

文章编号: 1000-0887(1999) 04-0351-07

线载荷积分方程法分析桩顶受任意 荷载的弹性斜桩*

云天铨

(华南理工大学力学系, 广州 510641)

摘要: 嵌在各向同性均匀弹性半空间的弹性斜桩顶部, 受任意荷载的位移和应力, 可分解为在倾斜平面 xOz 及其法平面 yOz 内进行分析。将 Mindlin 力作为基本虚载荷, 令集度为未知函数 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 、 $Z(t)$, 分别平行于 x 、 y 、 z 轴, 的基本载荷沿桩轴 t 的 $[0, L]$ 内分布, 并在桩顶作用集中力 Q_x 、 Q_y 、 Z , 力偶矩 M_y 、 M_x , 根据弹性桩的边界条件, 将问题归结为一组 Fredholm_Volterra 型的积分方程。文中给出数值解。计算结果的精度可用功的互等定理来检查。

关键词: 线载荷积分方程法; 功的互等定理; 斜桩

中图分类号: O173.5; O343.3 **文献标识码:** A

概 述

斜桩在码头、桥墩、海洋结构, 以及结构和建筑物的基础工程中常遇到。作者曾对刚性斜单桩^[1]、斜桩群^[2]、斜桩群上部结构^[3]的位移分析用线载荷积分方程法探讨过。对于弹性斜单桩, 作者和他的学生们也曾作过多年的探讨, 然而, 由于问题较刚桩复杂, 受力后弹性斜桩变形曲线是未知的, 不像刚性桩仍为直线, 且所用的分析方法太复杂而没发表。本文, 改进了我们以前的工作, 简化应用线载荷积分方程法使问题归结为 Fredholm_Volterra 型积分方程。文中给出数值解法以及用功的互等定理来检查数值计算的精度。

本文所用的假设是: 半空间是均匀各向同性弹性的; 桩的位移是小位移; 桩为中等长度 ($5 \leq L/D \leq 50$); 桩和周围介质粘连, 以及桩的弯曲应用梁的理论。

线载荷积分方程法曾应用于一系列问题的分析^[4-9], 包括动力问题^[10], 因它得到的是一维非奇异积分方程而优于将同问题归结为一维奇异积分方程的边界元法(BEM)。关于此法的理论性探讨, 如解的唯一性, 可参阅[11]。

1 积分方程的推导

令半空间的表面为 xOy 平面, z 轴和桩轴 z_1 的夹角为倾角 $\alpha = \angle z_1Oz = \angle x_1Ox$ 。图 1 的 (a) 倾斜平面 xOz , (b) 其法平面 yOz , 表示计算模型。根据线载荷积分方程法, 将分别平行于 x 、 y 轴的集度为未知函数 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的 Mindlin 水平力, 平行于 z 轴的集度为未知函数 $Z(t)$ 的

* 收稿日期: 1997_12_19; 修订日期: 1998_09_16

作者简介: 云天铨(1936~), 男, 教授, 主要研究积分方程及其在力学中的应用, 近期研究“计算股市”。

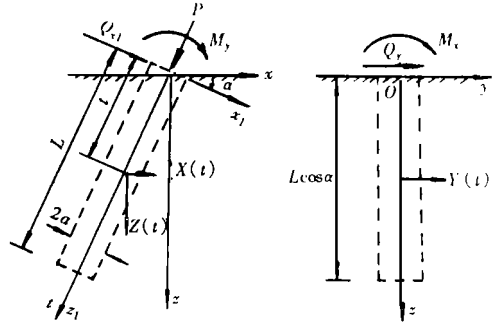
Mindlin 垂直力沿桩轴 $t (= z_1)$ 的 $[0, L]$ 内分布 (为使方法描述清晰, 源点位置用 t 轴描述, 而场点位置用 $z_1 (= t)$ 轴描述), 以及将集中力 Q_x 、 Q_y 、 Z , 力偶 M_y 、 M_x 置于桩顶, 然后, 令由上述全部的虚的基本载荷作用引起的位移场来描述的桩的边界条件得到满足。于是问题归结为一组积分方程。现在, 分解为两个平面并分别来研究。

1.1 倾斜平面 xOz

在图 1(a) 所示的全部虚力作用下, 桩侧表面上 $x_1 = 0, y_1 = y = a, z_1 = z_1$ 的点 $N(0, a, z_1)$ 的位移的直角坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的分量, 由 Mindlin 公式^[12] 算得为:

$$u_1(0, a, z_1) = \int_0^L [A_{11}(0, a, z_1; t)X(t) + A_{13}(0, a, z_1; t)Z(t)] dt + u_{1M}(z_1) + u_{1QP}(z_1), \quad (1)$$

$$w_1(0, a, z_1) = \int_0^L [A_{31}(0, a, z_1; t)X(t) + A_{33}(0, a, z_1; t)Z(t)] dt + w_{1M}(z_1) + w_{1QP}(z_1), \quad (2)$$



(a) 倾斜平面 xOz (b) 法平面 yOz

图 1 计算模型

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{11}(x_1, y_1, z_1; t) &= [K_1(x_2, y_1, z_1; t) \cos \alpha + x_2 K_3(x_2, y_1, z_1; t) \sin \alpha] / H, \\ A_{13}(x_1, y_1, z_1; t) &= [r K_2(x_2, y_1, z_1; t) \cos \alpha + K_4(x_2, y_1, z_1; t) \sin \alpha] / H, \\ A_{31}(x_1, y_1, z_1; t) &= [x_2 K_3(x_2, y_1, z_1; t) \cos \alpha - K_1(x_2, y_1, z_1; t) \sin \alpha] / H, \\ A_{33}(x_1, y_1, z_1; t) &= [K_4(x_2, y_1, z_1; t) \cos \alpha - r K_2(x_2, y_1, z_1; t) \sin \alpha] / H; \\ K_1(x_2, y_1, z_1; t) &= \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2^3} + \frac{x_2^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)x_2^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left[1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right] + \\ &\quad \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c} \left[1 - \frac{x_2^2}{R_2(R_2+z+c)} \right], \quad \text{it} \\ K_2(x_2, y_1, z_1; t) &= \frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5}, \\ K_3(x_2, y_1, z_1; t) &= \frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5}, \\ K_4(x_2, y_1, z_1; t) &= \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \\ &\quad \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5}; \\ x_2 = x + t \cdot \sin \alpha, \quad x &= x_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha, \quad z = x_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha, \\ c &= t \cdot \cos \alpha, \quad r = (x_2^2 + y_1^2)^{1/2}, \quad R_1 = [r^2 + (z-c)^2]^{1/2}, \\ R_2 &= [r^2 + (z+c)^2]^{1/2}, \quad H = 16\pi G(1-\nu); \quad 2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ν, G 分别表示半空间的 Poisson 比和剪切模量。 L, a 分别表示桩的嵌入长度和半径。

$$\begin{aligned}
 u_{1M}(z_1) &= \frac{M_y}{4\pi G} \left\{ \left[\frac{x_0}{r_0} \left(\frac{z_0}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z_0)} \right) + r_0 \left(-\frac{3z_0x_0}{R^5} + \frac{(1-2\nu)(2R+z_0)}{R^3(R+z_0)^2} \right) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \cos\alpha - \left[\frac{2(1-\nu)x_0}{R^3} + \frac{3z_0^2x_0}{R^5} \right] \sin\alpha \right\}, \\
 u_{1M}(z_1) &= \frac{M_y}{4\pi G} \left\{ \left[\frac{2(1-\nu)x_0}{R^3} + \frac{3z_0^2x_0}{R^5} \right] \cos\alpha + \left[\frac{x_0}{r_0} \left(\frac{z_0}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z_0)} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. r_0 \left(-\frac{3z_0x_0}{R^5} + \frac{(1-2\nu)(2R+z_0)}{R^3(R+z_0)^2} \right) \right] \sin\alpha \right\}, \\
 u_{1QP}(z_1) &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ Z \left[r_0 \left(\frac{z_0}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z_0)} \right) \cos\alpha + \left(\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z_0^2}{R^3} \right) \sin\alpha + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. Q_x \left[\left(\frac{1}{R} + \frac{x_0^2}{R^3} \right) \frac{1-\nu-2\nu}{R+z_0} \left(1 - \frac{x_0^2}{R(R+z_0)} \right) \right] \cos\alpha + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. x_0 \left(\frac{z_0}{R^3} + \frac{1-2\nu}{R(R+z_0)} \right) \sin\alpha \right] \right\}, \\
 u_{1QP}(z_1) &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ Z \left[\left(\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z_0^2}{R^3} \right) \cos\alpha - r_0 \left(\frac{z_0}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z_0)} \right) \sin\alpha + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. Q_x \left[x_0 \left(\frac{z_0}{R^3} + \frac{1-2\nu}{R(R+z_0)} \right) \cos\alpha - \left(\frac{1}{R} + \frac{x_0^2}{R^3} + \frac{1-2\nu}{R(R+z_0)} \right) \times \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \left(1 - \frac{x_0^2}{R(R+z_0)} \right) \sin\alpha \right] \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $x_0 = -z_1 \sin\alpha, z_0 = z_1 \cos\alpha, r_0 = (x_0^2 + a^2)^{1/2}, R = (z_1^2 + a^2)^{1/2}$ 。

在上述式中推导过程中应用了关系式

$$u_1 = u \cos\alpha + w \sin\alpha, w_1 = w \cos\alpha - u \sin\alpha$$

以及对 $M_y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon (\epsilon \rightarrow 0)$ 的公式中由一对等值反向相距为 $\epsilon \rightarrow 0$ 的 Mindlin 水平力 Z_0 , 应用 L'Hospital 法则, 取极限运算而得。

本问题的边界条件是:

$$1) \quad E_1 I u_1''(0, a, z_1) = q(z_1), \tag{5}$$

$$\left. \begin{aligned}
 E_1 I u_1''(0, a, 0) &= M_y, \\
 E_1 I u_1^\ominus(0, a, 0) &= Q_{x1}, \\
 E_1 I u_1''(0, a, L) &= 0, \\
 E_1 I u_1^\ominus(0, a, L) &= 0;
 \end{aligned} \right\} + \tag{6}$$

$$2) \quad N(z_1) = E_1 A w_1'(0, a, z_1), \tag{7}$$

$$N(0) = P, \tag{8}$$

式中, E_1, I 和 A 分别是桩的弹性模量、惯性矩和横截面面积。 $()' = d()/dz_1$ 。 (5) 式表示以桩侧面 $x_1 = 0, y_1 = a$ 的线代表桩轴线的梁的挠曲线方程, $q(z_1)$ 为与 x_1 同向垂直作用于桩轴 z_1 的合的线分布力。 (6) 式表示桩弯曲的端边界条件, 在桩顶和桩底的弯矩分别为 M_y 和 0, 剪力分别为 Q_{x1} 和 0, 其中上横划代表已知值。 (7) 式为桩的轴向的弹性变形。 (8) 式表示桩顶受已知值为 P 的轴向压力作用。 由力的分解, 可得:

$$Z = Q_{x1} \sin \alpha + P \cos \alpha, \quad Q_x = Q_{x1} \cos \alpha - P \sin \alpha$$

由于线弹性力学的基本方程(Navier 方程)和边界条件都被虚载荷分布所满足,所以由这些虚载荷引起的应力或位移场就是本问题的解。换句话说,由虚载荷引起的应力或位移场刚好就是和受真实载荷的桩一样。因此,由长度为 z_1 的一段桩的平衡,可得

$$M(z_1) = M_y + Q_{x1} z_1 + \int_0^{z_1} X_1(t)(z_1 - t) dt, \quad (9)$$

$$\text{式中} \quad X_1(t) = X(t) \cos \alpha + Z(t) \sin \alpha; \quad (10)$$

$$M(z_1) = M_y + Q_{x1} z_1 + \int_0^{z_1} q(t)(z_1 - t) dt; \quad (11)$$

$$N(z_1) = P + \int_0^{z_1} Z_1(t) dt, \quad (12)$$

$$\text{式中} \quad Z_1(t) = Z(t) \cos \alpha - X(t) \sin \alpha; \quad (13)$$

$$N(z_1) = P + \int_0^{z_1} T(t) dt; \quad (14)$$

$$Q_{x1}(z_1) = Q_{x1} + \int_0^{z_1} X_1(t) dt; \quad (15)$$

$$Q_{x1}(z_1) = Q_{x1} + \int_0^{z_1} q(t) dt; \quad (16)$$

其中(9)、(12)、(15)为虚载荷(式的右端)和它的应力场(式的左端)的平衡方程,而(11)、(14)、(16)则为真实载荷(式的右端)和它的应力场(式的左端)的平衡方程。因为这些应力场是一样的,所以,得:

$$q(t) = X_1(t), \quad T(t) = Z_1(t) \quad (0 \leq t \leq L), \quad (17)$$

$$M_y = M_y, \quad Q_{x1} = Q_{x1}, \quad P = P. \quad (18)$$

将式(1)、(10)、(17)代入(5)式,和式(2)、(12)~(18)代入(7)式,我们有

$$E_1 K \left\{ \int_0^L [A''_{11}(0, a, z_1; t) X(t) + A''_{13}(0, a, z_1; t) Z(t)] dt + u''_{1M}(z_1) + u''_{1QP}(z_1) \right\} = X(z_1) \cos \alpha + Z(z_1) \sin \alpha, \quad (19)$$

$$P + \int_0^{z_1} [Z(t) \cos \alpha - X(t) \sin \alpha] dt = E_1 A \left\{ \int_0^L [A'_{31}(0, a, z_1; t) X(t) + A'_{33}(0, a, z_1; t) Z(t)] dt + w'_{1M}(z_1) + w'_{1QP}(z_1) \right\}. \quad (20)$$

(19)式为含未知函数 $X(t)$ 、 $Z(t)$ 的 Fredholm 第2类积分方程;(20)式为含未知函数 $X(t)$ 、 $Z(t)$ 的 Fredholm-Volterra 型积分方程。一旦解得 $X(t)$ 、 $Z(t)$, 桩的位移、弯矩、剪力和轴力可以由(1)、(2)、(9~16)式求得。

1.2 平面 $y_1 O z_1$ 内

在图1(b)所示的虚力作用下,桩侧表面上 $y_1 = 0$, $x_1 = a$, $z_1 = z_1$ 的点 $N(a, 0, z_1)$ 的位移,由 Mindlin 公式^[12]算得:

$$v_1(a, 0, z_1) = \int_0^L A_{22}(a, 0, z_1; t) Y(t) dt + v_{1M}(z_1) + v_{1Q}(z_1), \quad (21)$$

式中

$$A_{22}(a, 0, z_1; t) = K_1(0, a, z_1; t)/H =$$

$$\frac{1}{H} \left[\frac{3-4\nu}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}} + \frac{2\alpha_y}{R_{2y}^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_{2y} + z_y + c} \right], \quad (22)$$

其中

$$R_{1y} = [r^2 + (z_y - c)^2]^{1/2}, \quad R_{2y} = [r^2 + (z_y + c)^2]^{1/2},$$

$$z_y = a \sin \alpha + z_1 \cos \alpha;$$

$$v_{1M}(z_1) = \frac{M_x}{4\pi G} \left[\frac{z_y}{R_y^3} - \frac{3x_y^2}{R_y^5} + \frac{1-2\nu}{R_y + z_y} \left(\frac{x_y^2}{R_y^3} - \frac{1}{R_y} + \frac{x_y^2}{R_y^2(R_y + z_y)} \right) \right], \quad (23)$$

$$v_{1Q}(z_1) = \frac{Q_y}{4\pi G} \left[\frac{1}{R_y} + \frac{a^2}{R_y^3} + \frac{1-2\nu}{R_y + z_y} \left(1 - \frac{x_y^2}{R_y(R_y + z_y)} \right) \right], \quad \text{而} \quad (24)$$

$$x_y = a \cos \alpha - z_1 \sin \alpha, \quad R_y = (x_y^2 + z_y^2)^{1/2} = (a^2 + z_1^2)^{1/2}.$$

(23) 式, 其中 $M_x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Y_0 \epsilon$ ($\epsilon \rightarrow 0$), 是由一对等值反向相距 $\epsilon \rightarrow 0$ 的一对 Mindlin 水平力 Y_0 作用于 $(0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, \epsilon)$ 应用 L' Hospital 法则取极限运算而得。

本问题的边界条件是:

$$E_1 I v_1''''(a, 0, z_1) = q_y(z_1), \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 I v_1''(a, 0, 0) &= M_x, \\ E_1 I v_1^\ominus(a, 0, 0) &= Q_y, \\ E_1 I v_1''(a, 0, L) &= 0, \\ E_1 I v_1^\ominus(a, 0, L) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中 $q_y(z_1)$ 是与 $y = y_1$ 同向的垂直作用于桩轴 z_1 的合的线分布力; M_x 和 Q_y 分别是已知的作用于桩顶的弯矩和剪力。

同 xOz 平面分析相似地, 可得:

$$q_y(t) = Y(t) \quad (0 \leq t \leq L), \quad (27)$$

$$M_x = M_x, \quad Q_y = Q_y. \quad (28)$$

将(21~ 28)式代入(25)式, 得

$$E_1 I \left[\int_0^L A_{22}(a, 0, z_1; t) Y(t) dt + v_{1M}''''(z_1) + v_{1Q}''''(z_1) \right] = Y(z_1). \quad (29)$$

(29) 式是一 Fredholm 第 2 类积分方程。一旦解得 $Y(t)$, 桩的弯矩、剪力和位移很易求得。

桩受空间荷载作用分析与桩受两个互相垂直的平面 xOz 和 yOz 的分析的等价性的证明与 [1] 类似, 不在此重复。

2 数值解法与结果的检查

积分方程的最简单的数值解法是解其离散型式。

对 xOz 平面, (19)、(20) 式化为:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n (A_{11ij} X_j + A_{13ij} Z_j) &= B_i, \\ \sum_{j=1}^n (A_{31ij} X_j + A_{33ij} Z_j) &= C_i, \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (30)$$

式中

$$A_{11ij} = E_1 I \int_{(j-1)\Delta L}^{j\Delta L} A_{11}(0, a, z_{1i}; t) dt - \cos \alpha, \quad (31a)$$

$$A_{13ij} = E_1 I \int_{(j-1)\Delta L}^{\Delta L} A_{13}''''(0, a, z_{1i}; t) dt - \sin \alpha, \quad (31b)$$

$$B_i = B(z_{1i}) = -E_1 I [u_{1M}''''(z_{1i}) + u_{1QP}''''(z_{1i})], \quad (31c)$$

$$A_{31ij} = E_1 A \int_{(j-1)\Delta L}^{\Delta L} A_{31}'(0, a, z_{1i}; t) dt + i \cdot \sin \alpha, \quad (31d)$$

$$A_{33ij} = E_1 A \int_{(j-1)\Delta L}^{\Delta L} A_{33}'(0, a, z_{1i}; t) dt - i \cdot \cos \alpha, \quad (31e)$$

$$C_i = C(z_{1i}) = P - E_1 A w_{1M}'(z_{1i}) - E_1 A w_{1QP}'(z_{1i}), \quad (31f)$$

$$X_j = X(t_j), Z_j = Z(t_j), z_{1i} = i \cdot \Delta L, \Delta L = L/n \quad (31g, h)$$

对平面 yOz , (29) 式化为:

$$\sum_{j=1}^n A_{22j} Y_j = D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (32)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{22ij} &= E_1 I \int_{(j-1)\Delta L}^{\Delta L} A_{22}''''(a, 0, z_{1i}; t) dt - 1, \\ D_i &= D(z_{1i}) = -E_1 I [v_{1M}''''(z_{1i}) + v_{1Q}''''(z_{1i})], \\ Y_j &= Y(t_j) \cdot \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

设给定作用于桩顶的载荷为 Z, Q_x, Q_y, M_x, M_y , 则

$$\left. \begin{aligned} Q_{x1} &= Q_x \cos \alpha + Z \sin \alpha, \\ P &= Z \cos \alpha - Q_x \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

于是式(30)和(32)的右边已知, 解这些方程可得 X_j, Z_j 和 Y_j 。因此, 桩的位移、弯矩、剪力和轴力可由相应于式(1)、(2)、(21)、(9)、(15)、(12)等式的离散型式分别求得。

用功的互等定理检查数值结果的精度

设在 xOz 平面, 两组力和力偶 (P_1, Q_{x1}, M_{y1}) 和 (P_2, Q_{x2}, M_{y2}) 作用于桩顶分别算得桩顶的两组位移和转角 $(u_1(0), w_1(0), u_1'(0))$ 为 (f_1, g_1, h_1) 和 (f_2, g_2, h_2) 。据功的互等定理, 有:

$$P_1 g_2 + Q_{x1} f_2 + M_{y1} h_2 = P_2 g_1 + Q_{x2} f_1 + M_{y2} h_1 \quad (35)$$

(35) 式可检查数值结果的精度。篇幅所限, 不在此给出数值例子。

参 考 文 献

- [1] Yun Tianquan. Analysis of sloping rigid pile under arbitrary loads by Line_Loaded Integral Equation Method[A]. In: Y K Cheung, J H W Lee, A Y T Leung eds. Computational Mechanics, 1[C]. Rotterdam: A A Balkema, 1991, 845~ 850.
- [2] Yun T Q, Li L. Analysis of In_Plane_Hinge_Jointed rigid sloping piles[J]. Computers & Structures, 1995, 55(2): 341~ 346.
- [3] 云天铨. 共面铰接刚性斜桩结构体系的线荷载积分方程法的分析, 结构与介质相互作用理论及其应用[M]. 北京: 河海大学出版社, 1993: 632~ 635.
- [4] Yun Tianquan. An integral equation method for solving the torsion problem of bodies of revolution [J]. Journal of Huazhong Institute of Technology [J], 1979, (1): 82~ 97.
- [5] 云天铨. 简便积分方程法分析桩[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(3): 307~ 320.
- [6] 云天铨, 肖永谦, 邱崇光. 受轴向集中压力的椭球体的应力分析[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(6): 641~ 650.
- [7] 云天铨. 包含一受扭回转轴的半空间的性质[J]. 应用数学和力学, 1988, 9(6): 487~ 490.

- [8] 云天铨. 嵌入弹性半空间的弹性回转轴的扭转[J]. 应用数学和力学, 1990, **11**(6): 489~ 498.
- [9] Yun T Q, Su C. Analysis of shaft embedded in granular half space by the Line_Loaded Integral Equation Method[J]. Computers & Structures, 1992, **43**(4): 729~ 735.
- [10] Yun Tianquan. Elastodynamic analysis of torsion of shaft of revolution by Line_Loaded Integral Equation Method[J]. Structural Engineering and Mechanics, An Int J, 1988, **6**(3).
- [11] 云天铨. 域外奇源分布法场点解的唯一性[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(1): 33~ 38.
- [12] Mindlin R B. Force at a point in the interior of a semi_infinite solid[J]. J Physics, 1936, **77**: 195.

Analysis of Sloping Elastic Pile Under Arbitrary Loads by Line_Loaded Integral Equation Method

Yun Tianquan

(Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P R China)

Abstract: The analysis of displacement and stress of elastic sloping pile embedded in a homogeneous isotropic elastic half space under arbitrary loads at top can be decomposed into two plane systems, i. e., the inclined plane xOz and its normal plane yOz . Let Mindlin's forces be the fundamental loads with unknown intensity function $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, parallel to x , y , z axis respectively, be distributed along the t axis of the pile in $[0, L]$ and concentrated forces Q_x , Q_y , Z , couples M_y , M_x at top of the pile, then, according to the boundary conditions of elastic pile, the problem is reduced to a set of Fredholm_Volterra type equations. Numerical solution is given and the accuracy of calculation can be checked by the reciprocal theorem of work.

Key words: line_loaded integral equation method; reciprocal theorem of work; sloping elastic pile