应用数学和力学,第 20 卷 第 6 期(1999 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0625_08

广义 Pochhammer_Chree 方程的显式精确孤波解*

张 卫国[1], 马文秀[2]

([1] 长沙铁道学院 数理力学系, 长沙 410075; [2] 复旦大学 数学系, 上海 200433)

(戴世强推荐)

摘要: 首先对广义 Pochhammer_Chree 方程(PC 方程)

$$u_{tt} - u_{ttxx} + ru_{xxt} - (a_1u + a_2u^2 + a_3u^3)_{xx} = 0 \qquad (r \neq 0) \tag{I}$$

的孤波解 $u(\xi)$ 建立了公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [u'(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{12rv}(C_+ - C_-)^3 [3a_3(C_+ + C_-) + 2a_2]$$

由此推知: 广义 PC 方程(Ⅰ)不可能有钟状孤波解, 只可能有扭状孤波解; 而广义 PC 方程

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (a_1u + a_2u^2 + a_3u^3)_{xx} = 0 \tag{II}$$

可能既有钟状孤波解又有渐近值满足 $3a_3(C_+ + C_-) + 2a_2 = 0$ 的扭状孤波解. 进一步求出了广义 PC 方程(Ⅰ)的扭状孤波解, 求出了广义 PC 方程(Ⅱ)的钟状孤波解和渐近值满足 $2a_3(C_+ + C_-) + 2a_2 = 0$ 的扭状孤波解. 最后给出了广义 PC 方程

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (a_1u + a_3u^3 + a_5u^5)_{xx} = 0 \tag{III}$$

的显式孤波解.

关 键 词: 非线性发展方程; 广义 Pochhammer_Chree 方程; 孤波解; 精确解

中图分类号: O175.2 文献标识码: A

引 言

Pochhammer_Chree 方程(简称 PC 方程)

$$u_{tt} - u_{ttxx} - u_{xx} - \frac{1}{p}(u^p)_{xx} = 0 \tag{1}$$

可用于描述弹性杆的纵向形变波传播, 其中 $p = 3$ 或 $p = 5$ 反映了物质的二种可能的组成方式[1,2]. 文[1]、[2] 分别给出了方程(1) 当 $p = 2$、$p = 3$、$p = 5$ 时的孤波解, 用数值方法研究了孤波的相互作用. [2] 还提出和研究了广义 PC 方程

$$u_{tt} - u_{ttxx} - \sigma(u)_{xx} = 0 \tag{2}$$

的 Painlev 性质, 指出为使(2) 具 Painlev 性质 $\sigma(w)$ 必须形如 $\sigma(w) = a_0 + a_1w + a_2w^2 + a_3w^3$, 但经进一步研究后又指出, 当 $\sigma(w)$ 取二阶和三阶多项式时 PC 方程都不具有 Painlev 性质.

本文将研究广义 PC 方程

---

* 收稿日期: 1997_10_20; 修订日期: 1999_02_04
作者简介: 张卫国(1957~), 男, 教授, 博士.

$$u_{tt}-u_{ttxx}-(a_1u+a_2u^2+a_3u^3)_{xx}=0,\qquad a_i=\text{const} \tag{II}$$

在 $a_2\neq 0$, $a_3\neq 0$ 时的孤波解• 由于在实际问题中耗散是不可避免的, 所以本文还将研究更为重要的广义 PC 方程

$$u_{tt}-u_{ttxx}+ru_{xxt}-(a_1u+a_2u^2+a_3u^3)_{xx}=0,\qquad r,\ a_i=\text{const}\ (r\neq 0) \tag{I}$$

的精确孤波解• 对含有耗散项 u_{xxt} 的描述弹性杆纵向形变波传播的方程的Cauchy 问题已有些研究, 如[3]等, 但对广义 PC 方程(Ⅰ)的精确孤波解似乎没有人研究过• 最后本文还将给出广义 PC 方程

$$u_{tt}-u_{ttxx}-(a_1u+a_3u^3+a_5u^5)_{xx}=0,\qquad a_i=\text{const} \tag{III}$$

的精确孤波解, 这相当于方程(1)中 $p=3$ 和 $p=5$ 兼有的情况•

1 广义 PC 方程(Ⅰ)的精确显式孤波解

广义 PC 方程(Ⅰ)的行波解 $u(x,t)=u(x-vt)=u(\xi)$ 满足

$$v^2u''(\xi)-v^2u^{(4)}(\xi)-rvu'''(\xi)-(a_1u+a_2u^2+a_3u^3)_{\xi\xi}=0• \tag{3}$$

若我们求广义 PC 方程(Ⅰ)满足条件

$$u'(\xi),\ u''(\xi),\ u'''(\xi)\to 0,\quad |\xi|\to+\infty \tag{4}$$

的孤波解, 则对(3)经二次积分后知 $u(\xi)$ 满足

$$u''(\xi)+\frac{r}{v}u'(\xi)+\frac{a_1-v^2}{v^2}u(\xi)+\frac{a_2}{v^2}u^2(\xi)+\frac{a_3}{v^2}u^3(\xi)=\frac{C}{v^2}, \tag{5}$$

其中 C 为任意积分常数•

对于PC 方程(1), 当 $p=2$, $p=3$ 时文[1]、[2]给出了渐近值相同的钟状孤波解, 对于广义 PC 方程(Ⅰ)是否有钟状孤波解呢? 为了回答这个问题, 我们讨论如下• 设

$$C_+=\lim_{\xi\to+\infty}u(\xi),\quad C_-=\lim_{\xi\to-\infty}u(\xi), \tag{6}$$

(5)式乘 $u'(\xi)$, 并从 $-\infty$ 至 ξ 积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[u'(\xi)]^2+\frac{r}{v}\int_{-\infty}^{\xi}[u'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi+\frac{a_1-v^2}{2v^2}u^2(\xi)+\\&\qquad\frac{a_2}{3v^2}u^3(\xi)+\frac{a_3}{4v^2}u^4(\xi)=\frac{C}{v^2}u(\xi)+C_1•\end{aligned} \tag{7}$$

(7)中令 $\xi\to-\infty$, 得

$$C_1=\frac{a_1-v^2}{2v^2}C_-^2+\frac{a_2}{3v^2}C_-^3+\frac{a_3}{4v^2}C_-^4-\frac{C}{v^2}C_-• \tag{8}$$

(8)代入(7), 并令 $\xi\to+\infty$, 得

$$\begin{aligned}&\frac{r}{v}\int_{-\infty}^{+\infty}[u'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi=\frac{a_3}{4v^2}(C_-^4-C_+^4)+\frac{a_2}{3v^2}(C_-^3-C_+^3)+\\&\qquad\frac{a_1-v^2}{2v^2}(C_-^2-C_+^2)-\frac{C}{v^2}(C_--C_+)•\end{aligned} \tag{9}$$

现在(5)中分别令 $\xi\to-\infty$, $\xi\to+\infty$, 得

$$\begin{cases}C=(a_1-v^2)C_-+a_2C_-^2+a_3C_-^3,\\ C=(a_1-v^2)C_++a_2C_+^2+a_3C_+^3•\end{cases} \tag{10}$$

解(10)可得

$$\begin{cases}C=-[a_2C_+C_-+a_3C_+C_-(C_++C_-)],\\ a_1-v^2=-[a_2(C_-+C_+)+a_3(C_-C_++C_-^2+C_+^2)]•\end{cases}$$

上式代入(9)式，并经化简，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[u'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi=\frac{1}{12rv}(C_+-C_-)^3[3a_3(C_++C_-)+2a_2]\text{•} \tag{11}$$

由(11)可推知广义PC方程(Ⅰ)的孤波解具如下性质:

(ⅰ) 孤波解的导数 $u'(\xi)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上平方可积，即存在 $\int_{-\infty}^{+\infty}[u'(\xi)]^2\mathrm{d}\xi$;

(ⅱ) 当 C_+，C_- 及 r 固定时，一般而言 $|v|$ 越大，孤立波的波形越平缓，$|v|$ 越小，波形越陡; 当 C_+，C_- 及 v 固定时，r 越大(即耗散越大)波形越平缓，r 越小(即耗散越小)波形越陡;

(ⅲ) 广义PC方程(Ⅰ)($r\neq 0$)不可能有渐近值相同的钟状孤立波解(因为 $C_+=C_-$ 时，必有 $u(\xi)=C_+=C_-$，而非孤立波解)，只可能有扭状(渐近值不相同)孤立波解; 而对 $r=0$ 的广义PC方程(Ⅱ)可能既有钟状孤波解，也可能有渐近值满足 $3a_3(C_++C_-)+2a_2=0$ 的扭状孤立波解•

以下我们就将求出性质(ⅲ)所指出的广义PC方程(Ⅰ)和广义PC方程(Ⅱ)的孤波解•

为求出广义PC方程(Ⅰ)的扭状孤波解，设方程(5)有解型如

$$u(\xi)=\frac{A\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{1+\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)}}+D, \tag{12}$$

其中 A、α、D 是待定常数• 则

$$u'(\xi)=\frac{A\alpha\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1+\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)})^2},\quad u''(\xi)=\frac{A\alpha^2(\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)}-\mathrm{e}^{2\alpha(\xi+\xi_0)})}{(1+\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)})^3}\text{•} \tag{13}$$

把(12)、(13)代入(5)，整理可得 A、α、D、C 的方程组:

$$\begin{cases}a_3D^3+a_2D^2+(a_1-v^2)D-C=0,\\ v^2\alpha^2+vr\alpha+2a_2D+3a_3D^2+(a_1-v^2)=0,\\ a_3A^2+(a_2+3a_3D)A-v^2\alpha^2-vr\alpha=0,\\ (a_2+3a_3D)A=3v^2\alpha^2+vr\alpha\text{•}\end{cases} \tag{14}$$

解以上代数方程，可得如下4组解

$$\alpha_1=P,\ A_1=Q,\ D_1=-\frac{1}{2}Q-\frac{r|v|}{\sqrt{-18a_3v}}-\frac{a_2}{3a_3}, \tag{15}$$

此时取 $C=a_3D_1^3+a_2D_1^2+(a_1-v^2)D_1$;

$$\alpha_2=P,\ A_2=-Q,\ D_2=\frac{1}{2}Q+\frac{r|v|}{\sqrt{-18a_3v}}-\frac{a_2}{3a_3}, \tag{16}$$

此时取 $C=a_3D_2^2+a_2D_2^2+(a_1-v^2)D_2$;

$$\alpha_3=-P,\ A_3=Q,\ D_3=-\frac{1}{2}Q+\frac{r|v|}{\sqrt{-18a_3v}}-\frac{a_2}{3a_3}, \tag{17}$$

此时取 $C=a_3D_3^2+a_2D_3^2+(a_1-v)D_3$;

$$\alpha_4=-P,\ A_4=-Q,\ D_4=\frac{1}{2}Q-\frac{r|v|}{\sqrt{-18a_3v}}+\frac{a_2}{3a_3}, \tag{18}$$

此时取 $C=a_3D_4^3+a_2D_4^2+(a_1-v)D_4$; 以上(15)～(18)式中

$$P=\sqrt{\frac{-1}{3v^2}\left[r^2-6(a_1-v^2)+\frac{2a_2^2}{a_3}\right]},\quad Q=\sqrt{\frac{2}{3a_3}\left[r^2-6(a_1-v^2)+\frac{2a_2^2}{a_3}\right]}\text{•} \tag{19}$$

注意到(12)式可写成

$$u(\xi) = \frac{A}{2}\mathrm{th}\left[\frac{\alpha}{2}(\xi + \xi_0)\right] + \left(D + \frac{A}{2}\right) \cdot \tag{20}$$

把以上关于 A_i、α_i、$D_i$$(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 代入(20) 式可得广义 PC 方程(Ⅰ) 的 4 个解 $u_i(\xi)$$(1 \leqslant i \leqslant 4)$• 但由于 th x 是奇函数有 $u_1(\xi) = u_4(\xi)$, $u_2(\xi) = u_3(\xi)$, 我们可得如下定理:

定理 1 设 v 为行波速度, 若

$$a_3 < 0,\ r^2 - 6(a_1 - v^2) + \frac{2a_2^2}{a_3} < 0, \tag{21}$$

则广义 PC 方程(Ⅰ) 有扭状孤波解

$$u^{\pm}_{\mathrm{PC},r} = \pm\left\{\frac{1}{2}Q \cdot \mathrm{th}\left[\frac{1}{2}P \cdot (x - vt + \xi_0)\right] - \frac{r\,|\,v\,|}{\sqrt{-18a_3 v}}\right\} - \frac{a_2}{3a_3}, \tag{22}$$

其中 P、Q 由(19) 给定, $u^{+}_{\mathrm{PC},r}$ 和 $u^{-}_{\mathrm{PC},r}$ 分别表示括号前取正负的解•

至此我们就求出了广义 PC 方程(Ⅰ) 的扭状孤波解, 并且经仔细验算可知以上 $u^{+}_{\mathrm{PC},r}(\xi)$ 和 $u^{-}_{\mathrm{PC},r}(\xi)$ 恰好满足等式(11) •

现在定理 1 中令 $r = 0$, 可得关于广义 PC 方程(Ⅱ) 的如下定理:

定理 2 设 v 为行波速度, 若

$$a_3 < 0,\ 6(v^2 - a_1) + \frac{2a_2^2}{a_3} < 0, \tag{23}$$

则广义 PC 方程(Ⅱ) 有扭状孤波解

$$\begin{aligned} u^{\pm}_{\mathrm{PC}} = {} & \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3a_3}\left[6(v^2 - a_1) + \frac{2a_2^2}{a_3}\right]} \times \\ & \mathrm{th}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1}{3v^2}\left[6(v^2 - a_1) + \frac{2a_2^2}{a_3}\right]}(x - vt + \xi_0)\right\} - \frac{a_2}{3a_3}, \end{aligned} \tag{24}$$

其中 u^{+}_{PC} 和 u^{-}_{PC} 分别表示根号前取 + 和 − 的解 •

易验证由(24) 给出的广义 PC 方程(Ⅱ) 的扭状孤波解 $u^{+}_{\mathrm{PC}}(\xi)$ 和 $u^{-}_{\mathrm{PC}}(\xi)$ 的渐近值恰好满足 $3a_3(C_+ + C_-) + 2a_2 = 0$• 这样我们就得到了广义 PC 方程(Ⅱ) 的渐近值满足 $3a_3(C_+ + C_-) + 2a_2 = 0$ 的扭状孤波解•

2 广义 PC 方程(Ⅱ) 的钟状精确孤波解

本节我们将求出上节中所预测到的广义 PC 方程(Ⅱ) 的钟状孤波解•

广义 PC 方程(Ⅱ) 满足条件(4) 的孤波解 $u(x, t) = u(x - vt) = u(\xi)$ 满足

$$u''(\xi) + \frac{a_1 - v^2}{v^2}u(\xi) + \frac{a_2}{v^2}u^2(\xi) + \frac{a_3}{v^2}u^3(\xi) = \frac{C}{v^2}, \tag{25}$$

其中 C 为任意积分常数• 为求出广义 PC 方程(Ⅱ) 的钟状孤波解, 设(25) 有解型如

$$u(\xi) = \frac{A\,\mathrm{e}^{\alpha(\xi + \xi_0)}}{(1 + \mathrm{e}^{\alpha(\xi + \xi_0)})^2 + B\,\mathrm{e}^{\alpha(\xi + \xi_0)}} + D, \tag{26}$$

其中 A、B、α、D 是待定常数• 直接计算得

$$u'(\xi) = \frac{A\alpha(\eta - \eta^3)}{[(1 + \eta)^2 + B\eta]^2}, \tag{27}$$

$$u''(\xi) = \frac{A\alpha^2[\eta - (2 + B)\eta^2 - 6\eta^3 - (2 + B)\eta^4 + \eta^5]}{[(1 + \eta)^2 + B\eta]^3}, \tag{28}$$

其中 $\eta = \mathrm{e}^{\alpha(\xi + \xi_0)}$, 把(26)、(27)、(28) 代入(25) 式, 由于 $\mathrm{e}^{k\alpha(\xi + \xi_0)}$$(0 \leqslant k \leqslant 6)$ 的线性无关性, 经化简可得 A、B、α、D 满足方程组

$$
\begin{cases}
a_3D^3+a_2D^2+(a_1-v^2)D-C=0,\\
v^2\alpha^2+2a_2D+3a_3D^2+a_1-v^2=0,\\
(a_2+3a_3D)A-3v^2\alpha^2(2+B)=0,\\
a_3A^2+(2+B)(a_2+3a_3D)A-v^2\alpha^2(2+B)^2-8v^2\alpha^2=0.
\end{cases} \tag{29}
$$

若 D 是 $a_3D^3+a_2D^2+(a_1-v^2)D-C=0$ 的实解，方程组(29)有如下二类解.

1) 如果

$$
\begin{cases}
a_2+3a_3D\neq 0,\quad a_1-v^2+3a_3D^2+2a_2D<0,\\
2a_2^2-9a_3(a_1-v^2)-9a_3^2D^2-6a_2a_3D>0,
\end{cases} \tag{30}
$$

则方程组(29)有二组解

$$
\begin{cases}
\alpha=\pm\dfrac{1}{|v|}\sqrt{-(a_1-v^2+3a_3D^2+2a_2D)},\\[2mm]
A=\pm\dfrac{-6\sqrt{2}(a_1-v^2+3a_3D^2+2a_2D)|a_2+3a_3D|}{\sqrt{2a_2^2-9a_3(a_1-v^2)-9a_3^2D^2-6a_2a_3D}\,(a_2+3a_3D)},\\[2mm]
B=-2\pm\dfrac{2\sqrt{2}|a_2+3a_3D|}{\sqrt{2a_2^2-9a_3(a_1-v^2)-9a_3^2D^2-6a_2a_3D}}.
\end{cases} \tag{31}
$$

2) 如果

$$
a_2+2a_3D=0,\quad a_3>0,\quad a_1-v^2+a_2D<0, \tag{32}
$$

则方程组(29)有二组解

$$
\alpha=\pm\frac{1}{|v|}\sqrt{-(a_1-v^2+a_2D)},\quad A=\pm\sqrt{\frac{-8}{a_3}(a_1-v^2+a_2D)},\quad B=-2. \tag{33}
$$

注意到(26)式还可写成

$$
u(\xi)=\frac{A\,\mathrm{sech}^2\left[\dfrac{\alpha}{2}(\xi+\xi_0)\right]}{4+B\,\mathrm{sech}^2\left[\dfrac{\alpha}{2}(\xi+\xi_0)\right]}+D. \tag{34}
$$

因此据以上讨论可得如下结果.

定理3 对于任意的行波速度 v 及积分常数 C，设 D 是 $a_3D^3+a_2D^2+(a_1-v^2)D-C=0$ 的实解，则

1) 若条件(30)成立，广义PC方程(II)有钟状孤波解

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{PC}}^{\pm}=\Bigg\{&\Bigg[\mp\frac{3\sqrt{2}(a_1-v^2+3a_3D^2+2a_2D)|a_2+3a_3D|}{\sqrt{2a_2^2-9a_3(a_1-v^2)-9a_3^2D^2-6a_2a_3D}\,(a_2+3a_3D)}\times\\
&\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2|v|}\sqrt{-(a_1-v^2+3a_3D^2+2a_2D)}(x-vt+\xi_0)\right]\Bigg]\Bigg/\\
&\Bigg[2+\left(-1\pm\frac{\sqrt{2}|a_2+3a_3D|}{\sqrt{2a_2^2-9a_3(a_1-v^2)-9a_3^2D^2-6a_2a_3D}}\right)\times\\
&\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2|v|}\sqrt{-(a_1-v^2+3a_3D^2+2a_2D)}(x-vt+\xi_0)\right]\Bigg]\Bigg\}+D;
\end{aligned} \tag{35}
$$

2) 若条件(32)成立，广义PC方程(II)有钟状孤波解

$$u_{\mathrm{PC}}^{\pm}=\frac{\pm\sqrt{\frac{-2}{a_3}(a_1-v^2+a_2D)}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2|v|}\sqrt{-(a_1-v^2+a_2D)}(x-vt+\xi_0)\right]}{2-\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2|v|}\sqrt{-(a_1-v^2+a_2D)}(x-vt+\xi_0)\right]}+D=$$

$$\pm\sqrt{\frac{-2}{a_3}(a_1-v^2+a_2D)}\,\mathrm{sech}\left[\frac{1}{|v|}\sqrt{-(a_1-v^2+a_2D)}(x-vt+\xi_0)\right]+D, \tag{36}$$

(35)、(36) 中 $u_{\mathrm{PC}}^{+}(\xi)$ 与 $u_{\mathrm{PC}}^{-}(\xi)$ 分别表示根号前同时取“+”与同时取“−”时的解•

至此, 我们求出了上节中对广义 PC 方程(Ⅱ) 所预测到的钟状孤波解和扭状孤波解•

注: 1) 由于 sech x 是偶函数, $\alpha=\pm(1/|v|)\sqrt{-(a_1-v^2+3a_3D^2+2a_2D)}$ 时的解相同, 所以定理 3 中没有列出;

2) 在定理 3 条件下(35) 式中 $u_{\mathrm{PC}}^{+}(\xi)$ 是有界解析解, 容易验证, 当 $a_3>0$ 时 $u_{\mathrm{PC}}^{-}(\xi)$ 也是有界解析解•

若令 $a_2=0$、$a_1=1$、$a_3=1$, 取积分常数 $C=0$、$D=0$, 据(36) 可得到 PC 方程

$$u_{tt}-u_{ttxx}-(u+u^3)_{xx}=0$$

的孤波解

$$u_{\mathrm{PC}}^{\pm}(x,t)=\pm\sqrt{2(v^2-1)}\,\mathrm{sech}\frac{\sqrt{v^2-1}}{v}(x-vt+\xi_0),\qquad v>0,$$

这与[1] 中(11) 式相同•

若 $a_2\neq0$、$a_1=1$、$a_3=1$, 取积分常数 $C=0$、$D=0$, 据(35) 式就可得到广义 PC 方程(Ⅱ) 的渐近值为 0 的孤波解

$$u_{\mathrm{PC}}^{\pm}(x,t)=\frac{\pm\frac{3\sqrt{2}(1-v^2)|a_2|}{\sqrt{2a_2^2-9(1-v^2)a_2}}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2|v|}\sqrt{v^2-1}(x-vt+\xi_0)\right]}{2+\left(-1\pm\frac{\sqrt{2}a_2}{\sqrt{2a_2^2-9(1-v^2)}}\right)\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2|v|}\sqrt{v^2-1}(x-vt+\xi_0)\right]}•$$

3 广义 PC 方程(Ⅲ) 的显式精确孤波解

广义 PC 方程(Ⅲ) 满足

$$u(\xi)、u'(\xi)、u''(\xi)、u'''(\xi)\to0,\qquad|\xi|\to\infty \tag{37}$$

的孤波解 $u(x,t)=u(x-vt)=u(\xi)$ 满足

$$u''(\xi)+\frac{a_1-v^2}{v^2}u(\xi)+\frac{a_3}{v^2}u^3(\xi)+\frac{a_5}{v^2}u^5(\xi)=0• \tag{38}$$

为求(38) 的显式精确解, 作变换

$$u(\xi)=\sqrt{\phi(\xi)}, \tag{39}$$

则 $\phi(\xi)$ 满足

$$2\phi(\xi)\phi''(\xi)-(\phi'(\xi))^2+\frac{4(a_1-v^2)}{v^2}\phi^2(\xi)+\frac{4a_3}{v^2}\phi^3(\xi)+\frac{4a_5}{v^2}\phi^4(\xi)=0• \tag{40}$$

设(40) 有解型如

$$\phi(\xi)=\frac{A\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1+\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)})^2+B\mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)}}=\frac{A\,\mathrm{sech}^2\frac{\alpha}{2}(\xi+\xi_0)}{4+B\,\mathrm{sech}^2\frac{\alpha}{2}(\xi+\xi_0)}, \tag{41}$$

其中 A、α、B 为待定常数• 由于 $\phi'(\xi)$、$\phi''(\xi)$ 与(27)、(28) 式相同, 故把(41) 式代入(40) 并经

化简可得方程组：

$$\begin{cases} v^2\alpha^2 + 4(a_1 - v^2) = 0, \\ 2a_3A + 4(a_1 - v^2)(2 + B) - v^2\alpha^2(2 + B) = 0, \\ -5v^2\alpha + 2(a_1 - v^2)[2 + (2 + B)^2] + 2a_3A(2 + B) + 2a_5A^2 = 0. \end{cases} \tag{42}$$

解方程组(42)得

$$\alpha_\pm = \pm 2\sqrt{\frac{v^2 - a_1}{v^2}},\quad A_\pm = \pm 8\sqrt{\frac{3(a_1 - v^2)^2}{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}},$$

$$B_\pm = -2 \pm \frac{2\sqrt{3}\,a_3}{\sqrt{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}}.$$

上式代入(41)，即得方程(40)的二个解

$$\phi_1(\xi) = \frac{4\sqrt{\dfrac{3(a_1 - v^2)^2}{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}}\operatorname{sech}^2\sqrt{\dfrac{v^2 - a_1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)}{2 + \left(-1 + \dfrac{\sqrt{3}a_3}{\sqrt{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}}\right)\operatorname{sech}^2\sqrt{\dfrac{v^2 - a_1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)}, \tag{43}$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{-4\sqrt{\dfrac{3(a_1 - v^2)^2}{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}}\operatorname{sech}^2\sqrt{\dfrac{v^2 - a_1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)}{2 - \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}a_3}{\sqrt{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}}\right)\operatorname{sech}^2\sqrt{\dfrac{v^2 - a_1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)}. \tag{44}$$

注意，$\alpha = -2\sqrt{(v^2 - a_1)/v^2}$时的解与$\alpha = 2\sqrt{(v^2 - a_1)/v^2}$时的解相同. 易验证，在$v^2 - a_1 > 0$情况下，若条件$a_3 > 0$、$a_5 \geqslant 0$或条件$a_3 \leqslant 0$、$a_5 > 0$成立，则$\phi_1(\xi) > 0$；而$\phi_2(\xi)$通常是负的，因为$\phi_2(\xi; a_3) = -\phi_1(\xi; -a_3)$. 再注意到若$u(\xi)$是(38)的解，$-u(\xi)$也是(38)的解，故得如下定理：

定理4 设v是行波速度，$v^2 - a_1 > 0$. 若条件$a_3 > 0$、$a_5 \geqslant 0$或条件$a_3 \leqslant 0$、$a_5 > 0$成立，则广义PC方程(III)有钟状孤波解

$$u(x,t) = \pm\left[\frac{4\sqrt{\dfrac{3(a_1 - v^2)^2}{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}}\operatorname{sech}^2\sqrt{\dfrac{v^2 - a_1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)}{2 + \left(-1 + \dfrac{\sqrt{3}a_3}{\sqrt{3a_3^2 - 16a_5(a_1 - v^2)}}\right)\operatorname{sech}^2\sqrt{\dfrac{v^2 - a_1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{45}$$

如果我们在(45)式中令$a_1 = 1$、$a_3 = 1/3$、$a_5 = 0$或$a_1 = 1$、$a_3 = 0$、$a_5 = 1/5$，就可得PC方程(1)当$p = 3$或$p = 5$时的孤波解：

$$u(x,t) = \pm\sqrt{6(v^2 - 1)}\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)\right],$$

$$u(x,t) = \pm\left\{\sqrt{15(v^2 - 1)}\operatorname{sech}\left[2\sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2}}(x - vt + \xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

它们与[2]中所给出的孤波解一致.

参 考 文 献

[1] Bogolubsky I L. Some examples of inelastic soliton interaction[J]. Computer Physics Communica-

tions, 1977, **13**(2): 149~155.

[2] Clarkson P A, Le Veque R J, Saxton R. Solitary_wave interactions in elastic rods[J]. Studies in Applied Mathematics, 1986, **75**(1): 95~122.

[3] Saxton R. Existence of solutions for a finite nonlinearly hyperelastic rod[J]. J Math Anal Appl, 1985, **105**(1): 59~75.

Explicit Solitary_Wave Solutions to Generalized Pochhammer_Chree Equations

Zhang Weiguo[1], Ma Wenxiu[2,3]

([1]Department of Mathematics and Mechanics, Changsha Railway University, Changsha 410075, P R China;

[2]Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, P R China;

[3]FB Mathematik_Informatik, Universität_GH Paderborn, D_33098 Paderborn, Germany)

Abstract: For solitary_wave solutions $u(\xi) = u(x - vt + \xi_0)$ to the generalized Pochhammer_Chree equation (PC equation)

$$u_{tt} - u_{ttxx} + ru_{xxt} - (a_1u + a_2u^2 + a_3u^3)_{xx} = 0 \qquad r,\ a_i = \text{consts}(r \neq 0), \tag{I}$$

the formula $\int_{-\infty}^{+\infty}[u'(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{12rv}(C_+ - C_-)^3[3a_3(C_+ + C_-) + 2a_2]$, $C_\pm = \lim_{\xi \to \pm\infty} u(\xi)$, is established, by which it is shown that the generalized PC equations (I) has not bell profile solitary_wave solutions but may have kink profile solitary_wave solutions. However a special generalized PC equation

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (a_1u + a_2u^2 + a_3u^3)_{xx} = 0, \quad a_i = \text{consts} \tag{II}$$

may have not only bell profile solitary_wave solutions, but also kink profile solitary wave solutions whose asymptotic values satisfy $3a_3(C_+ + C_-) + 2a_2 = 0$. Furthermore all expected solitary_wave solutions are given. Finally some explicit bell profile solitary_wave solutions to another generalized PC equation

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (a_1u + a_3u^3 + a_5u^5)_{xx} = 0, \quad a_i = \text{consts} \tag{III}$$

are proposed.

Key words: nonlinear evolution equation; generalized Pochhammer_Chree equation; solitary wave solution; exact solution