 \left(1 + \frac{r}{R} \right)^2 + \right.$$

$$\left\{ \left[1 + \frac{r}{R} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 5 - 0.25 \right\} \right\}, \quad (4.7)$$

特定的位移及边界条件为

$$u^r|_{r=0} = u^z|_{z=0} = 0, \quad u^r|_{r=R, z=0} = 0.33R, \quad u^z|_{z=\pm L} = 0.19L, \quad (4.8)$$

式中 R 为试件原半径, L 为试件半长, $L/R = 5$, 材料参数为 $\sigma_s/E = 1/300$, $\nu = 0.3$, 计算机模拟形状参数为 $a = 34.85$, $b = 0.145$, $c = 40.93$, 计算结果见图 1。

根据计算结果, 可以预测断裂面的模式。从图 1(c) 与(d) 中观察, 塑性区最大强度在中轴线平面, 因受限制形变, 中间最初出现脆性断面(见图 2(a)), 形成圆形裂纹。裂纹的扩张按最大转动梯度准则(王、陈)^[12] 确定, 裂纹呈环状扩展, 使断口边缘成杯状(图 2(b)), 这是软钢拉伸试件的典型断口形状。图 2(c) 表示杯口剪切带的细观断裂构造, 按 Gramberg 的观点, 在剪切带内出现张性雁行裂纹, 再又衍生次级裂纹导致总体断裂, 称为剪切二阶效应, 对此现象曹书瑞曾作过实验研究^[13]。

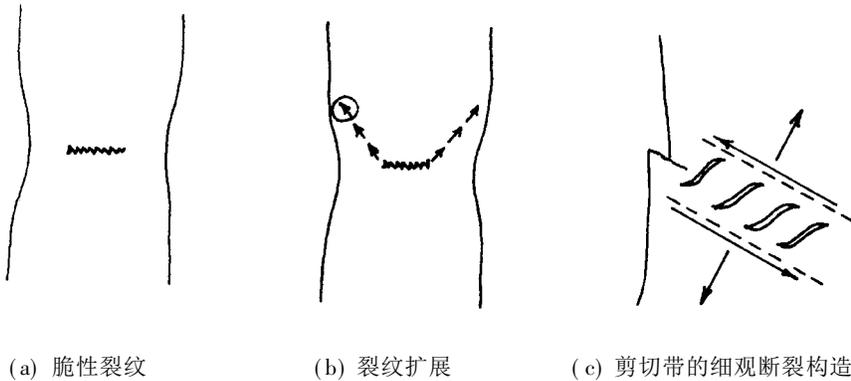


图 2

5 设定位移函数的局部化敏感性与误差的可视化

现将位形函数调整如下

$$u^r = -\Delta R \frac{r}{R} \left[\int_0^{A\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{z}{r} \right) e^{2\zeta^2} d\zeta - \int_0^{B\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{r} - 1 \right) e^{-\zeta^2} d\zeta \right], \quad (5.1)$$

$$u^\varphi = 0, \quad (5.2)$$

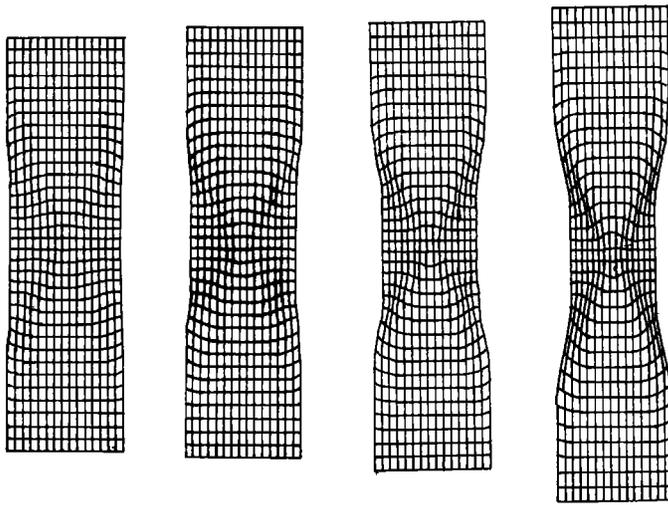
$$u^z = \Delta L \frac{z}{L} \left[1 - \int_0^{C\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{z}{r} \right) e^{\frac{8}{3}\zeta^2} d\zeta + \int_0^{D\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{r} - 1 \right) e^{-\zeta^2} d\zeta \right]. \quad (5.3)$$

按非线性尺规法进行计算机模拟, 其中位形参数 $A = B = 2.0$, $C = D = 1.0$, 位形变化如图 3 所示。

由图 3 可见, 函数(5.1)、(5.2)、(5.3) 将局部化区在外表面向伸长方向发展而在中间截面向内部发展, 表面的应力边界条件满足程度较差, 和真实形变位形偏差较大。一般我们将设定位移函数中的参量改变对位形变动的大小称为敏感性。在非线性尺规近似解法中, 对于函数类型及函数中参量的敏感性研究十分重要。另一方面设定函数的形变可视化, 使我们可以直观判断材料内部和边界是否符合真实形变情况的误差估计, 引导设定函数的修正。

6 结束语

本文通过对拉伸颈缩局部化的分析, 证明了非线性尺规法在解决材料弹塑性大变形问题



(a) $\Delta L = 3.4$, $\Delta R = 0.4$ (b) $\Delta L = 4.2$, $\Delta R = 0.7$ (c) $\Delta L = 5.0$, $\Delta R = 1.4$ (d) $\Delta L = 7.2$, $\Delta R = 2.0$

图3 位形演化 $A = B = 2.0$, $C = D = 1.0$

时是一种有效可行的近似数值解法。它可获得与实验现象相当吻合的结果,这种方法实际上是传统的 Ritz-Galerkin 近似解法和计算机模拟相结合的新方法。但由于非线性大变形问题的复杂性,如何快速高效地进行数值计算和误差估计,是人们关注的焦点。非线性尺规法是我们进行的一个初步探索,此法之形变可视化比有限元有其优点。后续工作正在研究之中。

最后,作者感谢刘夕才博士参与本文部分计算提供的帮助。

参 考 文 献

- [1] Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids [J]. J Mech Phys Solids, 1958, 6(3): 236
- [2] Pietruszczak St, Mroz Z. Finite element analysis of deformation of strain softening material [J]. Internat J Numer Methods Eng, 1981, 17(3): 327
- [3] Tvergaard V, Needleman A, Lo K K. Flow localization in the plane strain tension test [J]. J Mech Phys Solids, 1981, 29(2): 115
- [4] Aravas N, On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models [J]. Internat J Numer Methods Eng, 1987, 24(7): 1395
- [5] Ortiz M, Leroy Y, Needleman A, A finite element method for localized failure analysis [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1987, 61(2): 189
- [6] Ramakrishnan N, Okada H, Atluri S N. On shear band formation: II. Simulation using finite element method [J]. Internat J Plas, 1994, 10(5): 521
- [7] Biot M A. Mechanics of Incremental Deformation [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1965
- [8] 陈至达. 有理力学 [M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1988
- [9] 尚勇, 陈至达. 论拖带坐标系中应力的客观速率 [J]. 应用数学和力学, 1988, 10(2): 95~ 104
- [10] Chen Z D, Liu X C. Nonlinear geometric field theory and viscoplasticity of large deformation [A]. In: N R Scotts ed. MD_Vol, 96, Proc of the ASME Material Division [C]. Book No H1041A, 1995, 429~ 438

- [11] 陈至达, 杆板壳大变形理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995
- [12] Wang C, Chen Z D. Microrotation effects in material fracture and damage [J]. Eng Frac Mech, 1991, **38**(2,3): 147
- [13] 李书瑞, 吴立新, 吴国运. 15MnHP 钢拉伸变形过程的细观观察 [A]. 第三届全国细观力学研讨会 [C]. 杭州: 浙江大学, 1995, 142

The Application of Nonlinear Gauge Method to the Analysis of Local Finite Deformation in the Necking of Cylindrical Bar

Cui Ximin, Chen Zhida

Beijing Graduate School, China University of Mining & Technology, Beijing 100083, P R China

Abstract: Localized deformation and instability is the focal point of research in mechanics. The most typical problem is the plastic analysis of cylindrical bar necking and shear band under uniaxial tension. Traditional elasto plastic mechanics of infinitesimal deformation can not solve this problem successfully. In this paper, on the basis of $S(\text{strain})_R(\text{rotation})$ decomposition theorem, the authors obtain the local strain distribution and progressive state of axial symmetric finite deformation of cylindrical bar under uniaxial tension adopting nonlinear gauge approximate method and computer modelling technique.

Key words: nonlinear geometric field theory; nonlinear gauge method; localized deformation