应用数学和力学, 第 20 卷 第 3 期(1999 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)03_0314_18

抛物型发展微分包含的解与解集的性质

王志华

山东电力高等专科学校工商系, 济南 250002

(协平推荐)

摘要: 在 Banach 空间中研究与时间有关的抛物型发展微分包含, 这一问题与非线性分布参数控制系统的研究密切相关 我们证明了 mild_解的存在性, 同时研究了解集的拓扑性质 本文的研究发展和推广 J. P. Aubin 等人的方向和结果

关键词: 发展算子; 集值映象; 微分包含; mild_解; 不动点定理
分类号: O177 5 文献标识码: A

引 言

近十多年来, 由于控制论和经济学领域的需要, 使得微分包含的理论研究得到了深入的进展, 相继取得一些重要的结果 关于对微分包含理论的系统叙述, 可以参考[1] 为了适应控制论的需要, 文[2~ 4] 相继研究了以下形式的半线性微分包含的初值问题:

$$x\ (t) + Ax(t) \quad F(t, x(t)), \text{a. e. } t \quad I, x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, A 是一个线性半群(紧的或者是等度连续的) 的生成元, X 是一个可分的 Banach 空间, $I = [0, T]$ 是直线上的某个有限区间, $F: I \quad X \quad 2^X \backslash$ 是一个集值映象 利用不动点方法, [2 ~ 5] 分别在不同的条件下证明了问题(1)mild_解的存在性 已有的结果所存在缺陷是算子 A 与时间 t 无关, 反映在控制问题中, 即是受控系统为时不变系统, 这自然是一个需要进一步研究的问题 本文的目的是在一般的 Banach 空间中研究如下的具有时变因素的抛物型微分包含:

$$x\ (t) + A(t)x(t) \quad F(t, x(t)), \text{a. e. } t \quad I, x(0) = x_0 \tag{2}$$

我们证明了凸值情形的存在性定理, 同时研究了解集的性质, 所得到的结论既为非线性分布参数控制问题的研究提供了一个基础, 同时也相应地改进和推广了文献[2~ 4] 中的主要结论

1 预 备 知 识

设 是拓扑空间, X 是一个 Banach 空间, $F: \quad 2^X \backslash$ 是一个集值映象 称 F 是上半连续的, 如果对于 X 的任意一个闭集, B, $F^-(B) = \{x \quad : F(x) \quad B\}$ 是一个闭集 称 F 是下半连续的, 如果对于 X 中任意一个开集 O, $F^-(O)$ 是一个开集 设(,) 是一个可测空间, 称 F 是可测的, 如果对于 X 中 Borel 可测子集 B, $F^-(B)$ 事实上, F 是一个可

收稿日期: 1997_11_22; 修订日期: 1998_12_05
作者简介: 王志华(1959~), 男, 博士, 副教授

测映象当且仅当定义在$(\ ,\ )$上的函数$x \quad d(y, F(x))$对于任意的$y \quad X$是可测的　称$f: \quad X$是F的一个选择, 如果对任意的$x \quad , f(x) \quad F(x)$　当f又是连续(可测)函数时, 称为是F的一个连续(可测)选择　我们以$C[I, X]$表示定义在I上所有连续的X_值函数按照范数$\|x\|_0 = \sup\{\|x(t)\| : t \quad I\}$所形成的Banach空间, 又以$L^p[I, X](1 \quad p \quad)$表示$I$上的所有Lebesgue_Bochner可积函数按照范数包含$\|x\|_p = \left(\int_0^T \|x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$形成的Banach空间　记$S_F^p$集合$\{f \quad L^p[\ , X]: f(\ ) \quad F(\ )\ \text{a.e.}\}$　按照[5], 我们知道$S_F^p \quad$当且仅当有$\inf\{\|y\| : y$个$F(x)\} \quad L^p[\ , X]$, 特别地, 如果我们记$|F(x)| = \max\{\|y\| : y$反映$F(x)\}$, 则当存在一个$g(\ ) \quad L^p[\ , R_+]$使得有$|F(x)| \quad g(x)$ a.e.时, 必有S_F^p

设X是一个Banach空间, 对于$0 \quad s \quad t \quad T$, $U(t, s)$是X上的有界线性算子, 如果有

1) $U(t, t) = I \quad (0 \quad t \quad T)$;

2) $U(t, \ )U(\ , s) = U(t, s) \quad (0 \quad s \quad \quad t \quad T)$;

3) $U(\ , s)$对$[s, T]$在X上强连续, $U(t, \ )$对$[0, t]$在X上强连续

则我们称双参数有界线性算子族$\{U(t, s): 0 \quad s \quad t \quad T\}$是$X$上的发展算子

我们首先考察以下的抽象Cauchy问题

$$x(t) + A(t)x(t) = f(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{3}$$

其中, $f(\ ) \quad L^1[I, X]$, 当$f = 0$时, 由(3)得到相应的齐次时变发展方程

$$x(t) + A(t)x(t) = 0, \qquad x(0) = x_0, \tag{4}$$

我们对(3)和(4)中的算子A作如下的假设:

(A1)　对任意的$t \quad [0, T]$, $A(t)$是X上的闭稠定算子, 并且其定义域$D(A(t))$与t无关　我们以后用$D(A)$表示相关的定义域

(A2)　对任意的$t \quad [0, T]$, $\{\ \ C: \text{Re} \quad 0\} \quad (A(t))$, 并且对满足$\text{Re} \quad 0$的复数　有

$$\|R(\ ; A(t))\| \quad \frac{c_0}{1 + |\ \ |},$$

其中, $R(\ ; A(t)) = (\ I + A(t))^{-1}$表示算子$A(t)$预解式, 而$c_0$表示一个与时间无关的常数

(A3) 对任意的$t, \ , s \quad [0, T]$有

$$\|[A(t) - A(\ )]A^{-1}(s)\| \quad c|t - \ |\ \quad (0 < \quad 1)$$

引理1　设假定(A1)~(A3)成立, 则存在一个发展算子$U(t, s)(0 \quad s \quad t \quad T)$满足以下条件:

1) $U(t, s)$关于t在$[0, T]$上强可微, 并且$U(t, s)/\ t$是线性有界算子;

2) $U(t, s) \quad D(A), 0 \quad s < t \quad T$;

3) $U(t, s)/\ t + A(t)U(t, s) = 0\ (0 \quad s < t \quad T)$, $U(s, s) = I$;

4) 存在一个常数$K > 0$使得对$\quad [0, 1]$, 有

$$\|A\ (t)U(t, s)\|_0 \quad K/(t - s)\ (0 \quad s < t \quad T),$$

其中, A表示算子A的分数幂, 定义见[6, p355];

5) 对任意的$x_0 \quad X$, 方程(4)有唯一的解$x(t) = U(t, 0)x_0(t \quad I)$

证明　见[6](定理5 8 4, 引理5 8 6, p381~393)

引理 2 设(A1) ~ (A3) 成立, $f \quad L^1[I, X]$, 则发展方程(3) 存在唯一的 mild_ 解

$$x \quad C[I, X], \quad x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)f(s)\mathrm{d}s$$

证明 见[6](定理5 8 5, p387)

我们定义一个映象 $G_t: L^1[I, X] \quad C[I, X]$, 对 $f \quad L^1[I, X]$,

$$G_t(f) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)f(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

则对于任意的 $f \quad L^1[I, X]$, $G(f)$ 是一个连续的 X_ 值函数

我们称 $x(\ ) \quad C[I, X]$ 是发展微分包含问题(4) 的一个mild_解, 如果存在 F 的一个可测选择 f 使得 x 是初值问题(3) 的一个 mild_ 解

2 存 在 性

本节我们研究当 F 取凸值时, 发展微分包含(2)mild_解原存在性, 我们首先证明下面的引理

引理 3 设 X 是 Banach 空间, $F: I \quad D(A) \quad 2^X \backslash$ 取闭凸值, 且满足

(H1) $F(\ , x)$ 可测, $F(t, \ )$ 上半连续

(H2) 存在一个可积的函数 $k(t)$ 使得

$$F(t, x) \quad k(t)(1 + \quad A(t)x \quad) \quad (k(\ ) \quad L^1[I, T_+]),$$

则对任意的 $f \quad L^1[I, X]$, 我们有

(1) 映象 $t \quad H(t) = F(t, G_t f)$ 取闭凸值, 可测, 并且是积分有界的;

(2) 映象 $Z(f) = \left\{ g \quad L^1[I, X]: g(t) \quad F(t, G_t f) \right\}$ 取闭凸值, 并且上半连续

证明 由前面的说明, 映象 $t \quad G_t(f)$ 是连续的, 从而由假设知 $H(t)$ 是可测的, 再由 F 取闭凸值, 可知 H 取闭凸值, 我们现在证明 H 是积分有界的, 由引理 1, 我们有

$$A(t)G_t f \quad (c \quad x_0 \quad / t) + c\int_0^T (1/ t - s) \quad f(s) \quad \mathrm{d}s, \tag{6}$$

从而我们容易得到

$$\int_0^T \quad A(t)G_t f \quad dt < \quad (\quad f \quad L^1[I, X]) \tag{7}$$

又由假设可知:

$$H(t) \quad = \quad F(t, G_t f \quad C(1 + \quad A(t)G_t f \quad), \text{a. e.} \tag{8}$$

这样 H 是积分有界的, 结论(1) 证完 注意到引理的假设, Z 取闭凸值是显然的, 我们以下证明 Z 是上半连续的 因为 $F(t, \ )$ 上半连续, 于是由 $G_t f$ 关于 t 的连续性, 我们知道 Z 是上半连续的

本节的主要结果是

定理 1 设 X 是 Banach 空间, 引理 1 和引理 3 中的假设成立 又存在 $L^1[I, X]$ 中一个紧凸值 使得对任意的 $f \quad , \quad Z(f) \quad$ 则发展微分包含问题(2) 必存在 mild_ 解

证明 由引理 3, 对每个 $f \quad , Z(f)$ 是 $L^1[I, X]$ 的闭凸集, 并且是上半连续的 由假设, 对任意的 $f \quad , Z(f) \quad$, 从而由变形的 Kakutani 不动点定理([7], 定理 12, p344), 存在 $f^* \quad , f^* \quad Z(f^*)$ 由 Z 的定义, 我们有 $f^*(t) \quad F(t, G_t f^*)$ a. e. 取 $x(t) = G_t f^*$, $t \quad I$ 则显然有 $x(\ ) \quad C[I, X]$, $x(0) = x_0$ 由引理 2, x 是以下发展方程的唯一解:

$x'(t)+A(t)x(t)=f^{*}(t), x(0)=x_0$　于是 x 是发展微分包含问题(2) 的 mild_解

注 1　实际上, 在定理 1 中只需要假设　是 $L^1[I, X]$ 中的弱紧凸子集即可　现在我们进一步说明在什么条件下能够存在 $L^1[I, X]$ 中的一个弱紧凸子集满足定理 1 中的条件　为此我们设 X 是一个自反的 Banach 空间　又在引理 1 的(4) 中设　$(1, 0]$ 及 $0<\ <1/$　则 $L^p[I, X]$ 也是一个自反的 Banach 空间　又由定理的证明过程可知对 $t\ \ I, A(t)Gf\ \ L^p[I, X]$, 其中 $f\ \ L^p[I, X]$　由(8), 我们得到 $Z(f)\ \ L^p[I, X]$, $Z(f)\ \ k(t)(1+\ f\ _p)$　因为 k 是可积的, 从而我们可设其是有界的(否则从 I 中除去一个测度为零的集合), 这样如果存在两个常数 >0, $[0, 1]$ 使得

$Z(f)\ \ \ f\ _p$ 对于所有使 $f\ _p>$ 的 $f\ \ L^p[I, X]$ 成立, 则定理 1 中的条件必是满足的　但由上面的分析易知存在 $L^p[I, X]$ 的开球 $B_R(0)$ 使得 $Z(f)\ \ B_R(0)$, $f\ \ B_R(0)$　于是　的存在性是一个显然成立的事实

注 2　如果假设 $A(t)$ 能够生成一个紧的发展算子, 那么如同与时间无关的情形一样, 也可以得到一个满足定理 1 中条件的紧凸集　, 或者 $A(t)$ 生成一个等度连续的发展算子而 F 满足适当的非紧性条件, 则满足定理 1 的　也是存在的

定理 2　设定理 1 中的假设成立　则发展微分包含问题(2) 的 mild_解集是 $C[I, X]$ 中的一个闭子集

证明　我们以 $\mathrm{Sol}(F)$ 表示问题(2) 的解集, 则显然有

$$\mathrm{Sol}(F)=\left\{x(\ )\ c\ C[I, X]: x(t)=G_tf, t\ \ I, f\ \ (Z(f): f\ \ \right\}, \tag{9}$$

注意到 G_t 的连续性, 我们只需证明集合 $D=\left\{f\ \ : f\ \ Z(f)\right.$ 是一个闭集, 事实上, 我们设 $f_n\ \ f_0, (f_n)$　因为　是一个紧集, 从而有 f_0　又 Z 是上半连续的, 于是可以设 $Z(f_n)\ \ Z(f_0)+B(0)$ 对于充分大的 n 成立, 其中 $B(0)$ 表示 $L^1[I, X]$ 中的开球　于是对任意的 >0, 有 $f_0\ \ Z(f_0)+B(0)$　但 $Z(f_0)$ 是闭凸集, 从而我们得到 $f_0\ \ Z(f_0)$, 即集合 D 是一个闭集

参 考 文 献

[1]　Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions[M]. Berlin: Sprin er_Verla , 1984.

[2]　Frankowska H. Estimations a priori pour les inclusions di erentielles operationelles[J]. C R Acad Sci Paris, 1989, **308**(5): 47~ 50

[3]　Xue X, Son G. Existence results o mild solutions to semilinear evolution inclusions in Banach spaces[J]. Northeast Math J, 1995, **11**(7): 151~ 156

[4]　Vrabie V V. Some compactness methods in the theory o nonlinear evolution equations to P D E[J]. Banach Centre Publ, 1987, **19**(7): 351~ 360

[5]　Wa ner D. Survey o measurable selection theorems[J]. SIAM J Control and Optim, 1977, **15**(3): 859 ~ 903

[6]　周鸿兴, 王连文. 线性算子半群理论及应用[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1994.

[7]　Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley Sons, 1984.

Existence of Solutions for Parabolic Type Evolution Differential nclusions and the Property of the Solution Set

Wan Zhihua

Department of Business & Economy, Shangdong Electrical Power College, Jinan 250002, P R China

Abstract: In this paper, parabolic type di erential indusions with time dependenoe are discussed and this problem is related to the study o the nonlinear distributed parameter control systems. An existence theorem o mild_solutions is proved, and a property o the solution set is iven. The directions and the results by J. P. Aubin et al are eneralized and improved.

Key words: evolution operator; set_valued map; di erential inclusion; mild_solution; ixed_point theorem