应用数学和力学, 第 20 卷 第 4 期(1999 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 04_0433_08

具有不同扩散率的两种群 Ayala 竞争模型的持续生存

原存德[1], 裴永珍[2]

([1] 山西师范大学 数计系, 山西 临汾 041004; [2] 运输工程学院 基础部, 天津 300161)

(陈明伦推荐)

摘要: 讨论了具有不同扩散率的两种群 Ayala 竞争系统之边界平衡点和正平衡点的稳定性, 得出了相关种群动力学行为的结论 同时对有扩散和无扩散时种群的动力学行为进行了比较, 说明了扩散对种群持续生存的影响

关 键 词: 非线性; 竞争系统; 扩散率; 平衡点; 持续生存
中图分类号: O175 12 文献标识码: A

引 言

近年来, 由于人类对自然资源的开发和利用, 以及经济的高速发展, 不可避免地使一些原始的自然环境被分割成许多斑块, 形成斑块环境 人类的这种开发和利用是否会引起自然资源的质变呢? 这个问题是当前人类十分关注的问题, 也是生物数学研究的热点之一 由于以往人们的研究常常局限于 Lotka_Volterra 模型, 而对较之 L_V 模型更复杂, 更为接近现实的 Ayala 模型, 至今在国内外无人问津 因此有必要研究下列模型:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(a - bx_1 - cy - kx_1y) + {}_1(x_2 - x_1), \\ x_2 = x_2(m - nx_2) + {}_2(x_1 - x_2), \\ y = y(e - fx_1 - gy - lx_1y), \qquad\qquad el \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1 和 y 是竞争者 x 和 y 分别在斑块 上的密度, x_2 是种群 x 在斑块 上的密度 x 可以在两个斑块之间相互扩散, 而种群 y 限制在斑块 上活动 系数 $a, b, c, k, m, n, e, f, g, l$ 均大于 0, ${}_1 > 0$, ${}_2 > 0$ 为种群 x 在两个斑块间不同的扩散率

容易理解, 可以把 a/b, m/n 分别看成 x 种群在 、 两个斑块上的容纳量, e/g 看成 y 种群在斑块 上的容纳量, 而把 $(c + kx_1)/b$ 看成 y 对 x 的竞争力, $(f + ly)/g$ 看成 x 对 y 的竞争力

对于一般的两种群 Lotka_Volterra 竞争系统, 若竞争斑块上的容纳量不大于另一斑块上的容纳量, 则对任意相同的扩散率, 系统均不能持续生存[1] 而对系统(1), 无论容纳量 $a/b > m/n$ 或是 $a/b < m/n$, 都能出现持续生存 因此, 我们分 $a/b > m/n$ 和 $a/b < m/n$ 两种情

收稿日期: 1997_01_15; 修订日期: 1998_12_23
基金项目: 山西省自然科学基金资助项目
作者简介: 原存德(1941~), 男, 教授.

况讨论

由于对系统(1)进行持续生存讨论时,扩散率值的选取依赖于无扩散时系统的动力学行为,因此我们先列出系统(1)无扩散时持续生存的有关结论 证明从略

当 $_1 = \ _2 = 0$ 时,系统(1) 变为

$$\begin{cases} x = x(a - bx - cy - kxy), \\ y = y(e - fx - gy - lxy) \end{cases} \tag{2}$$

系统(2)除边界平衡点 $(a/b, 0)$、$(0, e/g)$ 外,最多还能出现两个平衡点,记为 (x_i, y_i) $(i = 1, 2)$,而且 (x_i, y_i) 为正平衡点的充要条件为

$x_i y_i > 0$, 且 $\quad 0, \quad (i = 1, 2)$,

其中 $\quad = (fc + al - ek - bg)^2 - 4(fk - bl)(ag - ce)$ $(*)$

系统(2)可以出现以下几种生态现象:

1 当 $ag - ce > 0$,且 $eb - af > 0$ 时,系统存在唯一正平衡点 (x, y),且在 $\mathrm{int}R_+^2$ 中全局渐近稳定 此时系统持续生存

2 当 $ag - ce < 0$,且 $eb - af < 0$ 时,系统存在唯一正平衡点 (x, y),且不稳定,边界平衡点 $(0, e/g)$、$(a/b, 0)$ 均局部稳定 此时系统双稳定

3 当 $ag - ce \quad 0$,且 $eb - af > 0$ 时,y 种群优势(包括全局优势和局部优势)

4 当 $ag - ce > 0$,且 $eb - af \quad 0$ 时,x 种群优势(包括全局优势和局部优势)

1 $a/b > m/n$ 时系统(1) 的持续生存

1 1 非负平衡点的存在性

为研究方便,假设系统的平衡点均为双曲型的

引理 1[2] 考虑系统 $x = f(x)$ $(x \quad R^n)$,设 $f \quad C^2$ 且 R_+^n 是系统的正向不变集,$E \quad R_+^n$ 是一个双曲平衡点,若 $w^-(E) \quad (R^n \setminus R_+^n) \quad$,则 $w^+(E) \quad \mathrm{int}R_+^n = \quad$ 其中 $w^+(E)$ $[w^-(E)]$ 是 E 的强稳定(不稳定)流形

显然,对任意 $_1 > 0$, $_2 > 0$,平衡点 $E_0(0, 0, 0)$、$E_y(0, 0, e/g)$ 总存在 可以证明,在正 x 平面上存在一个平衡点 $E_x(x_1^*(\ _1, \ _2), x_2^*(\ _1, \ _2), 0)$

定理 1 对任意 $_1 > 0$, $_2 > 0$,若 $a/b > m/n$,则系统(1) 总存在边界平衡点 $E_x(x_1^*(\ _1, \ _2), x_2^*(\ _1, \ _2), 0)$,其中 $x_i^*(\ _1, \ _2) > 0$, $(i = 1, 2)$

证明 当 $y = 0$ 时,系统(1) 变为

$$\begin{cases} x_1 = x_1(a - bx_1) + \ _1(x_2 - x_1), \\ x_2 = x_2(m - nx_2) + \ _2(x_1 - x_2) \end{cases} \tag{3}$$

令

$$\begin{cases} x_1(a - bx_1) + \ _1(x_2 - x_1) = 0, \\ x_2(m - nx_2) + \ _2(x_1 - x_2) = 0 \qquad 0 \end{cases} \tag{4}$$

由(4)得

$$\frac{b}{_1}\left(x_1 - \frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{n}{_2}\left(x_2 - \frac{m}{2n}\right)^2 = \frac{a^2}{4b\ _1} + \frac{m^2}{4b\ _2}, \qquad 1 \tag{5}$$

$$x_2 = \frac{b}{_1}x_1^2 + \frac{_1 - a}{_1}x_1, \tag{6}$$

其中(5) 是一个椭圆, 与 x_1 轴有两个交点$(0, 0)$、$(a/b, 0)$; (6) 是一条抛物线, 与 x_1 轴也有两个交点$(0, 0)$、$((a- \ _1)/b, 0)$ 又

$$x_2 = 2bx_1/ \ _1 + (\ _1 - a)/ \ _1$$

若 $a- \ _1 > 0$, 则当 $x_1 > (a- \ _1)/2b$ 时, $x_2 > 0$, 即 x_2 单增, 故(6) 与(5) 在第一象限内有唯一交点$(x_1^*(\ _1, \ _2), x_2^*(\ _1, \ _2))$ 其中 $x_1^*(\ _1, \ _2) \quad ((a- \ _1)/b, a/b)$

若 $a- \ _1 \quad 0$, 显然对任意 $x_1 > 0$, 有 $x_2 > 0$ 同理, (6) 与(5) 在第一象限内有唯一交点$(x_1^*(\ _1, \ _2), x_2^*(\ _1, \ _2))$ 其中 $x_1^*(\ _1, \ _2) \quad (0, a/b)$

综上述可知, 对任意 $_1 > 0$, $_2 > 0$, 边界平衡点 $E_x(x_1^*(\ _1, \ _2), x_2^*(\ _1, \ _2), 0)$ 总存在, 其中 $x_1^* > 0, x_2^* > 0$

由定理1, 容易证明下列

推论 对任意 $_1 > 0$, $_2 > 0$, 当 $a/b > m/n$ 时, E_x 满足: $m/n < x_2^* < x_1^* < a/b$

定理 2 对任意 $_1 \quad 0$, $_2 \quad 0$, 平衡点 $E_0(0, 0, 0)$ 均不稳定, 且 $w^+(E_0) \quad (R_+^3 \setminus \{E_0\}) =$

证明 系统(1) 在 E_0 处 的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} a- \ _1 & _1 & 0 \\ _2 & 1m- \ _1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} J_x(E_0) & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad e$$

由于 $J(E_0)$ 中的 $e > 0$, 显然 E_0 不稳定 下证 $w^+(E_0) \quad (R_+^3 \setminus \{E_0\}) =$

$J_x(E_0)$ 的特征方程为

$$^2 - (a + m - \ _1 - \ _2) \ + am - m \ _1 - a \ _2 = 0$$

1 若 $am - m \ _1 - a \ _2 > 0$, 则 $J_x(E_0)$ 的两个特征根的实部为正 这时 $J(E_0)$ 的三个特征根的实部均为正,(因此 $w^+(E_0) \quad (R_+^3 \setminus \{E_0\}) =$

2 若 $am - m \ _1 - a \ _2 = 0$, 则 E_0 为双曲型, 兹不论

3 若 $am - m \ _1 - a \ _2 < 0$, 则对任意 $_1 \quad 0$, $_2 \quad 0$, $J_x(E_0)$ 有一个负特征根 设此负特征根 对应$J_x(E_0)$ 的特征向量 P_x 非负, 则有 $J_x(E_0)P_x = \quad P_x \quad 0$, 即 $J_x(E_0)P_x \quad 0$

另一方面, 由于 $J_x(E_0)$ 不稳定, 且是不可约的ML 矩阵[1], 因此, 至少存在一个$j = 1$或2, 使$(J_x(E_0)v)_j > 0$, 对任意 $v > 0$ 所以 P_x 不能非负, 且至少有一个元素是严格负的

若定义 $P = (P_x, 0)$, 则

$$J(E_0)P = \begin{pmatrix} J_x(E_0)P_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ 0 \end{pmatrix},$$

P 是 对应于$J(E_0)$ 的特征向量, 且 $P_x < 0$ 故 $w^-(E_0) \quad \{R^3 \setminus R_+^3\}$, 由引理 1 有 $w^+(E_0) \quad (R_+^3 \setminus \{E_0\}) =$

为讨论平衡点 E_x 的稳定性, 先列出下列几个性质和一个引理 记系统(1) 在平衡点 E_x 处的 Jacobi 矩为$J(E_x)$, 则

$$J(E_x) = \begin{pmatrix} a - 2bx_1^* - \ _1 & _1 & - x_1^*(c + kx_1^*) \\ _2 & m - 2nx_2^* - \ _2 & 0 \\ 0 & 0 & e - fx_1^* \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} J_x(E_x) & * \\ 0 & g(\ _1, \ _2) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $g(\ _1,\ _2)\quad e - fx_1^*(\ _1,\ _2), x_i^*(\ _1,\ _2)\,(i = 1, 2)$ 为下列方程组的唯一正解

$$\begin{cases} x_1^*(a - bx_1^*) + \ _1(x_2^* - x_1^*) = 0, \\ x_2^*(m - nx_2^*) + \ _2(x_1^* - x_2^*) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

性质 1　对任意 $\ _1 > 0,\ \ _2 > 0$, $\det[\boldsymbol{J}_x(E_x)] > 0$

证明　由(8)式得

$$\begin{cases} a - bx_1^* - \ _1 = -\dfrac{\ _1 x_2^*}{x_1^*}, \\ m - nx_2^* - \ _2 = -\dfrac{\ _2 x_1^*}{x_2^*} \end{cases} \tag{9}$$

又　$\det[\boldsymbol{J}_x(E_x)] = (a - bx_1^* - \ _1 - bx_1^*)(m - nx_2^* - \ _2 - nx_2^*) - \ _1\ _2$

把(9)式代入上式, 有

$$\det[\boldsymbol{J}_x(E_x)] = \frac{\ _1 x_2^*}{x_1^*}\, nx_2^* + \frac{\ _2 x_1^*}{x_2^*}\, bx_1^* + bnx_1^* x_2^* > 0$$

性质 2　对任意 $\ _1 > 0,\ \ _2 > 0$, 有

$$x_1^*(\ _1,\ _2)/\ \ _1 < 0, \quad x_1^*(\ _1,\ _2)/\ \ _2 > 0$$

证明　对(8)式两边关于 $\ _1,\ \ _2$ 求偏导, 有

$$\frac{x_1^*}{\ _1} = \frac{(x_1^* - x_2^*)(m - 2nx_2^* - \ _2)}{\det[\boldsymbol{J}_x(E_x)]},$$

$$\frac{x_1^*}{\ _2} = \frac{(x_1^* - x_2^*)\ \ _2}{\det[\boldsymbol{J}_x(E_x)]}$$

因为 $m - 2nx_2^* - \ _2 < 0$, $\det[\boldsymbol{J}_x(E_x)] > 0$, 又由定理 1 推论有 $x_1^* - x_2^* > 0$　故结论真

性质 3　对任意 $\ _1 > 0,\ \ _2 > 0$, $\boldsymbol{J}_x(E_x)$ 稳定

由于 $\boldsymbol{J}_x(E_x)$ 的两个特征根均负, 结论显然

引理 2　对任意 $\ _1 > 0,\ \ _2 > 0$, 在曲线 $A\ _1^2 + B\ _1\ _2 + C\ _1 + D = 0$ 上, 有 $g(\ _1,\ _2) = 0$, 即 $x_1^* = e/f$　其中 $g(\ _1,\ _2)$、x_1^* 如(7)、(8) 所定义, 且

$$\begin{cases} A\quad (ne - fm)f^2, & B\quad (be - af)f^2, \\ C\quad (be - af)(2ne - mf)f, & D\quad ne(be - af)^2 \end{cases} \tag{10}$$

P

证明　把 $x_1^* = e/f$ 代入(8) 中第一式, 求出 x_2^*　再把 $x_1^* = e/f$ 和求出的 x_2^* 代入(8) 中第二式, 化简可得

$$\begin{aligned} &f^2(ne - fm)\ _1^2 + (be - af)f\ _1\ _2 + \\ &\quad (be - af)(2ne - mf)f\ _1 + ne(be - af)^2 = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

注意到(10) 中的记号, (11) 式即为 $A\ _1^2 + B\ _1\ _2 + C\ _1 + D = 0$

定理 3　对任意 $\ _1 > 0,\ \ _2 > 0$, 关于平衡点 $E_x(x_1^*, x_2^*, 0)$ 有下列结论成立

(　) 若 $eb - af > 0$, 则 E_x 不稳定

(　) 若 $eb - af \quad 0$, 则

(A) 当 $m/n \quad e/f$ 时, E_x 局部稳定;

(B) 当 $m/n < e/f$, $(a + m)/(b + n) < e/f$, 且 $\ _1,\ \ _2$ 满足 $(af - be)ne/(ne - mf)f < \ _1$ 及 $A\ _1^2 + B\ _1\ _2 + C\ _1 + D > 0$ 时, E_x 不稳定　其中 A, B, C, D 如(10) 所定义　由题设可知 $A > 0, B < 0, C < 0, D > 0$

( ) 若 E_x 不稳定, 则 $w^+(E_x)$ $(\mathrm{int}R^3_+) =$

( ) 若 E_x 局部稳定, 且

$$\frac{(c+kx_1^*)}{b}\frac{f}{g} < 1, \tag{12}$$

则 E_x 在 $R^3_x = \left\{(x_1, x_2, y): x_1 > 0, x_2 > 0, y \quad 0\right\}$ 中全局渐近稳定

证明 由 E_x 的Jacobi矩阵 $\boldsymbol{J}(E_x)$ 及 $\boldsymbol{J}_x(E_x)$ 的稳定性可知, E_x 的稳定性取决于 $g(\ _1, \ _2)$ 的正负

( ) 若 $eb - af > 0$, 则 $g(\ _1, \ _2) = e - fx_1^* > e - fa/b > 0$(定理1推论), 故 E_x 不稳定

( ) 若 $eb - af \quad 0$,

(A) 因为 $m/n \quad e/f$, 由定理1推论知 $x_1^* > m/n$, 所以 $g(\ _1, \ _2) = e - fx_1^* < e - fm/n$ 0, 即 $g(\ _1, \ _2) < 0$, 故 E_x 局部稳定;

(B) 容易求出, $\ _1\_\ _2$ 平面上的曲线

$$l_1: A \ _1^2 + B \ _1 \ _2 + C \ _1 + D = 0$$

与 $\ _1$ 正半轴有两个交点$(\ _1, 0)$、$(\ _1, 0)$, 其中 $\ _1 = (af - be)/f$, $\ _1 = ne(af - be)/f(ne - mf)$ 由定理1推论知 $x_1^* > m/n$, 注意到

$$x_2^* = \frac{e}{f \quad _1}\left(\frac{be}{f} + \ _1 - a \quad ,1\right.$$

可以推出 $\ _1 > \ _1$ 下面证, 当 $\ _1 > \ _1$ 且 $A \ _1^2 + B \ _1 \ _2 + C \ _1 + D > 0$时, 有 $g(\ _1, \ _2) > 0$ 实际上, 由于 $g(\ _1, 0) = 0$, 又 $g/ \ _1 > 0$, 所以对任意 $\ _1 > \ _1$, 有 $g(\ _1, 0) > 0$ 任取 $\ _1^* > \ _1$, 直线 $\ _1 = \ _1^*$ 交曲线 l_1 于$(\ _1^*, \ _2^*)$ 由引理2, 有 $g(\ _1^*, \ _2^*) = 0$ 注意到 $g/ \ _2 < 0$, 可知对任意 $\ _2 \quad (0, \ _2^*)$ 有 $g(\ _1^*, D_2) > 0$# 由 D_1^*, D_2^* 的任意性, 可知当 $D_1 > D_1^d$ 且 $AD_1^2 + BD_1D_2 + CD_1 + D > 0$ 时, 有 $g(D_1, D_2) > 0$#

另外, 因为 $x_1^*(\,],\,]\,) = (a + m)/(b + n)$, 由定理条件知, $g(\,],\,]\,) = e - fx_1^* > 0$#

( ) 由于 E_x 不稳定, 所以 $g(D_1, D_2) > 0$, 且 $g(D_1, D_2)$ 是 $\boldsymbol{J}(E_x)$ 的一个特征根# 设其相关的特征向量为 $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3)$, 由于

$$(\boldsymbol{J}_x(E_x) - g(D_1, D_2)\boldsymbol{I})\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^* P_3(c + kx_1^*)\\0\end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{I} \text{ 为 } 2 @ 2 \text{ 单位矩阵}),$$

且 $\boldsymbol{J}_x(E_x)$ 稳定, 而 $\boldsymbol{J}(E_x)$ 不稳定, 因此

$$\det[\boldsymbol{J}_x(E_x) - g(D_1, D_2)\boldsymbol{I}] \ X\ 0,$$

从而可选取一个特征向量 $\boldsymbol{P}(X\ 0)$, 使 $P_3 < 0$# 如是 $w^-(E_x)\ H\ (R^3/R^3_+)\ X$, 由引理1, 有 $w^+(E_x)\ H\ (\mathrm{int}R^3_+) =$ #

( ) 令 $V = \sum_{i=1}^{2} w_i\left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln\frac{x_i}{x_i^*}\right) + w_3 y$, $w_i > 0\ (i = 1, 2)$, 则 V 为定正无穷大函数# 由于

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = -(x_1 - x_1^*, y)\begin{pmatrix}w_1 & 0\\0 & w_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & c + kx_1^*\\f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 - x_1^*\\y\end{pmatrix} -$$

$$w_2 n(x_2 - x_2^*)^2 - w_3 kx_1 y^2 - kw_1(x_1 - x_1^*)^2 y - \left[\frac{w_1 D_1}{x_1^*}(x_1 - x_1^*)^2\right.$$

$$\frac{w_2 \mathrm{D}_2}{x_2^*}(x_2 - x_2^*)^2 \# \frac{x_1}{x_2}\Bigg] + w_3(e - fx_1^*)y\#$$

选取适当的 $w_i > 0$, $(i = 1, 2, 3)$, 使 $w_1 \mathrm{D}_1 / x_1^* = w_2 \mathrm{D}_2 / x_2^*$, 则当条件(12) 满足且 E_x 是局部稳定时, 有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t \big|_{(1)} < 0\#$ 从而 E_x 在 R_x^3 中全局渐近稳定#

推论 若 $eb - af$ [0, 则当 $e/f > m/n$, 且对任意 $0 < D_1 < +]$, $0 < D_2 < +]$ 满足 $\mathrm{D}_1 > D_1^d$, 且 $AD_1^2 + BD_1 \mathrm{D}_2 + CD_1 + D < 0$ 时, E_x 局部稳定#

证明同( )(B), 从略#

定理 4 对任意 $\mathrm{D}_1 > 0$, $D_2 > 0$, 关于平衡点 $E_y(0, 0, e/g)$ 有如下结论成立#

( ) 当 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) > 0$ 时, E_y 不稳定#

( ) 若 $ag - ce > 0$, 则当 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) < 0$ 时, E_y 不稳定#

( ) 若 $ag - ce < 0$, 则当 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) < 0$ 时, E_y 局部稳定#

( ) 若 E_y 不稳定, 则 $w^+(E_y)$ H $(\mathrm{int}R_+^3) =$ #

( ) 若 E_y 局部稳定, 且

$$\frac{c(f + el/g)}{bg} < 1 \tag{13}$$

时, E_y 在 $R_y^3 = \{(x_1, x_2, y) \mid x_1 \setminus 0, x_2 \setminus 0, y > 0$ 中全局渐近稳定#

证明 系统(1) 在 E_y 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}(E_y) = \begin{pmatrix} a - \dfrac{ce}{g} - D_1 & \mathrm{D}_1 & 0 \\ \mathrm{D}_2 & Dm - D_2 & 0 \\ -\dfrac{e}{f}\left(f + \dfrac{le}{g}\right) & 0 & -e \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_x(E_y) & 0 \\ * & -e \end{pmatrix}\#$$

$\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 的特征方程为

$$\mathrm{K}^2 - \left(a - \frac{ce}{g} + m - D_1 - D_2\right)\mathrm{K} + \# m\left(a - \frac{ce}{g}\right) - D_1 m - D_2\left(a - \frac{ce}{g}\right) = 0\# \; d$$

( ) 若 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) > 0$, $\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 显然有一正根, 从而 E_y 不稳定#

( ) 若 $ag - ce > 0$, 且 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) < 0$ 时, 则 $\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 至少有一正实部特征根, 所以 E_y 不稳定#

( ) 若 $ag - ce < 0$, 且 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) < 0$ 时, $\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 的两个特征根均有负实部, 故 E_y 局部稳定#

( ) 显然, 当 $\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 不稳定时 E_y 不稳定# 由于 $\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 是一个不可约 ML 矩阵[1], 所以必存在正的特征根 K# 设 K 关于 $\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 的特征向量 $\boldsymbol{P}_x = (P_x^1, P_x^2)$ 为严格正, 则 $-\boldsymbol{P}_x$ 也是 $\boldsymbol{J}_x(E_y)$ 和 K 相关的特征向量# 记 $\boldsymbol{P} = (-\boldsymbol{P}_x, A)$, $A = (e/g)(g + le)/(e + K)$, 则

$$\boldsymbol{J}(E_y)\boldsymbol{P} = \underset{E}{} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{J}_x(E_y)\boldsymbol{P}_x \\ \dfrac{e}{g}\left(g + \overset{x}{}\dfrac{le}{f}\right)\boldsymbol{P}_x^{\boldsymbol{c}} - Ae \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} -\boldsymbol{P}_x \\ A \end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{J}(E_y)$ 和 K 相关的特征向量, 它有一个负元素, 因此 $w^-(E_y)$ H (R^3/R_+^3) X # 由引理 1, 知,

$$w^+(E_y) \; H \; (\mathrm{int}R_+^3) = \quad \#$$

( ) 利用定正无穷大函数

$$V = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3\left[y - \frac{e}{g} + \frac{e}{g}\ln\left(\frac{y}{e/g}\right)\right], \qquad w_i > 0\ (i = 1, 2, 3),$$

即可证明结论, 从略#

定理 5 当 E_x, E_y 均不稳定时, 系统(1) 持续生存#

证明与文[1]类同, 从略#

定理 6 若系统(1) 存在唯一正平衡点 $E_+ = (x_1^0, x_2^0, y^0)$, 则当

$$(c + kx_1^0)(f + ly^0)/bg < 1 \tag{14}$$

时, E_+ 在 R_+^3 中全局渐近稳定#

取定正无穷大函数

$$V = \sum_{i=1}^{2} w_i\left(x_i - x_i^0 - x_i^0\ln\frac{x_i}{x_i^0}\right) + w_3\left(y - y^0 - y^0\ln\frac{y}{y^0}\right), \qquad w_i > 0\ (i = 1, 2, 3)\#$$

即可证明结论# 从略#

112 扩散对种群持续生存的影响

下面我们对系统(1) 和系统(2) 中的种群动力学行为进行比较, 进而说明扩散对种群持续生存的影响#

[持续生存] 对无扩散系统(2), 由引言知, 当 $ag - ce > 0$, 且 $eb - cf > 0$ 时, 种群 x 和 y 持续生存# 对有扩散系统(1), 由定理 3 知, 若 $eb - cf > 0$, 则 E_x 不稳定; 由定理 4 知, 若 $ag - ce > 0$, 且 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g)$ X 0 时, E_y 不稳定, 又因为假设所有平衡点均为双曲型, 故知, 这时系统(1) 持续生存# 结论表明, 若斑块 Ñ 上种群在无扩散时持续生存, 则加上扩散后并不影响种群的持续生存#

[优势] (A) 对系统(2), 由引言知, 当 $ag - ce$ [0, 且 $eb - af > 0$ 时, 种群 y 优势(包括全局优势和局部优势)# 而对系统(1), 若 $eb - cf > 0$, 则 E_x 不稳定(定理 3); 当 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) > 0$ 时, E_y 不稳定(定理 4), 这时种群 x, y 持续生存(定理 5)# 若 $ag - ce < 0$, 且 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 + m(a - ce/g) < 0$ 时, E_y 稳定(定理 4), 这时 y 种群优势# 结论表明, 若无扩散时斑块 Ñ 上种群 y 优势, 则引入扩散后, 任何扩散不会使种群 y 灭绝# 而且适当的扩散可使原来濒临灭绝的种群得以持续生存#

(B) 对系统(2), 当 $ag - ce > 0$ 且 $eb - af$ [0 时, x 种群优势(包括全局和局部优势)# 对系统(1) 由定理 3、定理 3 推论及定理 4 得知, 若 m/n \ e/f, 则种群 x 优势; 若 $m/n < e/f$, 则当 $(a + m)/(b + n) < e/f$, $D_1 > D_1^d$ 且 $AD_1^2 + BD_1D_2 + CD_1 + D > 0$ 时, 种群 x 和 y 持续生存; 当 $D_1 < +$], $D_2 < +$] 且 $D_1 > D_1^d$ 及 $AD_1^2 + BD_1D_2 + CD_1 + D < 0$ 时, 种群 x 优势# 这就是说, 当无扩散且斑块 Ñ 上种群 x 优势时, 引入扩散后, 扩散对种群 x 和 y 持续生存的影响受到斑块 Ò 上容纳量 m/n 大小的制约# 如果 m/n 较大(m/n \ e/f), 则扩散不影响种群的原动力学行为(即 x 优势); 若 m/n 较小($m/n < e/f$), 则在一定范围内的扩散可以使种群 x 和 y 持续生存#

[双稳定] 若 $D_1 = D_2 = 0$, 则当 $ag - ce < 0$ 且 $eb - cf < 0$ 时, 斑块 Ñ 上种群 x 和 y 双稳定# 分析定理3 和定理 4 的结论可知: 引入扩散后, 若 m/n \ e/f, 则当 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) > 0$ 时, 种群 x 优势, 当 $mD_1 + (a - ce/g)D_2 - m(a - ce/g) < 0$ 时, 种群 x 和 y 双稳定# 若 $m/n < e/f$, 则可能出现 x, y 持续生存、x 优势、y 优势及 x, y 双稳定 4 种动力学行为# 此即表明: 在无扩散且斑块 Ñ 上 x、y 双稳定的情况下, 引入扩散后, 扩散时对种群持续生存的影响受斑块 Ò 容纳量 m/n 大小的制约# 若 m/n 较大, 则扩散有利于 x 种群的生

存# 若 m/n 较小, 则扩散对种群 x 和 y 持续生存的影响是一致的, 这时种群 x、y 的动力学行为取决于 D_1、D_2 的范围#

当 $a/b < m/n$ 时, 系统(1) 存在三个平衡点: $E_0(0, 0, 0)$、$E_x(x_1^*(D_1, D_2), x_2^*(D_1, D_2), 0)$、$E_y(0, 0, e/g)$, 并且 $a/b < x_1^* < x_2^* < m/n$#

由于当 $a/b < m/n$ 时关于系统(1) 持续生存的讨论与 $a/b > m/n$ 时相类似, 下面仅写出一个相关的结论, 兹不赘#

定理 7 对任意 $D_1 > 0, D_2 > 0$,

( ) 若 $eb - af$ [0, 则 E_x 局部稳定#

( ) 若 $eb - af > 0$, 则

(A) 当 $a/b < m/n$ [e/f 时, E_x 不稳定;

(B) 当 $a/b < e/f < m/n$ 且 $D_1 > D_1^d$ 及 $AD_1^2 + BD_1D_2 + CD_1 + D > 0$ 时, E_x 不稳定# 其中 A, B, C, D, D_1^d 同定理 3#

( ) 若 E_x 不稳定, 则 $w^+(E_x)$ H $(\mathrm{int}R_+^3) =$ #

由定理 4 和定理 7 的结论, 容易说明在 $a/b < m/n$ 条件下扩散对系统(1) 持续生存的影响#

感谢: 衷心感谢业师陈兰荪教授的热心指导#

参 考 文 献

[1] Takeuchi Y. Conflict between the need to forage and the need to avoid competition: persistence of two_species model[J]. Math Biosci, 1990, 99: 181~ 184, 188, 192.

[2] Takeuchi Y, Adachi N. Existence and bifurcation of stable equilibrium in two_prey, one_predator communities[J]. Ball Math Biol, 1983, 45: 877~ 900.

[3] 陈兰荪. 数学模型与研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988, 15~ 16; 177~ 178.

[4] Freedman H I, Waltwan P. Persistence in models of three interacting predator_prey populations[J]. Math Biosci, 1984, 68: 213~ 231.

Persistence of Two_Species Ayala Competitive Model with Different Diffusions

Yuan Cunde[1] Pei Yongzhen[2]

([1]Department of Mathematics, Shanxi Teacher. s University, Linfen, Shanxi 041004, P R China;
[2]Engineering College of Trasportation, Tianjin 300161, P R China)

Abstract: In this paper, the stabilities of boundary equilibrium and positive equilibrium of two_species Ayala competitive systems with two different diffusions are disscused, and dynamical behaviors of species is obtained. At the same time, the dynamical behaviors between systems with diffusion and those without diffusion are compared. This shows the influence of diffusions on the persistence of species.

Key words: nonlinear; competitive system; diffusion; equilibrium; persistence