

粘弹性柱壳的若干动力学性质*

睿¹, 朱正佑², 程昌钧²

¹西南交通大学 力学博士后流动站, 成都 610031;

²上海大学, 上海市应用数学与力学研究所, 上海 200072

摘要: 本文讨论了轴向压力和一致分布的径向压力作用下粘弹性柱壳的动力稳定性问题。利用 Laplace 变换, 得到了常载作用下粘弹壳的稳定性条件。综合利用动力学的经典方法, 得到了由粘弹性壳所定义的动力系统的各种动力学性质及各种参数对结构稳定性的影响。

关键词: 粘弹性; 柱壳; 稳定性

分类号: O175.29 **文献标识码:** A

引 言

关于粘弹性壳的动力学问题的讨论是不多见的。Ladopoulos^[1] 讨论了浅球壳的情形, Drozdov^[2] 利用 Lyapunov 泛函给出了粘弹性柱壳的稳定性的充分条件。采用 Lyapunov 直接方法 Tylikowski^[3] 给出了粘弹性柱壳一致渐近稳定的充分条件。现有的文章大多集中在粘弹壳的稳定性的讨论上, 对于由粘弹性壳定义的动力系统的动力学性质的讨论则很少。本文将讨论由粘弹性柱壳所定义的动力系统的动力学性质。综合利用动力学的经典方法, 如 Lyapunov 指数 Lyapunov 谱, 胞映射等方法, 来揭示由粘弹性柱壳所定义的动力系统的各种动力学性质及各种参数对结构稳定性的影响。此外还给出了一种便于核验的稳定性的充分条件。

1 问题的提出

考虑轴向压力 $p(t)$ 和一致分布的径向压力 $q(t)$ 作用下两端简支的粘弹性壳的动力稳定性问题。假定薄壳的长度为 l , R 为横截面的半径, h 为壳的厚度。应力-应变本构关系由 Boltzmann 迭加原理给出^[4]

$$\sigma_{ij} = D_{ij}(0) \cdot \varepsilon_{ij}(t) + \int_0^t D_{ij}(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau.$$

记壳的径向变形为 $W(t, x_1, x_2)$, 其中 x_1 和 x_2 分别表示壳中面点的横向和环向坐标。利用文[2]中粘弹壳的假设可得粘弹性柱壳的基本方程为

* 收稿日期: 1997_09_22; 修订日期: 1998_11_20

基金来源: 国家自然科学基金资助项目(19727027)上海市高等学校博士学科点建设基金资助项目

作者简介: 朱正佑(1937~), 男, 教授, 博士生导师, 已发表 60 多篇论文, 两部专著, 获省部以上奖十多项

$$\left. \begin{aligned} \rho h \frac{d^2 W}{dt^2} + D(I + \mathcal{D}) \Delta^2 W + p(t) h \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + q(t) R \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} &= -hR^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \\ ER^{-1}(I + D)p(t) h \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} &= \Delta^2 \phi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\ W|_{t=0} &= u(x_1, x_2), \quad \mathcal{W}|_{t=0} = v(x_1, x_2), \quad W(t, x_1, x_2 + 2\pi R) = W(t, x_1, x_2), \\ W(t, 0, x_2) &= W(t, l, x_2) = 0, \quad W''(t, 0, x_2) = W''(t, l, x_2), \end{aligned} \right\} (1)$$

其中, ρ 是材料密度, $\phi(x_1, x_2)$ 是 Airy 应力函数, $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ 是弯曲刚度, E 是弹性模量, μ 是 Poisson 比. I 是单位恒等算子, \mathcal{D} 是松弛算子, $\mathcal{D}\varepsilon = -\int_0^t \mathcal{D}(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau$. 为方便起见, 假定解可展开为下面形式

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum_{m, n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin\left[\frac{\pi m x_1}{l}\right] \cdot \sin\left[\frac{n x_2}{R}\right], \\ \phi &= \sum_{m, n=1}^{\infty} \phi_{mn}(t) \sin\left[\frac{\pi m x_1}{l}\right] \cdot \sin\left[\frac{n x_2}{R}\right], \end{aligned} \right\} (2)$$

把(2)式代入(1)中, 得到了 W_{mn} 满足的方程, 为简单起见记 W_{mn} 为 W

$$\left. \begin{aligned} \rho h \frac{d^2 W}{dt^2} + A(t)W(t) - B \int_0^t \mathcal{D}(t-s)W(s)ds &= 0, \\ W|_{t=0} &= \hat{u}_0, \quad \mathcal{W}|_{t=0} = \hat{v}_0, \end{aligned} \right\} (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A(t) &= DM + \frac{Eh}{R^2} \left[\frac{\pi m}{l} M^{-1} - \left[p(t) h \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 + q(t) R \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right], \right. \\ B &= DM + \frac{Eh}{R^2} \left[\frac{\pi m}{l} M^{-1} \right], \quad M = \left[\left[\frac{\pi m}{l} \right]^2 + \left[\frac{n}{R} \right]^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

2 粘弹性柱壳的动力稳定性分析

Drozдов^[2], Tylikowski^[3] 利用 Lyapunov 泛函给出了临界载荷作用下粘弹性柱壳稳定的充分条件. 对于大多数问题来讲, 由于 Lyapunov 泛函通常难以得到, 因而给出的稳定性条件难以核. 在本节中, 利用 Laplace 变换, 给出了常载作用下粘弹性柱壳稳定的一种充分条件.

假定载荷为常数, 即 $p(t) = p, q(t) = q$, 因此 $A(t) = A$. 此时, 对方程(3)作用 Laplace 变换, 得到

$$W(s) = \frac{s\hat{u}_0 + \hat{v}_0}{s^2 + \frac{A(p, q)}{\rho h} + \left[\frac{-B}{\rho h} \right] D(s)}. \quad (4)$$

其中, s 是 Laplace 变换参数, $W(s), D(s)$ 分别表示 $W(t), D(t)$ 的 Laplace 变换.

假定 $s = s_k (k = 1, 2, \dots, K)$ 满足下面方程

$$s^2 + \frac{A(p, q)}{\rho h} + \left[\frac{-B}{\rho h} \right] D(s) = 0, \quad (5)$$

不失一般性, 假定 $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, 那么 W 的 Laplace 逆变换为

$$W(t) = \sum_{k=1}^K \frac{e^{s_k t} (s_k \hat{u}_0 + \hat{v}_0)}{s_k \left[2s_k + \left[\frac{-B}{\rho h} \right] D'(s_k) \right]}. \quad (6)$$

因此如果存在一个 $s_k > 0$, 那么 $W(t)$ 是不稳定的; 如果 $s_m < 0 (m = 1, \dots, K)$, 那以 $W(t)$ 是

稳定的; 因此计算(5) 的根, 即可确定系统的稳定性。

为方便起见, 这里假设材料为标准线性固体, 因此 $D(t) = a + be^{-at}$, 所以 $D(s) = \frac{a+b}{s+a}$ 。此时, (5) 可简化为

$$s^3 + as^2 + \frac{A(p, q)}{\rho h} s + \frac{[A(p, q)a - Ba - Bb]}{\rho h} = 0, \quad (7)$$

如果(7)有三个根, 其中一个实根, 记为 $s_1 = s_1(p, q)$; 另两根为 s_2 和 s_3 为复根, 假设 $s_2 = s_2(p, q) = \alpha(p, q) + i\beta(p, q)$, $s_3 = s_3(p, q) = \alpha(p, q) - i\beta(p, q)$, 那么应用 Laplace 逆变换可得

$$W(t) = Xe^{s_1 t} + e^{\alpha t} [Y \cos(\beta t) + Z \sin(\beta t)], \quad (8)$$

其中, X, Y, Z 是与时间无关的 p, q 的函数, 因此当 p, q 给定时, 它们均有界。如果(7)有三个实根 s_1, s_2, s_3 , 那么

$$W(t) = Xe^{s_1 t} + Ye^{s_2 t} + Ze^{s_3 t}, \quad (9)$$

因此有如下定理

定理 1 对给定载荷 p, q , 如果(7)有一个实根一对复根, 那么和 p, q 有关的稳定性条件为 $\max\{s_1(p, q), \alpha(p, q)\} < 0$ 。如果(7)有三个实根, 那么和 p, q 有关的稳定性条件为 $\max\{s_1(p, q), s_2(p, q), s_3(p, q)\} < 0$ 。

显然上面条件较[4], [2]中要容易核实验。

3 粘弹性柱壳的动力学性质

本节中将利用非线性动力学的经典方法, 如 Lyapunov 指数 e , Lyapunov 谱, 胞映射等方法, 来揭示由粘弹性柱壳所定义的动力系统(3)的各种动力学性质及各种参数对结构的影响。

假设材料为标准线性固体, 其松弛函数为 $E(t) = a + be^{-at}$, 因此 $D(t) = a + be^{-at}$, 这里 $a = \frac{a}{a+b}$, $b = \frac{b}{a+b}$ 。代入(3)中并关于 t 积分, 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 W}{dt^3} + i\alpha \frac{d^2 W}{dt^2} + \frac{A(t)}{\rho h} \frac{dW}{dt} + \left[\frac{A(t)}{\rho h} + \frac{\alpha A(t)}{\rho h} - \frac{\alpha b B}{(a+b)\rho h} \right] W(t) &= 0, \\ W|_{t=0} &= u_0, \quad \dot{W}|_{t=0} = v_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

它可以化为如下常微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{X}(t), \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{G}(t)$ 是矩阵函数, 其分量给定为

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= G_{13} = G_{21} = G_{22} = 0, \\ G_{12} &= G_{23} = 1, \\ G_{31} &= -\frac{A(t)}{\rho h} - \frac{\alpha A(t)}{\rho h} + \frac{\alpha b B}{(a+b)\rho h}, \\ G_{32} &= -\frac{A(t)}{\rho h}, \quad G_{33} = -\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

下面讨论各种参数情况下动力系统(11)的动力性质。这里采用具修正项的高阶 Runge-Kutta 方法来求解(11)。假定轴向力为 $p(t) = p_0 \sin t$, 并且径向压力为 $q(t) = q_0 \sin t$ 。令 $B = \rho h = 1$, $A(t) = 1 - p_0 \sin t - q_0 \sin t$, $a = 0.3$, $b = 0.7$, 计算不同参数时的最大 Lyapunov 指

数($\max e$)及 W 的平面相位图(见图 1~ 8)。

图 1~ 8, 当 $p_0 = 0.01, q_0 = 0.01$ 时, 不同参数 α 下 W 的相位图及最大 Lyapunov 指数 ($\max e$)

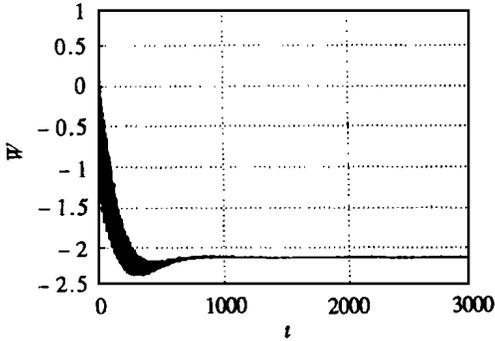


图 1 $\alpha = 0, W$ 的相位图

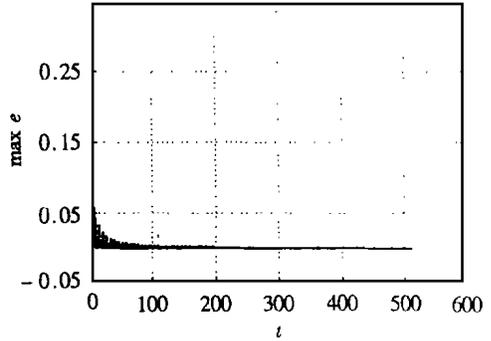


图 2 $\alpha = 0$, 最大 Lyapunov 指数($\max e$)

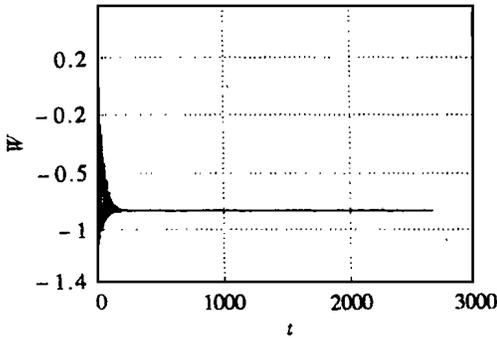


图 3 $\alpha = 0.03, W$ 的相位图

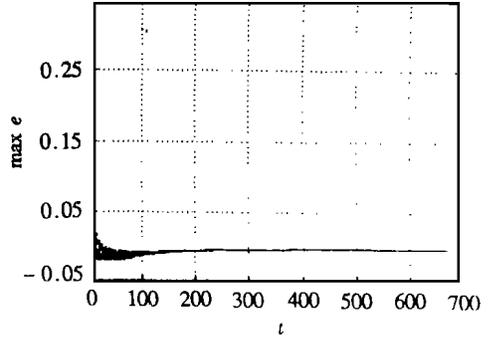


图 4 $\alpha = 0.03$, 最大 Lyapunov 指数($\max e$)

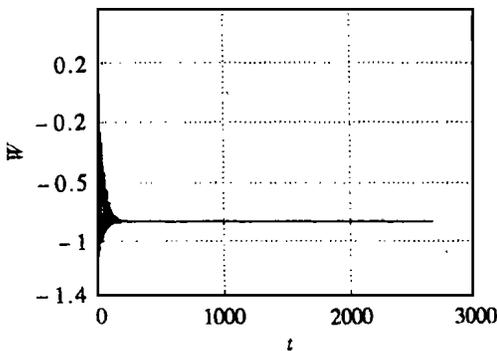


图 5 $\alpha = 21, W$ 的相位图

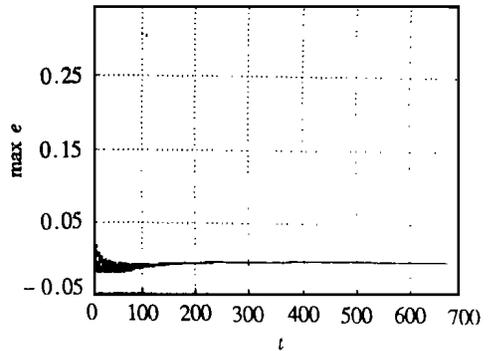
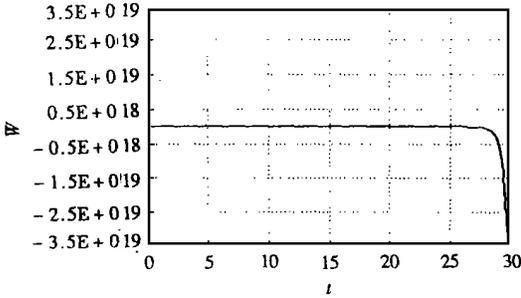
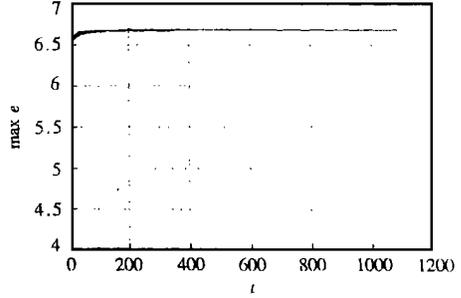


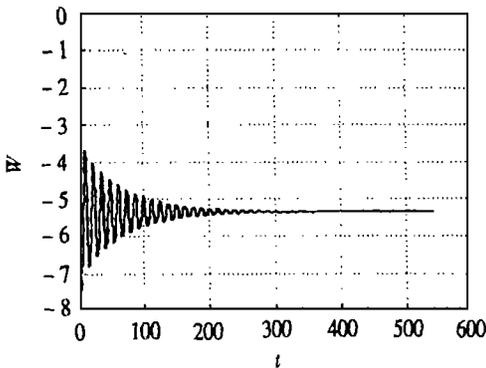
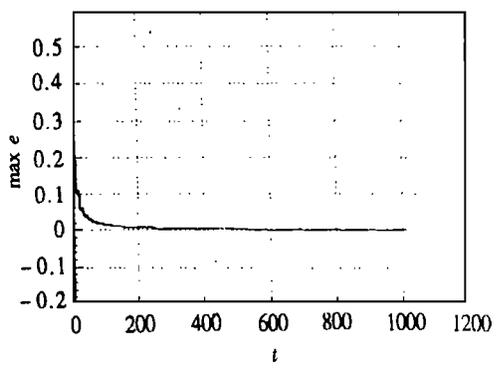
图 6 $\alpha = 21$, 最大 Lyapunov 指数($\max e$)

从上图中, 可以看到当 $\alpha = 0.03, p_0 = 0.01, q_0 = 0.01$ 时, 最大 Lyapunov 指数等于零 ($\max e = 0$) 并且解 W 趋于常数, 因而系统是稳定的, 此时粘弹性柱壳的变形是常数。当 $\alpha = 0$, 或 $\alpha = 21, p_0 = 0.01, q_0 = 0.01$, 系统也是稳定的。当 $\alpha = 25$ 时, 由于最大 Lyapunov 指数大于零 ($\max e > 0$), 因而系统是不稳定的。解 W 趋于无穷大, 因此粘弹性柱壳的结构将崩

溃,系统是混沌的,此外由表1也可看到参数 α 对粘弹壳稳定性的影响。值得注意的是当 α 从0变到0.03时,变形 W 将减小。当 α 从0.03变到21.45时,变形 W 将逐渐增大,但仍保持在一个有界区域中,当 α 大于21.45时,变形 W 趋于无穷大。因此当 $\alpha \in [0, 0.03]$ 时, α 越大,壳的变形越小;当 $\alpha \in (0.03, 21.45]$ 时, α 越大,壳的变形越大;当 $\alpha \in (21.45, +\infty)$ 时,粘弹性柱壳结构崩溃。所以当 $\alpha = 0.03, p_0 = 0.01, q_0 = 0.01$ 时,粘弹性壳的变形最小。当 $\alpha = 21.45, p_0 = 0.01, q_0 = 0.01$ 时,粘弹性壳的变形最大。

图7 $\alpha = 25, W$ 的相位图图8 $\alpha = 25$, 最大 Lyapunov 指数(max e)表1 不同参数 α 时的最大 Lyapunov 指数 max e 和最大变形 max W ($p_0 = 0.01, q_0 = 0.01$)

α	max W	max e	状态
0	- 2.113E+ 00	~ 0	稳定
0.01	- 4.231E- 01	~ 0	稳定
0.03	- 3.587E- 01	~ 0	稳定
10	- 1.279E+ 01	~ 0	稳定
21	- 2.655E+ 01	~ 0	稳定
21.45	- 2.412E+ 01	~ 0	稳定
25	- ∞	6.67E+ 00	不稳定混沌

图9 $q_0 = 1.38, W$ 的相位图图10 $q_0 = 1.38$, 最大 Lyapunov 指数(max e)

如果给定参数 $\alpha = 0.03, p_0 = 0.01$,那么可以看到当 $q_0 < 1.394725$ 时,系统是稳定的;当 $q_0 > 1.394725$ 时,系统是不稳定的,此时当 q_0 增加一点时,解 W 指数地趋向于无穷大。

这两种情形时的 W 的相位图及最大 Lyapunov 指数 ($\max e$) 如图 9~ 12 所示。反之如果给定参数 $\alpha = 0.03, q_0 = 0.01$, 当 $p_0 < 1.69$, 系统是稳定的; 而当 $p_0 > 1.69$ 时, 系统是不稳定的。因此对于一个粘弹性壳, 如果用同样的轴向力和径向力, 则载荷对粘弹性柱壳稳定性的影响是相同的。

图 9~ 12, $\alpha = 0.03, q_0 = 0.01$ 时, 不同径向载荷 q_0 下 W 的相位图及最大 Lyapunov 指数 ($\max e$)。

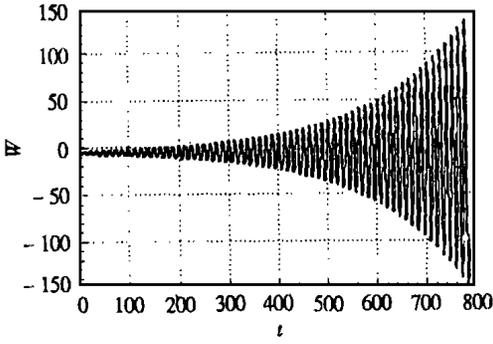


图 11 $q_0 = 1.40, W$ 的相位图

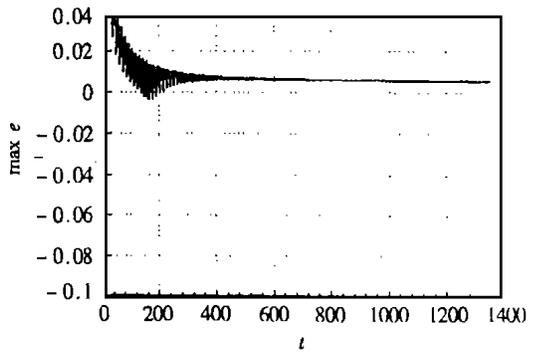


图 12 $q_0 = 1.40$, 最大 Lyapunov 指数 ($\max e$)

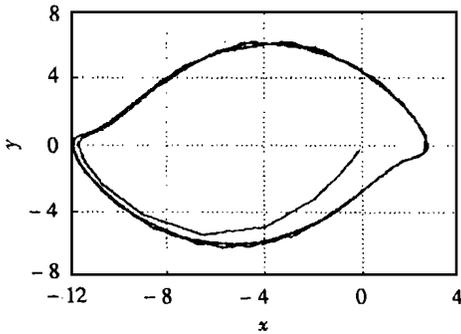


图 13 xy 平面上的轨线投影

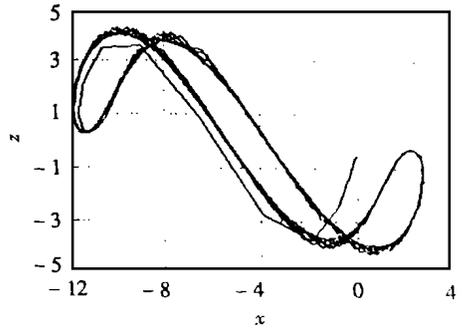


图 14 xz 平面上的轨线投影

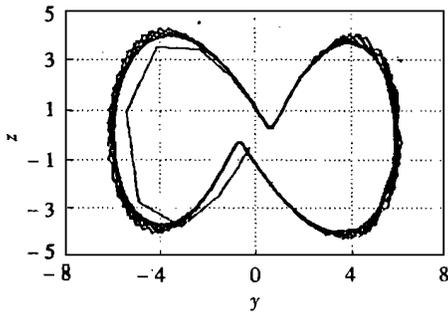


图 15 yz 平面上的轨线投影

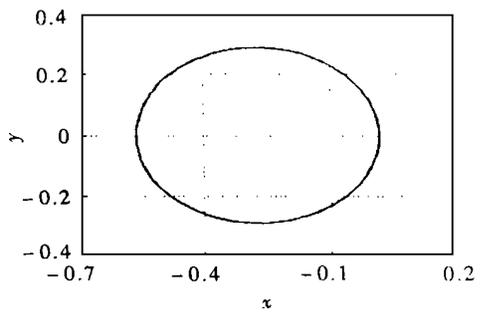


图 16 xy 平面上的轨线投影

对不同参数, 计算 Lyapunov 谱, 可以发现当参数为 $\alpha = 0.03, p_0 = 0.01, q_0 = 0.01, q_0 = 1.394725$ 时, Lyapunov 谱是 $(0, -, -)$, 即此时系统有一个稳定的极限环。利用胞映射和

Poincare方法, 画出(11)的轨线, 并有向平面 xy, xz, yz , 做投影. 图13~15给出了极限环的情形.

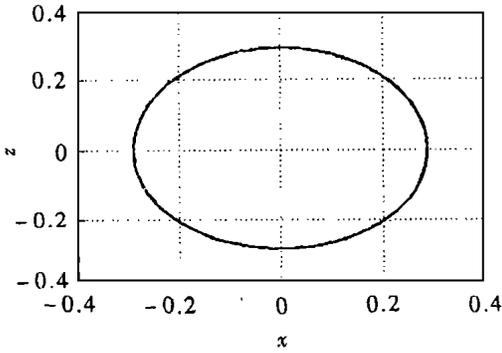


图17 xz 平面上的轨线投影

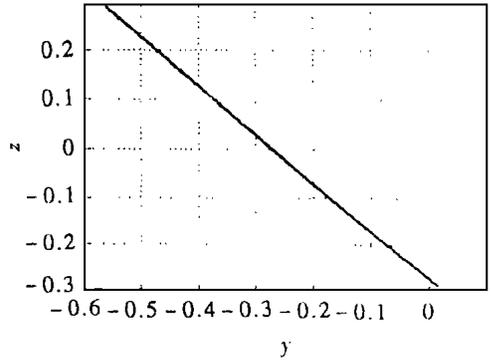


图18 yz 平面上的轨线投影

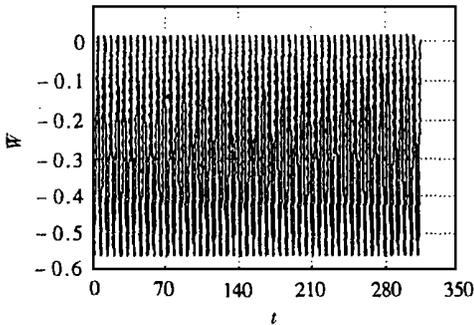


图19 W 的相位图

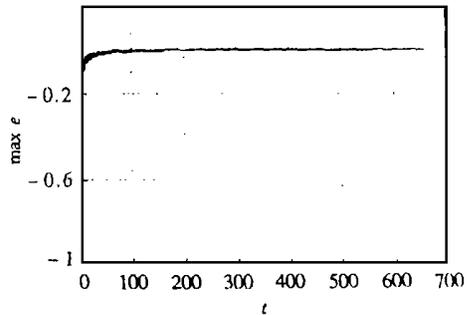


图20 最大 Lyapunov 指数(max e)

$$\alpha = p_0 = q_0 = 1E - 8$$

对于 $\alpha = 0.03, p_0 = 0.01, q_0 < 1.30$ 的情形, 最大 Lyapunov 指数小于零, 并且 Lyapunov 谱为 $(-, -, -)$, 因此系统有一个稳定的吸引子. 对于参数 $\alpha = 0.03, p_0 = 0.01, q_0 < 1.40$, Lyapunov 谱是 $(+, 0, -)$, 因此系统有混沌现象(奇异吸引子). 在系统(11)中也可看到中心的情形, 这在高维粘弹性问题中很少出现. 而 $\alpha = p_0 = q_0 = 1E - 8$ 时, 轨线在平面 xy, xz, yz 上的投影如图 16~18, W 的相位图和最大 Lyapunov 指数(max e) 如图 19~20. 在计算中可以发现无论取何初值, xy 和 yz 平面上的投影均是椭圆. 因此这是中心的情形. 此外从图 19~20, 可以看到系统是稳定的.

综上所述, 粘弹性柱壳所定义的动力系统具有混沌, 吸引子, 中心, 极限环等丰富的动力学性质, 文中还得到了粘弹性柱壳的各种稳定性区域. 说明了不同载荷对粘弹性柱壳稳定性的影响.

参 考 文 献

- [1] Ladopoulos E G. Nonlinear integro-differential equations used in orthotropic shallow spherical shell analysis[J]. Mech Res Commun, 1991, 18(2_3), 111~119
- [2] Drozdov A. Stability of viscoelastic shell under periodic and stochastic loading[J]. Mech Res Commun, 1993, 20(6): 481~486

- [3] Tylikowski A. Dynamic stability of viscoelastic shell under time dependent membrane loads[J]. Int J Mech Sci, 1989, 31(8): 591~ 597
- [4] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1989

Some Dynamical Properties of a Viscoelastic Cylindrical Shell

Ding Rui¹, Zhu Zhengyou², Cheng Changjun²

¹Mechanical Postdoctoral Station, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China;

²Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China

Abstract: In this paper, the dynamic stability of a viscoelastic circular cylindrical shell subject to an axial compressive force and a uniformly distributed radial compressive load is discussed. By using the Laplace transformation, stability conditions of viscoelastic shell under constant loads are yielded. By synthetically using the classical dynamic methods, the various dynamical properties for the dynamical system defined by the viscoelastic shell and the parameter has effect on the stability of structure are obtained.

Key words: viscoelasticity; cylindrical shell; stability