

文章编号: 1000-0887(1999)05-0504-03

一种用于索结构分析的悬链线单元^{*}

彭 卫, 孙炳楠, 唐锦春

(浙江大学 土木系, 杭州 310027)

(陈山林推荐)

摘要: 根据弹性悬链线的理论解析解推导出适于索结构有限元分析的悬链线单元。与常用的三节点、五节点曲线单元相比, 采用该单元编制的软件具有输入数据少、计算机时省、计算精度高的特点。

关键词: 索结构; 悬链线单元; 切线刚度矩阵

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A

引 言

悬索结构是大位移非线性体系, 应从非线性弹性理论出发, 建立悬索非线性分析模式。目前国内外对索结构的分析主要应用有限单元法, 采用不同的索段单元来考虑其非线性效应。常用的索段单元有两节点铰接杆单元、两节点抛物线单元、三节点二次多项式曲线单元、五节点曲线索单元, 这些单元都具有一定程度的近似, 使用上有各自的局限性。而本文提出的基于悬链线解析解的单元, 可以拿整根索作为一个单元, 不仅可以节省计算机时, 而且由于采用了悬链线单元, 使计算图式与实际情况更加吻合。

1 弹性悬链线的静力特性

1.1 基本方程

如图 1 所示的缆索 AB, 跨长 $l = L_H$, 无应力长度 L_0 , 张紧状态时缆索长度 L , 缆索上任一点在无应力时的曲线坐标为 s , 在自重 $W = mgL_0$ 作用下移到新位置 $P(x, z, p)$, 其中 (x, z) 为卡氏坐标, p 为曲线坐标。则有下式成立:

$$(dx/dp)^2 + (dz/dp)^2 = 1 \quad (1)$$

由力的平衡条件(图 2)可得:

$$\begin{aligned} T \cdot dx/dp &= H, \\ T \cdot dz/dp &= V - W \cdot s/L_0 \end{aligned} \quad (2)$$

虎克定律可以写成:

$$T = EA(dp/ds - 1), \quad (3)$$

式中 E 为弹性模量, A 为索的截面积。

边界条件为:

* 收稿日期: 1998_02_28; 修订日期: 1999_01_16

作者简介: 彭卫(1966~), 男, 博士。

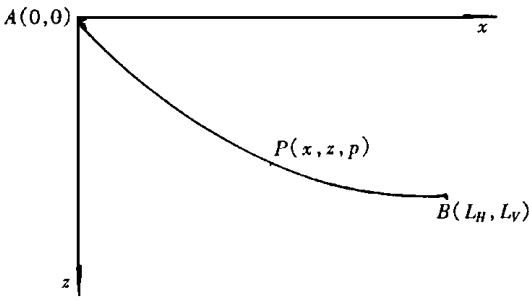


图 1 缆索系统

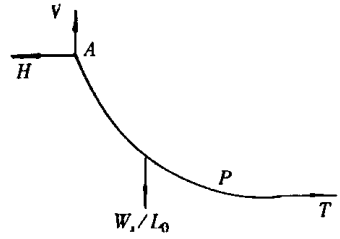


图 2 张紧缆索段受力

A 点($s = 0$): $x = 0, z = 0, p = 0,$
 B 点($s = L_0$): $x = L_H, z = L_V, p = L \cdot$ (4)

1.2 张紧缆索曲线的参数解

由 1.1 的基本方程(1) ~ (4), 可将 x, z, T 描述成 s 的函数, 即:

前 $T = T(s) = \left[H^2 + \left(V - W \cdot \frac{s}{L_0} \right)^2 \right]^{1/2},$ (5)

如基本 $x(s) = \frac{HL_0}{EA} + \frac{HL_0}{W} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V - W \cdot s/L_0}{H} \right) \right],$ (6)

$z(s) = \frac{W}{EA} \left[\frac{V}{W} - \frac{s}{2L_0} + \frac{HL_0}{W} \left\{ 1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V - W \cdot s/L_0}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \right].$ (7)

将边界条件 $s = L_0, x = L_H, z = L_V$ 分别代入(6)、(7) 两式可得以下求解 H, V 的方程:

$L_H = \frac{HL_0}{EA} + \frac{HL_0}{W} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V - W}{H} \right) \right],$ (8)

$L_V = \frac{WL_0}{EA} \left[\frac{V}{W} - \frac{1}{2} + \frac{HL_0}{W} \left\{ 1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V - W}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \right].$ (9)

2 悬链线单元

为便于有限元程序的编制, 将图 1 所示的悬链线单元改用图 3 表示, 则

$F_1 = -H, F_2 = V, F_3 = -F_1, F_4 = -F_2 + W,$
 $T_I = (F_1^2 + F_2^2)^{1/2}, T_J = (F_3^2 + F_4^2)^{1/2}.$

利用上述关系, 并注意

$W = mgL_0,$

$\sinh^{-1} x = \ln[x + (1 + x^2)^{1/2}],$

式(8)、(9)可改写为:

$L_x = -F_1 \left[\frac{L_0}{EA} + \frac{1}{mg} \ln \frac{T_J + F_4}{T_I - F_2} \right],$ (10)

$L_y = \frac{1}{2EA mg} (T_J^2 - T_I^2) + \frac{1}{mg} (T_J - T_I),$ (11)

式(10)、(11)可以写成:

$L_x = f(F_1, F_2),$

$L_y = g(F_1, F_2),$ (12)

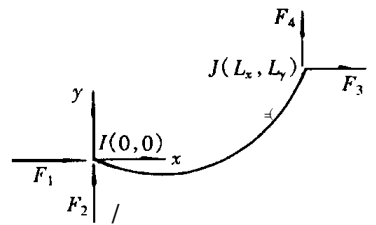


图 3 悬链线单元

$$0 \begin{cases} \delta F_1 \\ \delta F_2 \end{cases} = [K] \begin{cases} \delta L_x \\ \delta L_y \end{cases}, \quad (13)$$

$$[K] = [F]^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} \end{bmatrix} \frac{1}{\det[F]}, \quad (14)$$

$$\det[F] = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}, \quad (15)$$

$$k_{11} = f_{22}' / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}),$$

$$k_{12} = -f_{12}' / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}), \quad (16)$$

$$k_{21} = -f_{21}' / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}),$$

$$k_{22} = f_{11}' / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}).$$

由式(10)~(11)可求得各系数如下:

$$f_{11} = -\frac{L_0}{EA} - \frac{1}{Hmg} \ln \frac{T_J + F_4}{T_I - F_2} + \frac{1}{mg} \left(\frac{F_2}{T_I} + \frac{F_4}{T_J} \right), \quad (17)$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{F_1}{mg} \left(\frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_I} \right), \quad (18)$$

$$f_{22} = -\frac{L_0}{EA} - \frac{1}{mg} \left(\frac{F_2}{T_I} + \frac{F_4}{T_J} \right). \quad (19)$$

参 考 文 献

- [1] Jayaraman H B, Knudson W C. A curved element for the analysis of cable structures[J]. Comput and Struct, 1981, 3(4): 325~ 333.
- [2] Irvine H M. Cable Structures[M]. Cambridge, Mass: MIT Press, 1981.

A Catenary Element for the Analysis of Cable Structures

Peng Wei, Sun Bingnan, Tang Jinchun

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P R China)

Abstract: Based on analytical equations, a catenary element is presented for the finite element analysis of cable structures. Compared with usually used element(3_node element, 5_node element), a program with the proposed element is of less computer time and better accuracy

Key words: cable structures; catenary elements; tangent stiffness matrix