

文章编号: 1000\_0887(1999) 06\_0647\_07

# 自适应结构频率和阻尼比的计算

张连文<sup>1</sup>, 夏人伟<sup>2</sup>, 曾广武<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>华中理工大学 交通学院 船舶设计室, 武汉 430074;

<sup>2</sup>北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

(张汝清推荐)

摘要: 本文给出状态空间法的一种新技巧, 用于求解自适应结构的振动频率和阻尼比。当采用集中质量法时, 状态矩阵的 Cholesky 分解具有解析式。从而既可提高计算精度, 又可节约计算时间。最后以算例加以说明。

关键词: 自适应结构; 主动元件; 状态空间法; 频率; 阻尼比  
中图分类号: V414.33 文献标识码: A

## 引言

随着高新技术的飞速进步, 自适应结构对现在乃至今后的航天活动将起着不可替代的重要作用<sup>[1~10]</sup>。同时在机器人技术、医疗技术、汽车工业等领域也将会得到广泛的应用。

自适应结构的有限元振动方程为<sup>[11,12]</sup>

$$Mu + Cu + Ku = f, \quad (1)$$

其中,  $M$ 、 $C$ 、 $K$  分别为  $n \times n$  质量、阻尼和刚度矩阵,  $u(t)$  是  $n-1$  节点位移向量,  $f(t)$  是由主动元件产生的  $n-1$  作动力向量,  $n$  为结构有限元的自由度。

在对自适应结构的优化设计中往往需要考虑阻尼比的约束, 同时为了考察振动抑制的效果, 均需要计算结构的频率、模态和阻尼比。由于主动元件产生的阻尼矩阵通常是不可解耦的, 因此需用状态空间法求解。从状态空间法以往使用的几种技巧来看, 有的使状态矩阵没有对称性, 不能进行 Cholesky 分解, 有的需要进行数值计算。因此本文给出状态空间法的一个新技巧, 在采用集中质量法时具有解析 Cholesky 分解式。

## 1 频率和阻尼比的计算

相应于方程 (1) 的特征值问题为

$$(-\lambda^2 M + C + K)u = 0, \quad (2)$$

通常 (2) 有  $2n$  个复特征值  $\lambda_j$  及复模态  $u_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ )。引进状态向量  $Z(t) = [u(t)^T, \dot{u}(t)^T]^T$ , 其上角标 T 表示矩阵的转置。则方程 (1) 可变为

收稿日期: 1998\_07\_27; 修订日期: 1999\_02\_18

基金项目: 国家 863 基金资助项目(863\_2\_4\_4\_4)

作者简介: 张连文(1965~), 男, 讲师, 博士。

$$AZ(t) + BZ(t) = F(t), \quad (3)$$

这里,  $A$ 、 $B$ 、 $F$  可有以往如下几种选择形式<sup>[13, 14]</sup>

$$(\quad) A = \begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -K \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C & \bar{K} \\ K & \mathbf{0} \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$(\quad) A = \begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C & \bar{K} \\ -K & \mathbf{0} \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$(\quad) A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & M \\ M & C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ f(t) \end{bmatrix};$$

$$(\quad) A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -M \\ M & C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ f(t) \end{bmatrix}$$

根据桁架型自适应结构振动方程(1)中矩阵  $M$ 、 $C$ 、 $K$  的特点, 本文重新选取了如下的形式:

$$A = \begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C & \bar{K} \\ -I & \mathbf{0} \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

这样选取的好处是使  $A$  对称正定, 从而广义特征值问题可以转化为标准特征值问题。同时对于桁架型自适应结构的振动方程, 当采用集中质量法时,  $M$  为对角阵, 因此  $A$  具有解析 Cholesky 分解式

由线性代数理论, 相应于(3)的广义特征值问题

$$(A + B)Z = \mathbf{0} \quad (5)$$

与(2)等价。对  $A$  进行 Cholesky 分解且对  $Z(t)$  作线性变换, 则(5)变为如下标准特征值问题

$$(I - H)X = \mathbf{0}, \quad (6)$$

其中,

$$A = LL^T, L = \begin{bmatrix} L_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}, M = L_M L_M^T, \quad (7)$$

$$H = -L^{-1}BL^{-T} = -\begin{bmatrix} L_M^{-1}CL_M^{-T} & L_M^{-1}\bar{K} \\ -L_M^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$X(t) = L^T Z(t), Z(t) = L^{-T} X(t) \quad (9)$$

一般地,  $H$  为非对称非奇异的实矩阵, 因此有  $2n$  个成对共轭出现的非零复特征根。用带原点移位的 QR 算法可同时求得  $H$  的复特征值  $i$  和对应的复特征向量  $X_i$ 。另外由于  $M$ 、 $C$ 、 $K$  中的元素之间的量级不同, 为了减小矩阵  $H$  的条件数以求得更准确的特征值, 需要在 QR 过程前后对  $H$  作平衡和反平衡的技巧处理<sup>[15]</sup>

用  $a_j$ 、 $b_j$  分别表示  $i_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ) 的实部和虚部。这里我们仅考虑虚部为非负的特征值,  $b_j$ 、 $a_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 即为结构振动的频率和衰减系数。且为了方便起见可对下标进行重新排序, 使得  $0 < b_1 < \dots < b_n$ 。则阻尼比可由如下公式求得

$$\zeta_j = -\frac{a_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (10)$$

## 2 数值算例 18 杆桁架型自适应结构

对桁架型自适应结构, 其单元质量、阻尼、刚度矩阵(本文采用集中质量法)  $M^{(e)}$ 、 $C^{(e)}$ 、 $K^{(e)}$  及节点力向量  $f^{(e)}$  具有如下形式<sup>[11]</sup>

$$M^{(e)} = \frac{\rho_a A_a + (1 - \rho_p) A_p}{2} l \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$C^{(e)} = - \frac{E_a A_a}{l} h_v T, \quad (12)$$

$$K^{(e)} = \left[ \frac{E_a A_a}{l} + (1 - \rho_p) \frac{E_p A_p}{l} - \frac{E_a A_a}{l} h_d \right] T, \quad (13)$$

$$f^{(e)} = \frac{E_a A_a}{l} V_0 \begin{bmatrix} \cos \\ \cos \\ \cos \\ -\cos \\ -\cos \\ -\cos \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^{(\theta)} \\ f_2^{(\theta)} \\ f_3^{(\theta)} \\ f_4^{(\theta)} \\ f_5^{(\theta)} \\ f_6^{(\theta)} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 & \cos \cos & \cos \cos & \cos \cos & -\cos^2 & -\cos \cos & -\cos \cos & -\cos \cos \\ & \cos^2 & \cos \cos & \cos \cos & -\cos \cos & -\cos^2 & -\cos \cos & -\cos \cos \\ & & \cos^2 & -\cos \cos & -\cos \cos & -\cos^2 & -\cos \cos & -\cos^2 \\ & & & \cos^2 & \cos \cos & \cos \cos & \cos \cos & \cos \cos \\ & & & & \cos^2 & \cos \cos & \cos \cos & \cos^2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

对称

这里,  $\rho_a, A_a, E_a$  分别为主动杆元的密度、截面积、弹性模量,  $\rho_p, A_p, E_p$  分别为被动杆元的密度、截面积和弹性模量  $\rho$  为主动元件的配置变量( $\rho = 1$  时为主动杆元,  $\rho = 0$  时为被动杆元)  $l$  为主动或被动杆元的长度  $h_d, h_v$  是主动元件的位移和速度反馈增益  $\mu$  为主动元件加压时的伸长系数  $V_0$  为基准电压 而  $(\cos \theta, \cos \theta, \cos \theta)$  为该杆元的方向余弦  $[f_1^{(\theta)}, \dots, f_6^{(\theta)}]^T$  为不包括主动元件产生作动力的节点力分量 有限元方程(1) 即是由如上的单元质量、阻尼、刚度及荷载矩阵利用传统的方法组装而成

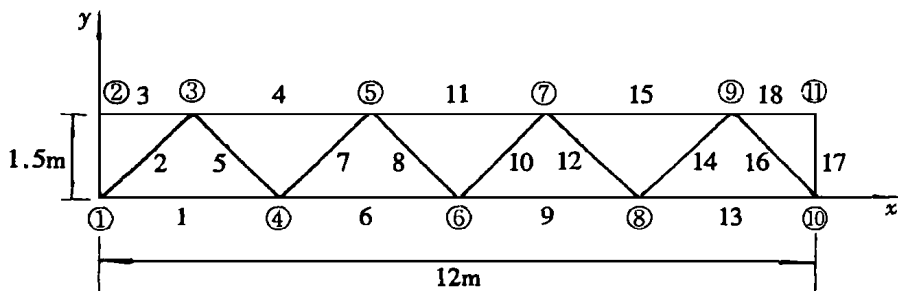


图 1 18杆桁架型自适应结构

本节以 18 杆自适应桁架结构为例试算了两个例题 其中算例的结构、外形尺寸、元件编号、总体节点编号如图 1 所示 假定所有的主动和被动元件具有相同的质量密度及弹性模量,

且设  $\rho = 1.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  及  $E_a = E_p = 1.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  对元件 3, 17, 18,  $\delta = 6.23 \times 10^{-7} \text{ m/V}$ ; 对元件 1, 4, 6, 9, 11, 13, 15,  $\delta = 1.25 \times 10^{-6} \text{ m/V}$ ; 对元件 2, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16,  $\delta = 8.81 \times 10^{-7} \text{ m/V}$  对所有的主动元件  $V_0 = 500 \text{ V}$  相应于这些自由度的方程号码是按活动节点总体序号递增的顺序编排的

考虑如表 1、表 3 所示的两种设计点 ( $\delta, A_p, A_a, h_d, h_v$ ), 则相应的数值结果 ( $a_j, b_j, j$ ) 见表 2、表 4

表 1 第一种情况时的设计点

元件编号		$A_p/\text{m}^2$	$A_a/\text{m}^2$	$h_d/\text{V/m}$	$h_v/\text{V s/m}$
1	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	9 996 720 E+ 01	- 5 618 769 E+ 02
2	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
3	0 0	5 225 507 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
4	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	9 990 339 E+ 01	- 2 560 095 E+ 02
5	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
6	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	9 979 772 E+ 01	- 3 979 160 E+ 01
7	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
8	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
9	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	1 000 109 E+ 02	- 2 081 984 E+ 02
10	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
11	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	1 000 054 E+ 02	- 9 080 497 E+ 01
12	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
13	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	1 000 002 E+ 02	- 1 097 872 E+ 02
14	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
15	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	1 000 027 E+ 02	- 1 518 079 E+ 02
16	0 0	5 032 988 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
17	0 0	5 225 507 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
18	0 0	5 225 507 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00

表 2 第一种情况时结构振动的衰减系数、频率及阻尼比

$j$	$q_j$	$b_j/\text{Hz}$	$\zeta_j$
1	- 1 419 388 E+ 00	9 775 102 E+ 01	1 451 891 E- 02
2	- 1 079 736 E+ 01	4 715 415 E+ 02	2 289 200 E- 02
3	- 8 618 051 E+ 01	7 737 894 E+ 02	1 106 902 E- 01
4	- 5 824 114 E+ 01	1 046 665 E+ 03	5 555 853 E- 02
5	- 1 086 344 E+ 02	1 644 242 E+ 03	6 592 590 E- 02
6	- 6 069 922 E+ 02	2 076 313 E+ 03	2 805 968 E- 01
7	- 1 636 313 E+ 02	2 186 389 E+ 03	7 463 221 E- 02
8	- 2 528 615 E+ 02	2 536 404 E+ 03	9 920 116 E- 02
9	- 3 718 185 E+ 01	3 305 413 E+ 03	1 124 807 E- 02
10	- 6 847 741 E+ 01	3 409 782 E+ 03	2 007 859 E- 02
11	- 5 367 869 E+ 01	3 567 021 E+ 03	1 504 690 E- 02
12	- 9 693 894 E+ 02	3 704 218 E+ 03	2 531 729 E- 01

续表 2

$j$	$a_j$	$b_j/\text{Hz}$	$j$
13	- 2 862 645 E+ 02	4 065 910 E+ 03	7 023 216 E- 02
14	- 1 265 061 E+ 03	4 441 007 E+ 03	2 739 606 E- 01
15	- 6 875 902 E+ 02	4 498 084 E+ 03	1 511 076 E- 01
16	- 1 400 997 E+ 03	4 772 614 E+ 03	2 816 643 E- 01
17	- 1 724 044 E+ 02	6 487 987 E+ 03	2 656 349 E- 02
18	- 6 819 040 E+ 01	6 695 296 E+ 03	1 018 429 E- 02

表 3 第二种情况时的设计点

元件编号		$A_p/\text{m}^2$	$A_a/\text{m}^2$	$h_d/\text{V/m}$	$h_v/\text{V s/m}$
1	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	1 294 760 E+ 02	- 8 202 021 E+ 02
2	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	9 823 460 E+ 01	- 1 290 603 E+ 01
3	0 0	5 000 000 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
4	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	5 663 654 E+ 01	- 6 170 756 E- 01
5	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	1 111 810 E+ 02	- 1 104 377 E+ 00
6	0 0	5 000 000 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
7	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	5 753 208 E+ 01	- 1 365 506 E+ 02
8	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	8 249 777 E+ 01	- 5 816 088 E+ 00
9	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	1 365 820 E+ 02	- 1 581 932 E+ 01
10	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	5 908 597 E+ 02	- 7 595 640 E- 02
11	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	8 122 462 E+ 02	- 2 360 574 E+ 01
12	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	2 914 968 E+ 02	- 6 111 359 E+ 00
13	0 0	5 000 000 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
14	0 0	5 000 000 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
15	1 0	0 000 000 E+ 00	5 000 000 E- 05	- 2 754 976 E+ 04	- 9 742 269 E+ 01
16	0 0	5 000 000 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
17	0 0	5 000 000 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00
18	0 0	5 000 000 E- 05	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00	0 000 000 E+ 00

表 4 第二种情况时结构振动的衰减系数、频率及阻尼比

$j$	$a_j$	$b_j/\text{Hz}$	$j$
1	- 1 503 627 E+ 00	9 793 628 E+ 01	1 535 131 E- 02
2	- 4 796 092 E+ 00	4 721 173 E+ 02	1 015 816 E- 02
3	- 7 702 964 E+ 01	7 925 117 E+ 02	9 674 096 E- 02
4	- 1 269 322 E+ 01	1 048 200 E+ 03	1 210 866 E- 02
5	- 6 277 797 E+ 01	1 656 182 E+ 03	3 787 803 E- 02
6	- 6 640 363 E+ 01	2 167 577 E+ 03	3 062 059 E- 02
7	- 5 704 247 E+ 02	2 278 782 E+ 03	2 428 278 E- 01
8	- 91980 499 E+ 01	21 457 783 E+ 03	4 057 412 E- 02
9	- 11785 788 E+ 03	31 104 291 E+ 03	4 986 433 E- 01

续表 4

$j$	$a_j$	$b_j/\text{Hz}$	$\eta$
10	- 21260 634 E+ 02	31 211 100 E+ 03	7 022 680 E- 02
11	- 41394 700 E+ 01	31 454 412 E+ 03	11 272 096 E- 02
12	- 31762 926 E+ 01	31 562 481 E+ 03	11 056 207 E- 02
13	- 41106 513 E+ 01	41 106 294 E+ 03	11 000 000 E- 02
14	- 31468 449 E+ 02	41 430 804 E+ 03	7 804 159 E- 02
15	- 61714 307 E+ 01	41 751 650 E+ 03	11 412 906 E- 02
16	- 11445 758 E+ 02	51 065 074 E+ 03	21 853 205 E- 02
17	- 91689 677 E+ 01	61 478 085 E+ 03	11 495 595 E- 02
18	- 61698 804 E+ 01	61 701 340 E+ 03	91 992 733 E- 03

我们知道,当  $a_j < 0$  时表示作动力对结构产生抑制作用,而当  $a_j > 0$  时表示作动力对结构产生激振作用# 因此如上计算结果表明,表 1、表 3 给出的是两个可行设计点 #

### 参 考 文 献

- [1] Miura K, Furuya H. An adaptive structure concept for space applications[ A]. In: 36th Congress of International Astronautical Federation [ C]. Stockholm, IAF\_85\_211, Oxford: Pergmon Press, 1985.
- [2] Miura K, Furuya H. Adaptive structure concept for future space applications[ J]. AIAA Journal, 1988, 26(8): 995~ 1002.
- [3] Fanson J L, Garba J A. Experimental studies of active members in control of large space structure [ Z]. AIAA\_88\_2207\_CP, 1988, 9~ 17.
- [4] Wada B K. Adaptive structures[ J]. Journal of Spacecraft and Rocket, 1990, 27(3): 330~ 337.
- [5] Wada B K, Fanson J L, Crawley E F. Adaptive structures [ J]. Mechanical Engineering, 1990, 112(1): 41~ 46.
- [6] Das A, Rao S V, Wada B K, Obal M. Adaptive structure: challenges, issues and opportunities[ A]. In: Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control [ C]. Brighton, England, New York: Copyright c 1991 by the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, 1991, 2538~ 2542.
- [7] Miura K. Adaptive structures research at ISAS 1984\_1990[ J]. J Intel Mater Syst & Struct, 1992, 3(1): 54~ 74.
- [8] Garba J A, Wada B K, Fanson J L. Adaptive structures for precision controlled large space systems [ J]. J Intel Mater Syst & Struct, 1992, 3(2): 348~ 366.
- [9] Venneri S L, Wada B K. Overview of NASA s adaptive structure program[ A]. In: 44th Conference of the IAF ( International Astronautical Federation ) [ C]. Graz, Austria, Oct 16\_22, 1993, Oxford: Pergmon Press, 1993, 1~ 13.
- [10] Crawley E F. Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment[ J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1689~ 1699.
- [11] 张连文. 多目标混合变量的优化方法及自适应结构的优化配置[ D]. [ 博士论文]. 北京:北京航空航天大学, 1996.
- [12] Sepulveda A E, Jin I M, Schmit L A, Jr. Optimal placement of active elements in control augmented structural synthesis[ Z]. AIAA\_92\_2557\_CP, 1992, 2768~ 2787.
- [13] Meirovitch L. Computational Methods in Structure Dynamics[ M]. Alphenaan den Rijn, the Netherlands Rockville Maryland U S A: Sijthoff & Noordhoff International Publishers B V, 1980.
- [14] Tse F S, Morse I E, Hinkle R T. Mechanical Vibrations Theory and Applications [ M]. 2nd eds,

1978.

[15] 郭富印,冯国环,石中岳,等.FORTRAN 算法汇编[M].第二分册,北京:国防工业出版社,1982.

C o m p u t a t i o n o f F r e q u e n c i e s a n d D a m p i n g R a t i o s  
f o r A d a p t i v e S t r u c t u r e s

Zhang Lianwen<sup>1</sup>, Xia Renwei<sup>2</sup>, Zeng Guangwu<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>Laboratory of Ship Structure Design, Faculty of Traffic Science and Engineering,  
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P R China;

<sup>2</sup>Faculty of Space Navigation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,  
Beijing 100083, P R China)

Abstract: In this paper, a new technique of state vector approach to solving damping ratios of adaptive structures is proposed, by which the state matrix can be analytically conducted the Cholesky decomposition, providing that the mass matrix is derived by lumped method. In this case, not only the computational accuracy is raised, but also the numerical operations are reduced. Finally, some numerical results are presented to show that the solution method is simple and efficient.

Key words: adaptive structure; active member; state vector approach; frequency; damping ratio