应用数学和力学, 第 20 卷 第 3 期(1999 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)03_0229_34

# 动力学系统参数辨识问题最优控制解的理论与方法(Ⅱ) ——随机系统参数辨识及应用实例*

吴志刚[1], 王本利[1], 马兴瑞[2]

[1] 哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001;
[2] 中国空间技术研究院, 北京 100081

摘要: 基于文(Ⅰ)(《应用数学和力学》, 1998, **20**(2))的内容和随机最优控制理论, 本文首先介绍了随机动力学系统参数辨识问题最优控制解的概念• 然后讨论了建立参数辨识问题 HJB 方程的过程以及参数辨识的算法• 最后给出了一个应用实例: 解决动力学系统局部非线性参数辨识问题的方法•

关键词: 动力学系统; 参数辨识; 随机最优控制; HJB 方程
分类号: V414.1 文献标识码: A

## 引 言

对实际动力学系统及其参数辨识问题的研究过程中, 常会遇到随机外界输入及随机系统模型参数• 这些随机因素导致许多与确定性动力学系统特性迥异的现象, 因而随机动力学系统参数辨识问题的研究具有更广泛的实际意义[1]• 和确定性动力学系统相同, 利用动态规划方法也可以把一个随机动力学系统的参数辨识问题转化为按随机动力学系统的确定性初值参数化了的一族动力学系统的参数辨识问题• 利用 HJB 方程的解, 同样可以获得这个系统参数辨识问题的最优控制解•

对仅有部分观测信息的随机动力学系统参数辨识问题的研究, 以及基于 HJB 方程粘性解概念的讨论, 将在作者的其他论文中进行•

## 1 随机动力学系统参数辨识问题的最优控制解

考虑随机动力学系统的参数辨识问题, 该系统用下述随机微分方程来描述

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x(t) = g(x(t), u(t))\mathrm{d}t + \sigma(x(t), u(t))\mathrm{d}w_t, \\ sy\quad &x(0) = x_0 \in R^n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中, 状态变量 $x(t)$ 为 $n$ 维随机过程, 待辨识系统参数 $u(t)$ 为 $r$ 维随机过程• 定义 $U$ 是 $r$ 维欧氏空间 $R^r$ 中的一个子集, 并设:

* 收稿日期: 1997_10_13; 修订日期: 1998_08_15
基金来源: 国防科技"九•五"预研项目资助(A966000_50), 国家教委跨世纪优秀人才计划基金资助
作者简介: 吴志刚(1972~), 男, 博士

$$U_{ad} = \left\{ u(t) \mid u(\cdot):[0, T] \to R^r \right\},$$

其它各项的意义如下: $(\Omega, F, P)$ 是一个概率空间, $w_t$, $t \geqslant 0$ 是概率空间 $(\Omega, F, P)$ 上的 $n$ 维随机过程· $F$ 是 $\Omega$ 中的一个 $\sigma$_代数, $P$ 是概率测度· 令 $S(n)$ 表示 $n \times n$ 矩阵全体的集合·

$$g(\cdot, \cdot): R^n \times U \to R^n,$$
$$\sigma(\cdot, \cdot): R^n \times U \to S(n),$$

上述系统参数辨识问题的指标函数定义为如下均值形式:

$$V(t, x, h, u(\cdot)) = E\left\{ \int_0^t f(x(s), \tilde{x}(s), u(s))\, e(0, s, u(\cdot))\, \mathrm{d}s + h(x(t))\, e(0, t, u(\cdot)) \right\}, \tag{2}$$

其中: $e(0, t, u(\cdot)) = \exp\left( -\int_0^t C(x(s), u(s))\,\mathrm{d}s \right)$,

$$f(\cdot, \cdot): R^n \times U \to R,$$
$$h(\cdot): R^n \to R,$$
$$C(\cdot, \cdot): R^n \times U \to R_+^1 = [0, \infty),$$

$x(t) = x(t, x, u(\cdot))$ 表示微分方程(1) 的解依赖于初始值 $x$ 和待辨识系统参数 $u(\cdot)$· $\tilde{x}(t) \in R^n$ 为测量到的系统响应的时间历程, 在指标函数中作为已知量, 后面的讨论中, $f(x(s), \tilde{x}(s), u(s))$ 仅用 $f(x(s), u(s))$ 表示·

随机系统的参数辨识问题是寻找 $u^*(\cdot) \in U_{ad}$, 使得

$$V(t, x, h, u^*(\cdot)) = \sup_{u(\cdot) \in U_{ad}} V(t, x, h, u(\cdot)),$$

$u^*(\cdot)$ 称为由(1) ~ (2) 两式构成的随机动力学系统参数辨识问题的最优控制解[2]·

定义最优指标函数:

$$V(t, x, h) = \sup_{u(\cdot) \in U_{ad}} V(t, x, h, u(\cdot))· \tag{3}$$

## 2　建立随机动力学系统参数辨识问题的 HJB 偏微分方程

与确定性动力学系统的参数辨识问题相同, 随机动力学系统的参数辨识问题也是通过引入 HJB 方程, 求解 HJB 方程来解决的· 在确定性系统的参数辨识问题中, 没有讨论具体的引入 HJB 偏微分方程的步骤, 这里参照最优控制的数学理论, 简单介绍了由非线性算子半群导出 HJB 方程的过程[3]·

**定理 2.1**　最优指标函数性质定理

对最优指标函数 $V(t, x, h)$ 成立下面的关系:

$$\forall s \leqslant t, \text{有 } V(t, x, h) = V(s, x, V(t-s, \cdot, h))·$$

用 $B(R^n)$ 表示在空间 $R^n$ 上一致连续的有界函数全体, 在 $B(R^n)$ 上定义范数

$$\| \varphi \| = \sup_{x \in R^n} | \varphi(x) | \quad (\forall \varphi(\cdot) \in B(R^n)),$$

则 $B(R^n)$ 是一个 Banach 空间· 在 Banach 空间 $B(R^n)$ 上定义非线性算子族 $\{V(t)\}$, $t \geqslant 0$ 如下:

$$(V(t)h)(x) = V(t, x, h), \quad \forall h(\cdot) \in B(R^n)·$$

**定理 2.2**　算子族 $\{V(t)\}$, $t \geqslant 0$ 满足

1) $V(t+s) = V(t)V(s)$, $\quad \forall s, t \geqslant 0$,

$V(0) = I$,

2) $\| V(t)h - h \| \to 0\ (t \downarrow 0)$, $\forall h \in B(R^n)$,

3) $\| V(t)h_1 - V(t)h_2 \| \leqslant \| h_1 - h_2 \|$, $\forall h_1, h_2 \in B(R^n)$, $\forall t \geqslant 0$,

4) 若 $h_1 \leqslant h_2$, 即 $h_1(x) \leqslant h_2(x)$, $\forall x \in R^n$, $h_1, h_2 \in B(R^n)$, 则

$V(t)h_1 \leqslant V(t)h_2$, $\forall t \geqslant 0$•

定义算子 $L(u)$ 如下:(其中 $\partial_i = \partial/\partial_{x_i}$)

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{n} g_i(x,u)\partial_i, \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{a}(x,u) = (a_{ij}(x,u)) = \dfrac{1}{2}\sigma(x,u)\sigma^*(x,u)$ 是 $n \times n$ 矩阵•

定义

$$C^2(R^n) = \left\{ h(\cdot) \mid h \in B(R^n), \partial_i h, \partial_i\partial_j h \in B(R^n), i,j = 1, \cdots, n \right\}• \qquad ($$

**定理 2.3** 设 $A$ 是算子半群 $\left\{ V(t)• \right\}$, $t \geqslant 0$ 的生成算子, 则 $C^2(R^n) \subset D(A)$, 并且 $\forall h(\cdot) \in C^2(R^n)$, 有

$$(Ah)(x) = \sup_{u \in U}\left\{ L(u)h - C(x,u)h + f(x,u) \right\}, \tag{5}$$

其中, $D(A)$ 表示算子 $A$ 的定义域•

据此引出最优指标函数满足的 HJB 偏微分方程•

**随机动力学系统参数辨识问题的 HJB 偏微分方程:**

设 $\forall t > 0$, $V(t, \cdot, h) \in C^2(R^n)$, 则 $V(t,x,h)$ 是下述 HJB 偏微分方程的解

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \sup_{u \in U}\left\{ L(u)V(t,x) - C(x,u)V(t,x) + f(x,u) \right\}, \\ &V(0,x) = h(x) \quad (x \in R^n)• \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

## 3 随机动力学系统参数辨识算法

研究随机动力学系统的参数辨识问题, 同样需给所研究的动力学系统状态方程的右端函数和目标函数一定的光滑性条件:

(A) 存在不依赖于 $x, u$ 的正常数 $K$, 使得

$$| \hat{g}(x,u) - \hat{g}(y,u) | \leqslant K | x - y |, \quad \forall x, y \in R^n, u \in U, \tag{7}$$

其中, $\hat{g} = \sigma_{ij}, g, f, C, \sigma_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是矩阵 $\sigma$ 的元素, $\sigma = (\sigma_{ij})$•

根据下述定理可以得到由 HJB 方程的解构造参数辨识问题最优控制解的步骤[3]•

**定理 3.1** 随机动力学系统参数辨识问题最优控制解的结构

设 $U$ 是 $R^r$ 中的紧集, $V(t,x) = V(t,x,h)$ 是 HJB 偏微分方程(6) 的解, $\hat{u}(t,x)$ 是使 Hamilton 函数

$$H(t,x,u) = L(u)V(T-t,x) - C(x,u)V(T-t,x) + f(x,u)• \tag{8}$$

在 $U$ 上达到最大的系统参数, 即

$$\sup_{u \in U} H(t,x,u) = H(t,x,\hat{u}(t,x))• \tag{9}$$

令 $\hat{\xi}(t)$ 是随机微分方程

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}\xi(t) = g(\xi(t), \hat{u}(t,\xi(t)))\mathrm{d}t + \sigma(\xi(t), \hat{u}(t,\xi(t)))\mathrm{d}w_t, \\ &\xi(0) = x \in R^n \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

的解，则 $\hat{u}(t) = \hat{u}(t, \hat{\xi}(t))$ 是随机系统参数辨识问题(1) ~ (2) 的最优控制解•

求随机系统参数辨识问题最优控制解的步骤为:

1) 求HJB 偏微分方程(6) 的解 $V(t, x)$，

2) 用第一步的函数 $V(t, x)$，求满足

$$\sup_{u\in U}\{L(u)V(t,x) - C(x,u)V(t,x) + f(x,u)\} = L(\hat{u}(t,x))V(t,x) - C(x,\hat{u}(t,x))V(t,x) + f(x,\hat{u}(t,x))$$
$$\forall (t,x) \in (0, T) \times R^k$$

的 $\hat{u}(t,x)$，

3) 利用已知函数 $\hat{u}(t,x)$，求随机微分方程

$$\mathrm{d}\xi(t) = g(\xi(t), \hat{u}(t,\xi(t)))\mathrm{d}t + \sigma(\xi(t), \hat{u}(t,\xi(t)))\mathrm{d}w_t,$$
$$\xi(t) = x$$

的解 $\hat{\xi}(t)$，

4) 由 $\hat{u}(t,x)$ 和随机过程 $x = \hat{\xi}(t)$ 构造系统参数辨识问题的最优控制解

$$\hat{u}(t) = \hat{u}(t, \hat{\xi}(t))•$$

# 4 应用实例——动力学系统局部非线性结构参数辨识

前面叙述了一般非线性动力学系统(包括确定性与随机系统两类)参数辨识问题最优控制解的理论与方法• 对于由线性主结构和非线性子结构组成的系统，这里提出一种辨识其局部非线性参数的方法• 其特点是将参数辨识问题转化为最优控制问题，利用线性系统最优控制理论来解决动力学系统参数的辨识问题•

主体结构为线性，局部子结构为非线性的动力学系统状态方程为:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{F}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{N}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) + \boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{w}(t),\\&\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{v}(t),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中，初始状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0$，$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 为 $n$ 维状态向量，$\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ 为 $m$ 维控制向量，$\tilde{\boldsymbol{y}}(t)$ 为 $p$ 维输出向量(这里同时也是量测向量，是通过实验测量得到的)，$\boldsymbol{N}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ 为 $n$ 维非线性回复力向量，$\boldsymbol{F}$ 为系统的线性部分 $n \times n$ 维矩阵，$\boldsymbol{G}$ 为 $n \times m$ 维输入矩阵，$\boldsymbol{H}$ 为 $p \times n$ 维输出矩阵，$\boldsymbol{w}(t)$ 表示模型噪声，$\boldsymbol{v}(t)$ 表示测量噪声，$\boldsymbol{w}(t)$ 与 $\boldsymbol{v}(t)$ 分别为 $n$ 维与 $p$ 维白噪声，它们与 $n$ 维初始状态变量 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)$ 有以下统计特性:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{E}\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = \mu_0,$$
$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)] = \boldsymbol{Q}'(t), \qquad \boldsymbol{E}[\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)] = \boldsymbol{R}'(t),$$
$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{v}^{T}(t)] = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_0\tilde{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{P}_0,$$
$$\boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_0\boldsymbol{w}^{T}(t)] = \boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_0\boldsymbol{v}^{T}(t)] = 0•$$

上述非线性系统所对应的线性系统为:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{w}(t),\\&\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t)•\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

定义

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_x = \tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t),\\&\boldsymbol{e}_y = \tilde{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_x•\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(11) ~ (12) 并将(13) 式代入得:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_x - \boldsymbol{F}\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{N}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) + \boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}(t)), \tag{14}$$

由上式可知, 如果 $\boldsymbol{e}_x \approx \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{e}}_x \approx \boldsymbol{0}$, 则有

$$\boldsymbol{N}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \approx - \boldsymbol{G}(\tilde{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}(t))\bullet \tag{15}$$

通过求解(12)所描述系统的控制输入 $u(t)$, 使得在该输入时 $\boldsymbol{e}_y = \tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}$ 最小, 从而 $\boldsymbol{e}_x = \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ 最小, 并且假定 $e_x$ 变化平稳, 从而 $\dot{e}_x \approx 0$ 成立• 这样就可以得到非线性子结构部分的回复力 $\boldsymbol{N}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ 随时间变化的历程, 因为实际系统的输入 $\tilde{u}$ 是可以测量的• 进而再拟合时间历程 $\boldsymbol{N}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ 与状态向量的函数关系, 即可得到非线性结构的模型与参数•

为确定线性随机系统最优控制 $u(t)$, 使 $\boldsymbol{e}_y = \tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}$ 最小, 定义下述数学期望形式的目标函数:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T [(\tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}u]\,\mathrm{d}t\right\}\bullet \tag{16}$$

这一问题属于线性二次型高斯(LQG)问题, 根据确定性等价定理, LQG 问题的最优控制律与确定性系统相同, 并且最优控制中所需的状态变量 $\hat{x}(t)$ 由卡尔曼滤波方程给出• 利用随机动态规划方法得到对应于上述目标函数的最优控制[5]、[6]

$$\boldsymbol{u}(t) = - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}(t), \tag{17}$$

上式中各量的意义如下:

$\boldsymbol{P}(t)$ 是黎卡提方程的解

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{P}}(t) = - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H},\\ &\boldsymbol{P}(T) = \boldsymbol{0}\bullet \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$\boldsymbol{b}(t)$ 满足线性微分方程组:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{b}}(t) = - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}(t) - \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{y}}(t),\\ &\boldsymbol{b}(T) = \boldsymbol{0}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 由卡尔曼滤波方程给出:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{K}_1(t)[\tilde{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}(t)],\\ &\boldsymbol{x}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

式中滤波增益矩阵 $\boldsymbol{K}_1(t)$ 为:

$$\boldsymbol{K}_1(t) = \boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}'^{-1}(t), \tag{21}$$

滤波误差协方差矩阵 $P_1(t)$ 满足:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{P}}_1(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_1(t) + \boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}'^{-1}(t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}_1(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}'(t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}},\\ &\boldsymbol{P}_1(t_0) = \boldsymbol{P}_0\bullet \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

由上述过程确定最优控制 $\boldsymbol{u}$ 时, 加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的选取将影响最终辨识的结果, 这里希望输出误差向量 $\boldsymbol{e}_y \approx \boldsymbol{0}$, 因而矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 中对角线元素值应显著大于矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中的对角线元素值•

## 参 考 文 献


[1] 蔡金狮. 动力学系统辨识与建模[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991

[2] 黄光远, 刘小军. 数学物理反问题[M]. 济南: 山东科技出版社, 1993

[3] 王康宁. 最优控制的数学理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995

[4] 雍炯敏. 动态规划与 Hamilton_Jacobi_Bellman 方程[M]. 上海: 上海科技出版社, 1992

[5] Stengel R F. Stochastic Optimal Control[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1986

[6] Bryson A E, Ho Yuchi. Applied Optimal Control [M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975

# Theory and Algorithm of Optimal Control Solution to Dynamic Systme Parameters Identification (Ⅱ)——Stochastic System Parameters Identification and Application Example

Wu Zhigang[1] Wang Benli[1] Ma Xingrui[2]

[1] Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China;

[2] Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100081, P R China

**Abstract:** Based on the contents of part( Ⅰ ) and stochastic optimal control theory, the concept of optimal control solution to parameters identification of stochastic dynamic system is discussed at first. For the completeness of the theory developed in this paper and part (Ⅰ), then the procedure of establishing Hamilton_Jacobi_Bellman (HJB) equations of parameters identification problem is presented. And then, parameters identification algorithm of stochastic dynamic system is introduced. At last, an application example_local nonlinear parameters identification of dynamic system_ is presented.

**Key words:** dynamic system; parameters identification; optimal control; HJB equation