文章编号: 1000_0887(1999) 06_0607_06

一类高阶中立型方程的周期解

曹进德

(云南大学 成人教育学院, 昆明 650091)

(李继彬推荐)

摘要:　利用 Fourier 级数理论讨论了一类高阶中立型方程的周期解问题．所得结果改进了司建国(应用数学和力学, 第 17 卷 1 期: 关于高阶常系数中立型方程周期解的讨论) 的主要结果, 即将该文定理 1 的条件 $|b_0| < 1/2$ 改为 $|b_0| \neq 1$, 从而该文的其它定理也可相应得到改进．

关 键 词:　周期解;　中立型方程;　Fourier 级数
中图分类号:　O175.1　　文献标识码:　A

引　　言

考虑如下一类高阶中立型方程

$$x^{(k)}(t)+\sum_{i=1}^{k} a_i x^{(k-i)}(t)+\sum_{j=0}^{k} b_j x^{(k-j)}(t-h_j)=f(t) \tag{1}$$

的周期解问题, 其中 $a_i, b_j, h_j \geq 0 (i=1,2,\cdots,k; j=0,1,\cdots,k)$ 是常数, $f(t)$ 是以 2π 为周期的 $k-1$ 阶连续可微函数, 设其 Fourier 展开式为

$$f(t)=k_0+\sum_{n=1}^{\infty}(k_n \cos nt+l_n \sin nt), \tag{2}$$

这里 k_0, k_n, l_n 为其 Fourier 系数．

文[1]只在 $|b_0| < 1/2$ 下给出了(1) 周期解存在、唯一的充要条件, 本文在 $|b_0| \neq 1$ 下获得了(1) 周期解存在、唯一的充要条件, 我们的结果改进、推广了文[1, 2] 的全部结果．

1　主要结果及其证明

定理 1　设 $|b_0| \neq 1$, 则方程(1) 存在以 2π 为周期的 $k-1$ 阶连续可微周期解的充要条件是对一切自然数 n, 关于 c_0, c_n, d_n 的代数方程组

$$\begin{cases}(a_k+b_k)c_0=k_0,\\ p(n)c_n+q(n)d_n=k_n,\\ -q(n)c_n+p(n)d_n=l_n\end{cases} \tag{3}$$

有解, 其中

$$p(n)=n^k\cos\frac{k\pi}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}a_i n^{k-i}\cos\frac{(k-i)\pi}{2}+a_k+$$

收稿日期:　1996_12_16;　修订日期:　1999_02_04
基金项目:　云南省自然科学研究基金资助课题(97A012G)
作者简介:　曹进德(1963～), 教授, 博士, 云南省确定的跨世纪学术和技术带头人.

$$\sum_{i=0}^{k-1} b_i n^{k-i}\cos\left[\frac{(k-i)}{2}+nh_i\right]+b_k\cos nh_k=$$

$$n^k\left[\cos\frac{k}{2}+b_0\cos\left(\frac{k}{2}+nh_0\right)\right]+\sum_{i=1}^{k-1}a_i n^{k-i}\cos\frac{(k-i)}{2}+a_k+$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} b_i n^{k-i}\cos\left[\frac{(k-i)}{2}+nh_i\right]+b_k\cos nh_k,$$

$$q(n)=n^k\sin\frac{k}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}a_i n^{k-i}\sin\frac{(k-i)}{2}+$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} b_i n^{k-i}\sin\left[\frac{(k-i)}{2}+nh_i\right]-b_k\sin nh_k=$$

$$n^k\left[\sin\frac{k}{2}+b_0\sin\left(\frac{k}{2}+nh_0\right)\right]+\sum_{i=1}^{k-1}a_i n^{k-i}\sin\frac{(k-i)}{2}+$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} b_i n^{k-i}\sin\left[\frac{(k-i)}{2}+nh_i\right]-b_k\sin nh_k$$

证 必要性的证明与文[1]定理1相同 以下证充分性: 设方程组(3)有解, 考查下列诸三角级数

$$c_0+\sum_{n=1}(c_n\cos nt+d_n\sin nt),$$

$$\sum_{n=1}\left[n^m\left(c_n\cos\frac{m}{2}+d_n\sin\frac{m}{2}\right)\cos nt+n^m\left(d_n\cos\frac{m}{2}-c_n\sin\frac{m}{2}\right)\sin nt\right]$$

$$(m=1,2,\quad,k)$$

现证这 $k+1$ 个级数均为绝对收敛和一致收敛的

由于

$$p^2(n)+q^2(n)=n^{2k}(1+2b_0\cos nh_0+b_0^2)+R(n)$$

$$n^{2k}(1-|b_0|)^2+R(n),$$

这里 $R(n)$ 是关于 n 的 $2k-1$ 次多项式, 它的每个系数都是由 a_i, b_i,

$$\cos\frac{(k-i)}{2},\ \sin\frac{(k-i)}{2},\ \cos\left[\frac{(k-i)}{2}+nh_i\right],\ \sin\left[\frac{(k-i)}{2}+nh_i\right]$$

$$(i=1,2,\quad,k)$$

施行有限次加减法和乘法运算得到的 于是必存在充分大的自然数 N, 使得当 n N 时, 有

$$p^2(n)+q^2(n)\quad\frac{(1-|b_0|)^2}{4}n^{2k}\quad n^{2m}\qquad(m=1,2,\quad,k-1)\tag{4}$$

由方程组(3)可推出

$$(p^2(n)+q^2(n))c_n=p(n)k_n-q(n)l_n,\tag{5}$$

$$(p^2(n)+q^2(n))d_n=q(n)k_n+p(n)l_n\tag{6}$$

利用(4)、(5)、(6)可推出当 n N 时, 有

$$n^m(|c_n|+|d_n|)\quad\frac{|1-|b_0||}{2}n^k(|c_n|+|d_n|)$$

$$\sqrt{p^2(n)+q^2(n)}(|c_n|+|d_n|)=$$

$$\frac{|p(n)k_n-q(n)l_n|}{\sqrt{p^2(n)+q^2(n)}}+\frac{|q(n)k_n+p(n)l_n|}{\sqrt{p^2(n)+q^2(n)}}$$

$$\frac{|p(n)||k_n|+|q(n)||l_n|}{\sqrt{p^2(n)+q^2(n)}}+\frac{|q(n)||k_n|+|p(n)||l_n|}{\sqrt{p^2(n)+q^2(n)}}$$

$$2(|k_n|+|l_n|), \qquad (m=1,2,\quad ,k-1),$$

即当 $n \quad N$ 时, 有

$$n^m(|c_n|+|d_n|) \qquad 2(|k_n|+|l_n|), \qquad (m=1,2,\quad ,k-1)$$

$$\frac{|1-|b_0||}{2}n^k(|c_n|+|d_n|) \qquad 2(|k_n|+|l_n|),$$

注意到

$$|k_n|+|l_n|=\frac{1}{n^m}(|n^m k_n|+|n^m l_n|) \qquad \frac{1}{2n^{2m}}+(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2),$$

则有

$$n^m(|c_n|+|d_n|) \qquad \frac{1}{n^{2m}}+2(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2)$$

$$(n \quad N; m=1,2,\quad ,k-1),$$

$$\frac{|1-|b_0||}{2}n^k(|c_n|+|d_n|) \qquad \frac{1}{n^{2m}}+2(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2)$$

$$(n \quad N; m=1,2,\quad ,k-1)$$

由于 $\quad n^m\left(k_n\cos\frac{m}{2}+l_n\sin\frac{m}{2}\right)$ 与 $n^m\left(l_n\cos\frac{m}{2}-k_n\sin\frac{m}{2}\right)$

是$f^{(m)}(t)$ $(m=1,2,\quad ,k-1)$ 的Fourier 系数, 由 Bessel 不等式可得

$$\sum_{n=N}(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2)=\sum_{n=N}\left[\left|n^m\left(k_n\cos\frac{m}{2}+l_n\sin\frac{m}{2}\right)\right|^2+\right.$$

$$\left.\left|n^m\left(l_n\cos\frac{m}{2}-k_n\sin\frac{m}{2}\right)\right|^2\right] \qquad \frac{1}{\quad}\int_{-}[f^{(m)}(t)]^2\mathrm{d}t,$$

其中 $m=1,2,\quad ,k-1$ 这表明,

$$\sum_{n=N}(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2) \qquad (m=1,2,\quad ,k-1)$$

收敛, 又因 $\sum_{n=N}\frac{1}{n^{2m}}(m=1,2,\quad ,k)$ 收敛, 于是

$$\sum_{n=N}[n^m(|c_n|+|d_n|)] \qquad (m=1,2,\quad ,k-1)$$

收敛且

$$\sum_{n=N}\frac{|1-|b_0||}{2}n^k(|c_n|+|d_n|)$$

收敛, 从而级数

$$\sum_{n=N}n^m(|c_n|+|d_n|) \qquad (m=1,2,\quad ,k)$$

均收敛 因为

$$|c_n\cos nt+d_n\sin nt| \quad |c_n|+|d_n| \qquad n^m(|c_n|+|d_n|),$$

$$\left|n^m\left(c_n\cos\frac{m}{2}+d_n\sin\frac{m}{2}\right)\cos nt+n^m\left(d_n\cos\frac{m}{2}-c_n\sin\frac{m}{2}\right)\sin nt\right|=$$

$$\left|n^m\cos\left(\frac{m}{2}+nt\right)c_n+n^m\sin\left(\frac{m}{2}+nt\right)d_n\right|$$

$$n^m(|c_n|+|d_n|) \qquad (m=1,2,\quad ,k),$$

于是三角级数

$$c_0+\sum_{n=1}(c_n\cos nt+d_n\sin nt),$$

$$\sum_{n=1}\left[n^m\left(c_n\cos\frac{m}{2}+d_n\sin\frac{m}{2}\right)\cos nt+n^m\left(d_n\cos\frac{m}{2}-c_n\sin\frac{m}{2}\right)\sin nt\right]$$

$$(m=1,2,\quad,k)$$

均为绝对收敛和一致收敛

记

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}(c_n\cos nt+d_n\sin nt),$$

则有

$$x^{(m)}(t)=\sum_{n=1}\left[n^m\left(c_n\cos\frac{m}{2}+d_n\sin\frac{m}{2}\right)\cos nt+\right.$$
$$\left.n^m\left(d_n\cos\frac{m}{2}-c_n\sin\frac{m}{2}\right)\sin nt\right]\qquad(m=1,2,\quad,k)$$

不难验证 $x(t)$ 满足(1), 从而 $x(t)$ 是方程(1) 的以 2 为周期的 $k-1$ 阶连续可微周期解, 证毕

定理 2 设 $|b_0|\quad 1$, 则方程(1) 存在唯一的以 2 为周期的 $k-1$ 阶连续可微周期解的充要条件是

$$\begin{cases}a_k+b_k\quad 0,\\ p^2(n)+q^2(n)\quad 0,\qquad(n=1,2,\quad)\end{cases}\tag{7}$$

证 只须注意到(7) 是代数方程组(3) 有唯一解的充要条件即可

至此我们已改进了文[1, 2] 的定理 1 和定理 2

设 是代数方程

$$x^k(1-|b_0|)-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+|b_i|)x^{k-i}=0$$

的最大正根, 则我们又可将文[1] 的定理 3 改进为:

定理 3 若 $|b_0|<1$, $a_k+b_k\quad 0$, $\quad<1$, 则方程(1) 存在唯一的以 2 为周期的 $k-1$ 阶连续可微周期解

证 证明与文[1] 的定理 3 相同

相应地, 我们可将文[1] 的定理 4 改进如下:

定理 4 在方程(1) 中, 设 $k=3$, $h_i=2m$ $(m\quad \mathbf{N}, i=0,1,2,3)$, 若 $|b_0|\quad 1$, $a_3+b_3\quad 0$, 且下列条件之一满足

( ) $a_1+b_1=0$;

( ) $a_1+b_1\quad 0$, $(a_1+b_1)(a_3+b_3)<0$;

( ) $a_1+b_1\quad 0$, $(a_1+b_1)(a_3+b_3)>0$, $\sqrt{(a_3+b_3)/(a_1+b_1)}$ 不是自然数;

( ) $(a_2+b_2)(1+b_0)<0$;

( ) $(a_2+b_2)(1+b_0)>0$, $\sqrt{(a_2+b_2)/(1+b_0)}$ 不是自然数

则方程(1) 存在唯一的以 2 为周期的二阶连续可微周期解

证 当 $k=3$, $h_i=2m$ $(m\quad \mathbf{N}, i=0,1,2,3)$ 时我们有

$$p(n) = -(a_1 + b_1)n^2 + a_3 + b_3,$$
$$q(n) = n[-(1 + b_0)n^2 + a_2 + b_2]$$

于是，当条件( )、( )和( )之一满足时，$|p(n)|$ 0；当条件( )、( )之一满足时，有 $|q(n)|$ 0，总之，只要( )~( )之一满足时，就有

$$p^2(n) + q^2(n) \quad 0 \qquad (n = 1, 2, \quad)$$

由定理2知，方程(1)存在唯一的以2 为周期的二阶连续可微周期解 证毕

定理5 在方程(1)中，设 $k = 4$，$h_i = 2m$ (m $\mathbf{N}$，$i = 0, 1, 2, 3, 4$)，$|b_0|$ 1，$a_4 + b_4$ 0，且下列条件之一成立：

( ) $1 + b_0 > 0$，$a_2 + b_2 < 0$，$a_4 + b_4 > 0$；

( ) $1 + b_0 < 0$，$a_2 + b_2 > 0$，$a_4 + b_4 < 0$；

( ) $a_2 + b_2 = 0$，$(a_4 + b_4)(1 + b_0) > 0$；

( ) $a_1 + b_1 = 0$，$a_3 + b_3$ 0；

( ) $a_1 + b_1$ 0，$a_3 + b_3 = 0$；

( ) $(a_1 + b_1)(a_3 + b_3) < 0$；

( ) $(a_1 + b_1)(a_3 + b_3) > 0$，$\sqrt{(a_3 + b_3)/(a_1 + b_1)}$ 不是自然数，

则方程(1)存在唯一的以2 为周期的三阶连续可微周期解

证 因为，当 $k = 4$，$h_i = 2m$ (m $\mathbf{N}$，$i = 0, 1, 2, 3, 4$) 时

$$p(n) = (1 + b_0)n^4 - (a_2 + b_2)n^2 + a_4 + b_4,$$
$$q(n) = -(a_1 + b_1)n^3 + (a_3 + b_3)n,$$

所以，由条件( )~( )之一成立可推出 $|p(n)|$ 0($n = 1, 2,$)，由条件( )~( )之一成立均可推出 $|q(n)|$ 0($n = 1, 2,$)，从而只要条件( )~( )之一成立，均有 $p^2(n) + q^2(n)$ 0($n = 1, 2,$) 于是由定理2即知，方程(1)存在唯一的以2 为周期的三阶连续可微周期解 证毕

至此可见，本文的结果全面推广了文[1,2]的结果，同时如果 $f(t)$ 是以 $2T$ 为周期的 $k-1$ 阶连续可微函数，也可仿本文的分析得到类似的结果 注意：当 $k = 2$ 时，方程(1)就是文[2]研究的系统

例1 中立型方程

$$x\ (t) + \frac{3}{160}x\ (t) - \frac{7}{160}x\ (t) + \frac{1}{160}x(t) + 3x\ (t - 2\ ) -$$
$$\frac{7}{160}x\ (t - 2\ ) + \frac{3}{160}x\ (t - 2\ ) - \frac{3}{320}x(t - 2\ ) = \sin t$$

它是方程(1)当 $b_0 = 3 > 1/2$ 的情形，故由文[1]无法判定，但它满足本文定理4的条件( )，因此有唯一的2 为周期的二阶连续可微周期解

例2 中立型方程

$$x^{(4)}(t) - 3x^{(3)}(t) + 2x^{(2)}(t) + 5x\ (t) + x(t) - 100x^{(4)}(t - 2\ ) +$$
$$2x^{(3)}(t - 2\ ) + 7x^{(2)}(t - 2\ ) + 4x\ (t - 2\ ) + \frac{1}{2}x(t - 2\ ) = \cos t$$

它是方程(1)当 $b_0 = -100$ 的情形，文[1,2]的诸定理都无法判定，但它满足本文定理5的条件( )，因此有唯一的以2 为周期的三阶连续可微周期解

参 考 文 献

[1] 司建国. 关于高阶常系数线性中立型方程周期解的讨论[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(1): 29~37.

[2] 章毅, 张毅. 关于二阶常系数线性中立型方程的周期解[J]. 数学学报, 1990, **33**(4): 517~ 520.
[3] 曹进德等, 一类二阶中立型方程的周期解[J]. 纯粹数学与应用数学, 1995, **11**(增刊): 102~ 106.

Periodic Solutions of a Class of Higher Order Neutral Type Equations

Cao Jinde
(Adult Education College, Yunnan University, Kunming 650091, P R China)

Abstract: In this paper, by using the theory of Fourier series, some necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of periodic solutions of a class of higher order neutral type equations are obtained. The main results by Shi Jianguo in Discussion on the periodic solutions for linear equation of neutral type with constant coefficients are improved, i. e. , the condition $|b_0|$ 1 instead of the condition $|b_0| < 1/2$ of Theorem 1 by Shi Jianguo is given. Other theorems by Shi are rebuilt and improved according to the new assumption.

Key words: periodic solution; neutral type equation; Fourier series