应用数学和力学, 第 20 卷 第 5 期(1999 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 05_0461_09

零调复合映象的重合定理和最佳逼近定理*

丁协平

(四川师范大学 数学系, 成都 610066)

摘要: 对定义在可缩空间上的零调值复合映象证明了某些新的重合点定理• 作为应用某些最佳逼近定理和集值映象的重合点定理被给出• 这些定理改进和推广了最近文献中许多已知结果•

关 键 词: 重合定理; 最佳逼近; 可缩空间; 零调复合映象
中图分类号: O177.91; O174.41 文献标识码: A

引 言

最近对定义在拓扑矢量空间凸集上的零调值复合映象或所谓 Kakutani 因子化多值函数已证明了许多新的不动点定理, 例如见[1~ 4], 特别 Park, Singh 和 Watson[4] 研究了包含由 Lassonde[3] 引入的类 K_c^+ 的一类新的集值映象 V_c^+ 和和零调复合映象, 在凸空间内建立了一个有趣的不动点定理• Ding Xieping[5,6] 在可缩空间内分别对具有可缩值集值映象和零调值复合映象证明了某些新的重合点定理• Yuan[7] 在拓扑矢量空间内推广了 Ky Fan[8] 的最佳逼近定理到两个集值映象• 作为应用, 对内向和外向集值映象证明了几个重合定理和不动点定理•

在本文中, 我们首先对涉及类 V_c^+ 的集值映象证了一个很一般的重合点定理, 推广了 Park, Singh 和 Watson[4] 的定理 1 到可缩空间且统一了[2, 5~ 7, 9, 10~ 13] 中的很多已知结果• 作为应用, 对集值映象给出了若干新的最佳逼近定理和重合定理, 改进和推广了文献中许多已知结果•

1 预备知识

设 Δ_n 是具有顶点 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 的 n_维标准单形• 如果 J 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的非空子集, 我们用 Δ_J 表顶点集 $\{e_j: j \in J\}$ 的凸包• 称拓扑空间 X 是可缩的如果 X 上的恒等映象 I_X 同伦于一常值函数• 称一拓扑空间 X 是零调空间如果它的一切有理域上的约化 Cech 同调群化为零• 特别, 任何可缩空间是零调的且因此拓扑矢量空间内的任何凸集和星形集是可缩和零调的• 对拓扑空间 X, 我们将用 ka(X) 表 X 的一切非空紧零调子集的族•

设 X 和 Y 是拓扑空间• 对一给定的集值映射类 $\boldsymbol{L}$, 定义

$$\boldsymbol{L}(X, Y) = \{T: X \to 2^Y \mid T \in \boldsymbol{L}\}, \qquad \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{M}$$

* 收稿日期: 1998_03_27; 修订日期: 1999_02_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059)
作者简介: 丁协平(1938~) , 男, 教授, 已发表论文 200 余篇, 获省部级奖 6 项.

$$L_c = \left\{T = T_m T_{m-1} \cdots T_1 \mid T_i \in L\right\}。 \qquad (0)$$

利用上述记号我们有下面定义:

1) T 是Kakutani 映象, 记为 $T \in K(X, Y)$, 如果 Y 是一凸空间和 T 是上半连续(u.s.c) 的具有非空紧凸值,

2) T 是零调映象, 记为 $T \in V(X, Y)$, 如果 $T: X \to \mathrm{ka}(Y)$ 是 u.s.c,

3) $T \in K_c^+(X, Y)$(或 $V_c^+(X, Y)$), 如果对 X 的每一 σ_紧子集 K, 存在 $T^* \in K_c(K, Y)$(或 $V_c(K, Y)$) 使得对每一 $x \in K$, $T^*(x) \subset T(x)$。

虽然类 V_c^+ 包含 V_c, K_c^+, K_c 和 K 作为特殊情形。

如果 D 是拓扑空间 X 的非空子集, 我们用 $\overline{D}$ 和 $\mathrm{int}(D)$ 分别表 D 在 X 内的闭包和内部, 如果 D 是一矢量空间的非空子集, 我们用 $\mathrm{co}(D)$ 表 D 的凸包。 设 X 和 Y 是拓扑空间。 一集值映象 $T: X \to Y$ 被说成在 X 上是上(下) 半连续的如果对 Y 的任何闭(开) 子集 D, $T^{-1}(D) = \left\{x \in X: T(x) \cap D \neq \emptyset\right\}$ 是 X 的闭(开) 子集。 T 被说成是紧的如果 $T(X)$ 含于 Y 的一紧子集中, 称 T 有局部交性质(见 Wu[14]) 如果对每一 $x \in X$ 具有 $T(x) \neq \emptyset$, 存在 x 的一开邻域 $N(x)$ 使得 $\bigcap_{z \in N(x)} T(z) \neq \emptyset$。 文[4, p.63] 的例子说明具有局部交性质的集值映象可以没有开逆值。

设 E 是拓扑矢量空间, E^* 是 E 的拓扑对偶空间, 称 E 有充分多连续线性泛函如果对每一 $x \in E$, $x \neq 0$ 存在 $\varphi \in E^*$ 使得 $\varphi(x) \neq 0$, 即 E^* 分离 E 的点。

下面结果是丁[6] 的引理 1。

引理 1.1 设 X 和 Y 是拓扑空间, $T, X \to 2^Y$ 是集值映象, 则下列条件等价:

1) 对每一 $x \in X$, $T(x) \neq \emptyset$ 和 T 有局部交性质,

2) 对每一 $y \in Y$, $T^{-1}(y)$ 包含一开集 $O_y \subset X$(可以是空集) 使得 $X = \bigcup_{y \in Y} O_y$,

3) 存在集值映象 $F: X \to 2^Y$ 使得对每一 $x \in X$, $F(x) \subset T(x)$; 对每一 $y \in Y$, $F^{-1}(y)$ 是 X 中的开集且 $X = \bigcup_{y \in Y} F^{-1}(y)$,

4) 对每一 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 使得 $x \in \mathrm{int}(T^{-1}(y))$。

下面引理含于 Horvath[15] 的定理 1 的证明中(也见 Ding 和 Tan[16])。

引理 1.2 设 Y 是拓扑空间, 对任何 $\emptyset \neq J \subset \left\{0, 1, \cdots, n\right\}$, 令 Γ_J 是 Y 的非空可缩子集, 如果 $\emptyset \neq J \subset J' \subset \left\{0, 1, \cdots, n\right\}$ 蕴含 $\Gamma_J \subset \Gamma_{J'}$, 则存在连续映象 $f: \Delta_n \to Y$ 使得 $f(\Delta_J) \subset \Gamma_J$ 对每一非空子集 $J \subset \left\{0, 1, \cdots, n\right\}$ 成立。 (6)

下面结果在 Lefschetz 不动点理论中是熟知的, 对详细情形读者可参考[4, 10, 17]。

引理 1.3 设 Δ_n 是具有欧氏拓扑的 n_维单形。 如果 $F \in V_c(\Delta_n, \Delta_n)$ 则 F 有一不动点。

2 重合点和最佳逼近

在本节中我们给出涉及集值映象类 V_c^+ 的某些新的重合定理。 作为应用, 几个新的 Ky Fan 型最佳逼近定理和集值映象的重合定理被得到。

定理 2.1 设 X 是可缩空间, Y 是 Hausdorff 拓扑空间和 $S, T: X \to 2^Y$ 是集值映象使得

i) $S \in V_c^+(X, Y)$ 是紧映象,

ii) 对每一开集 $U \subset Y$, $\bigcap_{y \in U \cap \overline{S(X)}} T^{-1}(y)$ 是空集或可缩集,

iii) $\left\{\mathrm{int}(T(x)): x \in X\right\}$ 覆盖 $\overline{S(X)}$。

则存在 $x_0 \in X$ 使得 $S(x_0) \cap T(x_0) \neq \emptyset$。

证明 因 $\overline{S(X)}$ 是紧集, 由 iii), 存在 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset X$ 使得 $\overline{S(X)} = \bigcup_{i=0}^{n}[\operatorname{int}(T(x_i)) \cap \overline{S(X)}]$, 对 $N = \{0, 1, \dots, n\}$ 的每一非空子集 J 定义

$$\Gamma_J = \begin{cases} \bigcap\{T^{-1}(y): y \in \bigcap_{j\in J}[\operatorname{int}(T(x_j)) \cap \overline{S(X)}]\}, & \text{若 } \bigcap_{j\in J}[\operatorname{int}(T(x_j)) \cap \overline{S(X)}] \neq \emptyset, \\ X, & \text{否则。} \end{cases}$$

注意到若 $y \in \bigcap_{j\in J}[\operatorname{int}(T(x_j)) \cap \overline{S(X)}]$ 则 $\{x_j: j \in J\} \subset T^{-1}(y)$。由 ii), 每一 Γ_J 是非空可缩的且显然每当 $\emptyset \neq J \subset J' \subset N$ 时有 $\Gamma_J \subset \Gamma_{J'}$。由引理 1.2, 存在连续映象 $f: \Delta_n \to X$ 使得

$$f(\Delta_J) \subset \Gamma_J, \text{ 对一切 } \emptyset \neq J \subset N。$$

因 $f(\Delta_n)$ 在 X 内是紧的和 $S \in V_c^+(X, Y)$, 存在 $S^* \in V_c(f(\Delta_n), Y)$ 使得 $S^*(x) \subset S(x)$ 对每一 $x \in f(\Delta_n)$ 成立。由 Aubin 和 Eleland[25] 的命题 3.1.11, $S^*(f(\Delta_n))$ 是 $S(X)$ 的紧子集。因此我们有

$$S^*(f(\Delta_n)) = \bigcup_{i=0}^{n}[\operatorname{int}(T(x_i)) \cap S^*(f(\Delta_n))]。$$

令 $\{\psi_i\}_{i\in N}$ 是从属于开覆盖 $\{\operatorname{int}(T(x_i)) \cap S^*(f(\Delta_n))\}_{i\in N}$ 的连续单位分解[14], 即有对每一 $i \in N$, $\psi_i: S^*(f(\Delta_n)) \to [0, 1]$ 连续,

$$\{y \in S^*(f(\Delta_n)): \psi_i(y) \neq 0\} \subset \operatorname{int}(T(x_i)) \cap S^*(f(\Delta_n)) \subset T(x_i)$$

使得 $\sum_{i=0}^{n}\psi_i(y) = 1$ 对一切 $y \in S^*(f(\Delta_n))$ 成立。定义 $\psi: S^*(f(\Delta_n)) \to \Delta_n$ 如下:

$$\psi(y) = (\psi_0(y), \psi_1(y), \dots, \psi_n(y)), \text{ 对每一 } y \in S^*(f(\Delta_n))。$$

则对每一 $y \in S^*(f(\Delta_n))$, $\psi(y) \subset \Delta_{J(y)}$ 其中 $J(y) = \{j \in N: \psi_j(y) \neq \emptyset\}$。所以我们有

$$f(\psi(y)) \in f(\Delta_{J(y)}) \subset \Gamma_{J(y)} \subset T^{-1}(y), \text{ 对一切 } y \in S^*(f(\Delta_n)) \tag{1}$$

因为 $\psi \circ S^* \circ f \in V_c(\Delta_n, \Delta_n)$, 由引理 1.3, 存在 $z \in \Delta_n$ 使得 $z \in \psi \circ S^* \circ f(z)$。令 $x_0 = f(z)$, 则 $x_0 \in f(\Delta_n)$ 和 $\psi^{-1}(z) \cap S^*(x_0) \neq \emptyset$。任取 $y_0 \in \psi^{-1}(z) \cap S^*(x_0)$, 则有 $y_0 \in S^*(x_0) \subset S(x_0)$。由 (1) 式推得 $x_0 = f(z) = f(\psi(y_0)) \subset T^{-1}(y_0)$ 且因此 $y_0 \in T(x_0)$, 这就证得 $S(x_0) \cap T(x_0) \neq \emptyset$。

注 2.1 定理 2.1 推广了 Park, Singh 和 Watson[4] 的定理 1 从凸空间到可缩空间, 也推广了文献[2, 9~11, 18]中的相应结果。

定理 2.2 设 X 是可缩空间, Y 是 Hausdorff 拓扑空间。令 $S: X \to 2^Y$ 和 $B: Y \to 2^X$ 是集值映象使得

i) $S \in V_c^+(X, Y)$ 是紧映象,

ii) 对每一 $y \in Y$, $B(y) \neq \emptyset$ 和 B 有局部交性质,

iii) 对每一开集 $U \subset Y$, $\bigcap_{y \in U \cap \overline{S(X)}} B(y)$ 是空集或可缩集。

则存在 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ 使得 $y_0 \in S(x_0)$ 和 $x_0 \in B(y_0)$。

证明 定义映象 $T: X \to 2^Y$ 如下:

$$T(x) = B^{-1}(x) = \{y \in Y: x \in B(y)\}。 \quad ($$

由引理 1.1 和 ii), 有

$$Y=\bigcup_{x\in X}\mathrm{int}(B^{-1}(x))=\bigcup_{x\in X}\mathrm{int}(T(x))\subset\bigcup_{x\in X}B^{-1}(x)=Y\cdot$$

由此推得$\{\mathrm{int}(T(x)):x\in X\}$覆盖$\overline{S(X)}$，定理2.1的条件iii)成立。因为对每一$y\in Y$，$B(y)=T^{-1}(y)$，由条件iii)知定理2.1的条件ii)也成立。由定理2.1存在$x_0\in X$使得$S(x_0)\cap T(x_0)\neq\varnothing$。任取$y_0\in S(x_0)\cap T(x_0)$，则有$y_0\in S(x_0)$和$x_0\in T^{-1}(y_0)=B(y_0)$，证毕。

注2.2 定理2.2改进和推广了Ding[5]的定理1，Ding[6]的定理1和Browder[19]，Komiga[11]，Metha和Sessa[12]，Tarafder和Yuan[13]和Yuan[7]等人的相应结果。

系2.1 设D是Hausdorff拓扑矢量空间的非空凸子集，Y是Hausdorff拓扑空间F的非空子集。假设$S:D\to 2^Y$和$B:Y\to 2^D$是集值映象使得

i) $S\in V_c^+(D,Y)$是紧映象。

ii) 对每一$y\in Y$，$B(y)\neq\varnothing$和B有局部交性质，则存在$x_0\in D$和$y_0\in Y$使得$y_0\in S(x_0)$和$x_0\in\mathrm{co}(B(y_0))$。

证明 由假设对每一$y\in Y$，$\mathrm{co}(B(y))$是D的非空凸子集且由$(\mathrm{co}B)(y)=\mathrm{co}(B(y))$定义的映象$\mathrm{co}B:Y\to 2^D$有局部交性质。显然对每一开集$U\subset Y$，$\bigcap_{y\in U\cap\overline{S(D)}}\mathrm{co}(B(y))$是空集或凸集。因为拓扑矢量空间中每一凸集必是可缩的，定理2.2的一切条件被满足。由定理2.2，存在$x_0\in D$和$y_0\in Y$使得$y_0\in S(x_0)$和$x_0\in\mathrm{co}(B(y_0))$。

注2.3 注意到Mehta和Sessa[12]的定理2.1中的条件(a)和(c)蕴含$S:D\to 2^W$是上半连续和紧的且有非空紧凸值。因此在D是凸集的假设下系2.1在下列几方面改进和推广了Mehta和Sessa[12]的定理2.1：1) D可以不是仿紧的，2) E可以不是局部凸的，3) 映象$S\in V_c^+(D,Y)$。

f

1969年Ky Fan首先证明了一著名的最佳逼近定理[8，定理1]。此后已出现了这一定理的许多推广和应用，例如见[7，20～24]，现在我们推广Fan的最佳逼近定理到拓扑空间内的两个集值映象。

定理2.3 设X是Hausdorff拓扑空间E的非空子集，Y是拓扑矢量空间。设$G,F:X\to 2^Y$和$H:X\times Y\to\mathbb{R}$是实值函数满足：

i) $G(X)$是Y的可缩子集，G的逆映象$G^{-1}:G(X)\to 2^X$使得$G^{-1}\in V_c^+(G(X),X)$是紧映象，

ii) 由下式定义的映象$B:X\to 2^{G(X)}$

$$B(x)=\left\{y\in G(x):\inf_{u\in F(x)}H(x,y-u)<\inf_{v\in G(x)}\inf_{u\in F(x)}H(x,v-u)\right.$$

有局部交性质，

iii) 对每一开集$U\subset X$，$\bigcap_{x\in U}B(x)$是空集或可缩集。则存在$x_0\in X$使得

$$\inf_{v\in G(X)}\inf_{u\in F(x_0)}H(x_0,v-u)=\inf_{v\in G(x_0)}\inf_{u\in F(x_0)}H(x_0,v-u)\cdot$$

证明 假设结论不真。则对每一$x\in X$，存在$y\in G(X)$使得

$$\inf_{u\in F(x)}H(x,y-u)<\inf_{v\in G(x)}\inf_{u\in F(x)}H(x,v-u)\cdot$$

定义映象$B:X\to 2^{G(X)}$和$S:G(X)\to 2^X$如下：

$$B(x) = \left\{ y \in G(X): \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u) < \inf_{v \in G(x)} \inf_{u \in F(x)} H(x, v - u) \right\}, (\forall x \in X),$$

$$S(y) = G^{-1}(y), \quad (\forall y \in G(X))\cdot$$

则对每一 $x \in X$, $B(x) \neq \emptyset$ 且由假设 ii), B 满足定理 2.2 的条件 ii)• 由 S 的定义有 $S(G(X)) = X$• 条件 iii) 蕴含对每一开集 $U \subset X$,

$$\bigcap_{x \in U \cap \overline{S(G(X))}} B(x) = \bigcap_{x \in U} B(x)$$

是空集或可缩集• 由条件 i), $S \in V_c^+(G(X), X)$ 是紧映象• 因此 S 和 B 满足定理 2.2 的一切条件• 由定理 2.2, 存在 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in G(X)$ 使得 $x_0 \in S(y_0)$ 和 $y_0 \in B(x_0)$, 即有 $y_0 \in G(x_0)$ 和

$$\inf_{u \in F(x_0)} H(x_0, y_0 - u) < \inf_{v \in G(x_0)} \inf_{u \in F(x_0)} H(x_0, v - u),$$

这是不可能的, 故结论成立•

系 2.2 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间 E 的非空紧子集, Y 是拓扑矢量空间• 假设 $G, F: X \to 2^Y$ 和 $H: X \times Y \to \mathbb{R}$ 满足定理 2.3 的条件 ii), iii) 和

i)′ G 是上半连续的具有闭值使得对每一 $y \in G(X)$, $G^{-1}(y)$ 是 X 的零调子集•

则定理 2.3 的结论成立•

证明 我们主张条件 i)′ 蕴含定理 2.3 的条件 i)• 因为 G 是上半连续的具有闭值, 由 Aubin 和 Ekeland[25, p110] 的命题 3.1.7, G 的图在 $X \times Y$ 内是闭的且因此 G^{-1} 的图在 $Y \times X$ 内也是闭的• 因 X 是紧集, 由 Aubin 和 Ekeland[25, p111] 的系 3.1.9 推得 G^{-1} 是上半连续的具有闭值• 由 i)′, 我们有 $G^{-1} \in V(G(X), X) \subset V_c^+(G(X), X)$, 由定理 2.3 知结论成立•

定理 2.4 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间 E 的非空紧子集和 Y 是拓扑矢量空间• 设 $G, F: X \to 2^Y$ 是集值映象和 $H: X \times Y \to \mathbb{R}$ 是连续实值函数使得

i) G 是上半连续的具有非空紧值使得 $G(X)$ 是 Y 的凸子集和对每一 $y \in Y$, $G^{-1}(y)$ 是 X 的零调子集,

许 ii) 对每一 $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $\{ y \in Y: H(x, y) < r \}$ 是凸集,

iii) F 是连续的具有非空紧凸值•

则存在 $x_0 \in X$ 使得

$$\inf_{v \in G(X)} \inf_{u \in F(x_0)} H(x_0, v - u) = \inf_{v \in G(x_0)} \inf_{u \in F(x_0)} H(x_0, v - u)\cdot$$

证明 由 i), 系 2.2 的条件 i)′ 成立• 定义映象 $T: X \to 2^{G(X)}$ 如下:

$$T(x) = \left\{ y \in G(X): \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u) < \inf_{v \in G(x)} \inf_{u \in F(x)} H(x, v - u) \right\}\cdot$$

因为 F 连续具有紧值和 $H: X \times Y \to \mathbb{R}$ 是连续的, 由 Aubin[26, p67; p69] 的定理 1 和定理 2, 对每一固定的 $y \in G(X)$, 函数

$$x \mapsto \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u)$$

连续• 我们主张函数 $(x, y) \mapsto \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u)$ 在 $X \times G(X)$ 内是下半连续的• 事实上我们仅需证明对任何 $r \in \mathbb{R}$, $A = \left\{ (x, y) \in X \times G(X): \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u) \leqslant r \right\}$ 是闭的• 设 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma} \subset A$ 是一网且 $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x_0, y_0)$• 于是有

$$\inf_{u \in F(x_\alpha)} H(x_\alpha, y_\alpha - u) \leqslant r, \quad (\forall \alpha \in \Gamma)\cdot$$

因 X 是紧集, 由 i), ii) 和 Aubin 和 Ekeland[25, p112] 的命题 3.1.11, $S(X)$ 和 $F(X)$ 都是紧的, 因

此$(x_0, y_0) \in X \times G(X)$. 由 iii) 和 H 的连续性, 对每一 $\alpha \in \Gamma$, 存在 $u_\alpha \in F(x_\alpha)$ 使得

$$H(x_\alpha, y_\alpha - u_\alpha) = \inf_{u \in F(x_\alpha)} H(x_\alpha, y_\alpha - u) \leqslant r.$$

注意到$\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset F(X)$ 和 $F(X)$ 是紧集, 存在$\{u_\alpha\}$ 的子网$\{u_\beta\}$ 使得$u_\beta \to u_0$ 和由 iii), $u_0 \in F(x_0)$. 因此我们有

$$\inf_{u \in F(x_0)} H(x_0, y_0 - u) \leqslant H(x_0, y_0 - u_0) =$$
$$\lim_\beta H(x_\beta, y_\beta - u_\beta) =$$
$$\lim_\beta \inf_{u \in F(x_\beta)} H(x_\beta, y_\beta - u) \leqslant r.$$

由此推得 $(x_0, y_0) \in A$ 和函数

$$(x, y) \mapsto \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u)$$

在 $X \times S(X)$ 内下半连续. 因此由 Aubin[26, p67] 的定理 1, 函数

$$x \mapsto \inf_{v \in G(x)} \inf_{u \in F(x)} H(x, u - u)$$

在 X 内下半连续, 所以对每一 $y \in G(X)$, 函数

$$x \mapsto \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u) - \inf_{v \in G(x)} \inf_{u \in F(x)} H(x, v - u)$$

在 X 内上半连续, 由此推得对每一 $y \in G(X)$,

$$T^{-1}(y) = \left\{x \in X: \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u) < \inf_{v \in G(x)} \inf_{u \in F(x)} H(x, v - u)\right\}$$

是 X 的开子集, 由引理 1.1, T 有局部交性质. 因为 $G(X)$ 是凸集和每一 $F(x)$ 是紧凸集, 由 i) 知对每一$x \in X$, $T(x)$ 是凸集, 因此对每一开集 $U \subset X$, $\bigcap_{x \in U} T(x)$ 是空集或凸集, 系 2.2 的所有条件被满足, 由系 2.2 知结论成立.

$\in$

注 2.4　定理 2.4 在下列几方面改进和推广了 Yuan[7] 的定理 4.7: 1) E 可以不是矢量空间, 2) X 可以不是凸集, 3) G 可以不是连续的, 4) 对每一 $y \in G(X)$, $G^{-1}(y)$ 可以是零调集. 我们指出在 Yuan[7] 的定理 4.7 的条件(iii) 中, F 有凸值是必要的. 否则不可能得到对每一 $x \in X$, $B(x)$ 是凸集. 因此定理 3.4 是 Yuan[7] 的定理 4.7 的很一般的推广. 在定理 2.4 中, 如果映象 $G = g$ 是单值映象, 则我们容易得到 Yuan[7] 的定理 4.8, 4.8′, 4.11 和 4.11′ 的推广, 我们省去.

定理 2.5　设 X 是 Hausdorff 拓扑空间 E 的非空子集和 Y 是拓扑矢量空间, 设 $G, F: X \to 2^Y$ 和 $H: X \times Y \to \mathbb{R}$. 假设下列条件成立:

i) $G(X)$ 是 Y 的可缩子集和 $G^{-1} \in \mathbf{V}_c^+(G(X), X)$,

ii) 由下式定义的映象 $B: X \to 2^{G(X)}$:

$$B(x) = \left\{y \in G(X): \inf_{u \in F(x)} H(x, y - u) < \inf_{v \in G(x)} \inf_{u \in F(x)} H(x, v - u)\right\}$$

有局部交性质,

iii) 对每一开集 $U \subset X$, $\bigcap_{x \in U} B(x)$ 是空集或可缩集,

iv) 对每一 $x \in X$, 若 $G(x) \cap F(x) = \emptyset$, 则 $B(x) \neq \emptyset$.

则存在 $x_0 \in X$, 使得 $G(x_0) \cap F(x_0) \neq \emptyset$.

证明　显然定理 2.3 的一切条件被满足. 由定理 2.3, 存在 $x_0 \in X$ 使得

$$\inf_{v \in G(X)} \inf_{u \in F(x_0)} H(x_0, v - u) = \inf_{v \in G(x_0)} \inf_{u \in F(x_0)} H(x_0, v - u).$$

我们主张 $G(x_0) \cap F(x_0) \neq \emptyset$. 如果不真, 由条件 iv), $B(x_0) \neq \emptyset$, 即存在 $y \in G(X)$ 使得

$$\inf_{u\in F(x_0)} H(x_0, y-u) < \inf_{v\in G(x_0)} \inf_{u\in F(x_0)} H(x_0, v-u) = \inf_{v\in G(X)} \inf_{u\in F(x_0)} H(x_0, v-u) \leqslant \inf_{u\in F(x_0)} H(x_0, y-u).$$

这是不可能的, 因此 $G(x_0) \cap F(x_0) \neq \emptyset$.

系 2.3 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间 E 的非空紧子集和 Y 是拓扑矢量空间. 设 $G, F: X \to 2^Y$ 是集值映象和 $H: X \times Y \to \mathbb{R}$ 是连续实值函数. 假设定理 2.4 的条件 i) ~ iii) 成立且下面条件被满足:

iv) 对每一 $x \in X$, 如果 $G(x) \cap F(x) = \emptyset$, 则存在 $y \in G(X)$ 使得

$$\inf_{u\in F(x)} H(x, y-u) < \inf_{v\in G(x)} \inf_{u\in F(x)} H(x, v-u).$$

证明 由使用定理 2.4 和与定理 2.5 的证明相同的论证, 容易证明结论成立

注 2.5 定理 2.5 和系 2.3 推广了 Yuan[7] 的定理 4.10, Browder[9] 的命题 2.2 和 Fan[8] 的定理 2. 我们指出 Yuan[7] 的定理 4.10 的条件(iii) 中, F 有凸值是必要的.

定理 2.6 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间 E 的非空紧子集和 Y 是拓扑矢量空间且其对偶空间 Y^* 分离 Y 的点, 设 $G, F: X \to 2^Y$ 使得

i) G 上半连续具有紧凸值使得 $G(X)$ 是凸集和对每一 $y \in G(X)$, $G^{-1}(y)$ 是零调的,

ii) F 连续具有紧凸值.

则有

a) 或存在 $x_0 \in X$ 使得 $G(x_0) \cap F(x_0) \neq \emptyset$, 或存在 $x_0 \in X$ 和 Y 上的连续半范数 P 使得对每一 $y \in G(X)$,

$$\inf_{u\in F(x_0)} P(y-u) \geqslant \inf_{v\in G(x_0)} \inf_{u\in F(x_0)} P(v-u) > 0.$$

b) 如果对每一 $x \in X$, $F(x) \cap G(X) \neq \emptyset$, 则存在 $x_0 \in X$ 使得 $G(x_0) \cap F(x_0) \neq \emptyset$.

证明 情形 a), 假设对每一 $x \in X$, $G(x) \cap F(x) = \emptyset$. 因 F 和 G 都有紧凸值, 由 Rudin[27] 的定理 3.19 存在正数 $\delta_x > 0$ 和连续性泛函 $P_x \in Y^*$ 使得

$$\inf_{v\in G(x)} \inf_{u\in F(x)} | P_x(v-u) | > \delta_x, \quad (\forall x \in X).$$

因 F 是连续具有紧值和 G 上半连续具有紧值, 使用类似于定理 2.4 证明中类似的论证, 我们能证明函数

$$y \mapsto \inf_{v\in G(y)} \inf_{u\in F(y)} | P_x(v-u) |,$$

在点 x 是下半连续的, 因此对每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 内的开邻域 $N(x)$ 使得

$$\inf_{v\in G(z)} \inf_{u\in F(z)} | P_x(v-u) | \geqslant \frac{\delta_x}{2}, \quad (\forall z \in N(x)).$$

因为族 $\{N(x): x \in X\}$ 是紧集 X 的开覆盖, 存在有限集 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^n N(x_i)$. 令 $P = \max\{| P_{x_i} |: 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 和 $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2}: 1 \leqslant i \leqslant n\right\} > 0$. 则 P 是 Y 上的连续半范数且

$$\inf_{v\in G(x)} \inf_{u\in F(x)} P(v-u) > \delta, \quad (\forall x \in X).$$

定义函数 $H: X \times Y \to \mathbb{R}$ 如下: 对每一 $(x, y) \in X \times Y$, $H(x, y) = P(y)$, 则 G, F 和 H 满足定

理2.4 的一切假设• 由定理 2.4, 存在 $x_0 \in X$ 使得,

$$\inf_{v \in G(X)} \inf_{u \in F(x_0)} P(u - v) = \inf_{v \in G(x_0)} \inf_{u \in F(x_0)} P(v - u) \geqslant \delta > 0 •$$

即结论 a) 成立•

情形 b)• 假设对每一 $x \in X$, $F(x) \cap G(X) \neq ƒ$• 如果对每一 $x \in X$, $G(x) \cap F(x) = ƒ$, 则由结论(a), 存在 $x_0 \in X$ 和连续半范数P 使得

$$\inf_{u \in F(x_0)} P(y - u) \geqslant \inf_{v \in G(x_0)} \inf_{U \in F(x_0)} P(v - u) > 0, \quad (\forall x \in G(X)) •$$

任取 $y_0 \in F(x_0) \cap G(X)$, 则有

$$0 = \inf_{u \in F(x_0)} P(y_0 - u) \geqslant \inf_{v \in G(x_0)} \inf_{u \in F(x_0)} P(v - u) > 0 •$$

这是不可能的, 因此结论 b) 成立•

注2.6 定理 2.6 改进了 Yuan[7] 的定理 4.14, Ha[22] 的定理 2 和 3, Lin[23] 的定理 1 和 2, Fan[8] 的定理 2, 我们指出在Yuan[7] 的定理 4.14 的条件(i)中, G 有紧凸值是必要的• 对具有弱连续和弱上半连续集值映象的 Ky Fan 型最佳逼近定理及其应用, 读者可参见 Ding 和Tan[20] 和 Ding 和Tarafdar[21] 及其参考文献•

参 考 文 献

[1] Ben_El_Mechaiekh H. The coincidence problem for compositions of set_valued maps[J]. Bull Austral Maht Soc, 1990, **41**(3): 421~ 434.

[2] Lassonde M. Fixed points for Kakutani factorizable multifunctions[J]. J Math Anal Appl, 1990, **152**(1): 46~ 60.

[3] Lassonde M. Reduction du cas multivoque au cas univoque dans les problemes de coincidence[A]. In: Thera, Baillon Eds. Fixed Point Theory and Applications[C]. Longman Sci Tech Essex, 1991, 293~ 302.

[4] Park S, Singh S P, Watson B. Some fixed point theorems for composites of acyclic maps[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, **121**(4): 1151~ 1158.

[5] Ding Xieping. A coincidence theorem involving contractible spaces[J]. Appl Math Lett, 1997, **10**(3): 53~ 56.

[6] Ding Xieping. Coincidence theorems involving composites of acyclic mappings in contractible spaces[J]. Appl Math Lett, 1998, **11**(2): 85~ 89.

[7] Yuan X Z. Knaster_Kuratowski_Mazurkiewicz theorem, Ky Fan minimax inequalities and fixed point theorems[J]. Nonlinear World, 1995, **2**: 131~ 169.

[8] Fan K. Extension of two fixed point theorems of F E Browder[J]. Math Z, 1969, **112**(1): 234~ 240.

[9] Browder F E. On a sharpened form of the Schauder fixed_point theorems[J]. Proc Nat Acad Sci U S A, 1977, **74**: 4749~ 4751.

[10] Granas A, Liu F C. Coincidences for set_valued maps and minimax inequalities[J]. J Math Pures Appl, 1986, **65**(9): 119~ 148.

[11] Komiya H. Coincidence theorem and saddle point theorem[J]. Proc Amer Math Soc, 1986, **96**(2): 599 ~ 602.

[12] Metha G, Sessa S. Coincidence theorems and maximal elements in topological vector spaces[J]. Math Japan, 1992, **47**(3): 839~ 845.

[13] Tarafdar E, Yuan X Z. A remark on coincidence theorems[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, **122**(3):

957~ 959.

[14] Wu X. A further generalization of Yannelis_Prabhakar's continuous selection theorem and its applications[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 61~ 74.

[15] Horvath C. Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity[A]. In: Lin, Simons Eds. Nonlinear and Convex Analysis[C]. New York: Marcel Dekker, 1987, 99~ 106.

[16] Ding Xieping, Tan K K. Matching theorems, fixed point theorems and minimax inequalities without convexity[J]. J Austral Math Soc Ser A, 1990, **49**(1): 111~ 128.

[17] Gorniewicz L, Granas A. Some general theorems in coincidence theory Ⅰ[J]. J Math Pures Appl, 1981, **60**(9): 361~ 378.

[18] Ding Xieping, Tarafdar E. Some coincidence theorems and applications[J]. Bull Austral Math Soc, 1995, **50**(1): 73~ 80.

[19] Browder F E. Coincidence theorems, minimax theorems, and variational inequalities[J]. Contemp Math, 1984, **26**: 67~ 80.

[20] Ding Xieping, Tan K K. A set_valued generalization of Fan's best approximation theorem[J]. Can J Math, 1992, **44**(2): 784~ 796.

[21] Ding Xieping, Tarafdar E. Some further generalizations of Ky Fan's best approximation theorem[J]. J Approx Theory, 1995, **81**(3): 406~ 420.

[22] Ha C W. Extension of two fixed point theorems of Ky Fan[J]. Math Z, 1985, **190**(1): 13~ 16.

[23] Lin T C. Some variants of a generalization of a theorem of Ky Fan[J]. Bull Polish Acad Sci Math, 1989, **37**(2): 629~ 635.

[24] Reich S. Fixed points in locally convex spaces[J]. Math Z, 1972, **125**(1): 17~ 31.

[25] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

[26] Aubin J P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory[M]. Revised Edition. Amsterdam: North_Holland, 1982.

[27] Rudin W. Funational Analysis[M]. New York: McGraw_Hill Inc, 1973.

Best Approximation and Coincidence Theorems for Composites of Acyclic Mappings

Ding Xieping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China)

Abstract: Some new coincidence theorems involving a new class of set_valued mappings containing composites of acyclic mappings defined on a contractible space are proved. As applications, some best approximation theorems and coincidence theorems for set_valued mappings are also given. A number of known results in recent literature are improved and generalized by the thorems in this paper.

Key words: coincidence theorems; best approximation; contractible space; composites of acyclic mappings