应用数学和力学, 第 20 卷 第 6 期(1999 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0585_07

一类非自治四阶微分方程解的一致有界性*

西密尔 通兹

(王珍翠延大学 教育学院, 土耳其, 凡城 65080)

(钱传长推荐)

摘要: 对一类非自治四阶微分方程的一切解, 给出了有界和一致有界的充分条件•

关 键 词: 非线性四阶微分方程; Lyapunov 函数; 一致有界性
中图分类号: O175.14 文献标识码: A

引 言

本文研究了非自治微分方程

$$x^{(4)} + \varphi(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\dddot{x} + b\ddot{x} + g(t, x, \dot{x}) + dx = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}) \tag{1}$$

及

$$x^{(4)} + a\dddot{x} + f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) + g(t, x, \dot{x}) + dx = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}) \tag{2}$$

的一切解的有界和一致有界问题, 其中 a、b、d 为常数, 函数 φ、f、g、p 为所示自变量的函数, 而 x 上方的点表示对 t 的导数• 我们还假设 φ、f、g、p 对自变量的一切值都是连续的, 并且其导数 $\partial\varphi/\partial t$、$\partial\varphi/\partial x$、$\partial\varphi/\partial y$、$\partial f/\partial t$、$\partial f/\partial x$、$\partial f/\partial y$、$\partial g/\partial t$、$\partial g/\partial x$ 对自变量的一切值都存在并连续• 在下文中, 我们将采用下列系统, 它们分别和(1)、(2) 等价•

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = u,\\&\dot{u} = -\varphi(t, x, y, z)u - bz - g(t, x, y) - dx + p(t, x, y, z, u),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = u,\\&\dot{u} = -au - f(t, x, y, z) - g(t, x, y) - dx + p(t, x, y, z, u)•\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

本问题在过去 40 年中曾受各方重视, 尤其当微分方程是自治的时, 更加如此• 有关这方面的成果曾在文献[1] 中总结过• 研究(1)、(2) 式的动机源于 Abou_El_Ela 和 Sadek[2]、Hara[3]、Jin Jun[4] 和 Tun,,[5] 等的工作• 本文的目的是进一步推广和改进 Jin Jun[4] 有关下列方程的工作和成果:

$$x^{(4)} + a(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\dddot{x} + b\ddot{x} + c\dot{x} + dx = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}),$$

$$x^{(4)} + a\dddot{x} + b(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) + c\dot{x} + dx = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}),$$

和

$$x^{(4)} + a\dddot{x} + b\ddot{x} + g(t, x, \dot{x}) + dx = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})•$$

考虑微分方程组

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t = H(t, \boldsymbol{x}), \tag{5}$$

---

* 本文原文为英文, 吴承平译, 杨砚校

收稿日期: 1997_06_08

其中, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $H(t,\boldsymbol{x})$ 在下列区域内连续:

$$\Omega: I(0\leqslant t<+\infty)\times E_x^n \qquad (\|\boldsymbol{x}\|<+\infty)\cdot$$

引理 1　设 $v(t,\boldsymbol{x})$ 为在域

$$\Omega^*: I(0\leqslant t<+\infty)\times E_R^n \qquad (\|\boldsymbol{x}\|>R)$$

中定义的一个正连续可微函数, 而且 $v(t,\boldsymbol{x})$ 当 $\|\boldsymbol{x}\|\to+\infty$ 时在 t 域内逼近无穷大, 同时

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v}{\partial t}+H(t,\boldsymbol{x})\operatorname{grad}v\leqslant G(v,t)\cdot \tag{6}$$

如果(6) 在 $t(\geqslant 0)$ 内没有无界的正值解, 则(5) 式的所有解都是有界的•

特别地, 设 $G(v,t)=k(t)L(v)$, 其中 $k(t)$ 是 t 的连续函数, $\int^{+\infty}k(t)\mathrm{d}t$ 是收敛的, $L(v)$ 是 $v(\geqslant 0)$ 的正连续函数, $\int^{+\infty}\frac{1}{L(v)}\mathrm{d}v=+\infty$, 则(6) 式在一切 t 内都没有无界正值解• (见[6])•

下列引理 2 是众所周知的(见[7])•

引理 2　设 $v(t,\boldsymbol{x})$ 为在域

$$\Omega^*: I(0\leqslant t<+\infty)\times E_R^n \qquad (\|\boldsymbol{x}\|>R)$$

中定义的一个正的连续可微函数, 它满足下列条件:

(i) $a(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant v(t,\boldsymbol{x})\leqslant b(\|\boldsymbol{x}\|)$, 这里 $a(r)\in CI$(一族连续和递增的函数), $r\to\infty$ 时 $a(r)\to\infty$, 且 $b(r)\in CI$;

(ii) 在 Ω^* 中, $v'_{(5)}(t,\boldsymbol{x})\leqslant 0$•

则(5) 式的解是一致有界的•

1　结 果 及 证 明

首先, 我们研究(1) 式所有解的有界性和一致有界性•

定理 1　设系统(3) 满足下列条件:

(i) a、b、c、d、A、D、δ 是正的常量, 对所有的 t、x、y、z 而言, 满足

$$bc\varphi(t,x,y,z)-d\varphi^2(t,x,y,z)-c^2\geqslant\delta;$$

(ii) 对所有的 t、x、y、z, 有

$$\varphi'_t(t,x,y,z)+y\varphi'_x(t,x,y,z)+z\varphi'_y(t,x,y,z)\leqslant 0;$$

(iii) 对所有 t、x 和 $y\neq 0$,

$$g(t,x,0)=0,\quad 0\leqslant\frac{g(t,x,y)}{y}-c\leqslant\frac{\delta-\sqrt{D}}{a\sqrt{A}},$$

$$\frac{1}{y}\int_0^y g'_x(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\leqslant-\left(\frac{b^2\delta D}{2a^2A}\right),$$

且对所有 t、x、y, $yg'_t(t,x,y)\leqslant 0$;

(iv) $|p(t,x,y,z,u)|\leqslant P(t)(x^2+y^2+z^2+u^2)^{1/2}$, 其中 $P(t)$ 为非零的连续函数, 且

$$\int_0^\infty P(t)\mathrm{d}t<+\infty\cdot$$

则系统(3) 的所有解都是有界的•

证明　在以下证明中, 我们主要利用了可微函数 $v=v(t,x,y,z,u)$, 它定义如下:

$$\begin{aligned}2v={}&(2b)[bu+cz+2dy]^2+(b^2)[bz+cy+2dx]^2+\\&(b^2-4d)[bz+cy]^2+(2d)[(b^2-4d)b+2c^2]y^2+\end{aligned}$$

$$(4bc)\int_0^z[b\varphi(t,x,y,\zeta)-c]\zeta\mathrm{d}\zeta+$$

$$(4b^2c)\int_0^y\left[\frac{g(t,x,\eta)}{\eta}-c\right]\eta\mathrm{d}\eta. \tag{7}$$

由(i),显然有

$$b^2-4d>0,$$

$$b\varphi(t,x,y,z)-c>0 \qquad (\text{对一切 } t,x,y,z).$$

由于 $\varphi(t,x,y,z)<(bc/d)$, 从(i)可以得出

$$0\leqslant\int_0^z[b\varphi(t,x,y,\zeta)-c]\zeta\mathrm{d}\zeta\leqslant\left[\frac{c(b^2-d)}{2d}\right]z^2.$$

由(iii),我们又有

$$\int_0^y\left[\frac{g(t,x,\eta)}{\eta}-c\right]\eta\mathrm{d}\eta\geqslant 0$$

和

$$\int_0^y\left[\frac{g(t,x,\eta)}{\eta}-c\right]\eta\mathrm{d}\eta\leqslant\left(\frac{\delta\sqrt{D}}{2a\sqrt{A}}\right)y^2.$$

因此,(7)式定义的 ν 是一个正定函数,它有一个无穷的下限和一个无穷小的上限. 于是,设 ε 是一个正的常数,则

$$\nu(t,x,y,z,u)\geqslant\varepsilon(x^2+y^2+z^2+u^2). \tag{8}$$

利用恒等式

$$\dot{\nu}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu(t,x,y,z,u)=\frac{\partial\nu}{\partial x}y+\frac{\partial\nu}{\partial y}z+\frac{\partial\nu}{\partial z}u+\frac{\partial\nu}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial\nu}{\partial t}$$

可以求得

$$\begin{aligned}\dot{\nu}=&-(2b^2d)\left[2\frac{g(t,x,y)}{y}-c\right]y^2-(2b^2)[b\varphi(t,x,y,z)-c]u^2-\\&(4b^2d)\varphi(t,x,y,z)yu-(2b^3)\left[\frac{g(t,x,y)}{y}-c\right]yu+\\&(2b^2c)\int_0^y g_t'(t,x,\eta)\mathrm{d}\eta+(2b^2c)y^2\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x'(t,x,\eta)\mathrm{d}\eta\right]+\\&(2b^2c)\int_0^z[\varphi_t'(t,x,y,\zeta)]\zeta\mathrm{d}\zeta+(2b^2c)y\int_0^z[\varphi_x'(t,x,y,\zeta)]\zeta\mathrm{d}\zeta+\\&(2b^2c)z\int_0^z[\varphi_y'(t,x,y,\zeta)]\zeta\mathrm{d}\zeta+(2b^2)[2dy+cz+bu]p(t,x,y,z,u).\end{aligned} \tag{9}$$

由(ii)和(iii),可得

$$\begin{aligned}\dot{\nu}\leqslant&-(2b^2cd)y^2-(2b^2)[b\varphi(t,x,y,z)-c]u^2-(4b^2d)yu\varphi(t,x,y,z)-\\&(2b^3)\left[\frac{g(t,x,y)}{y}-c\right]yu+(2b^2c)y^2\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x'(t,x,\eta)\mathrm{d}\eta\right]+\\&(2b^2)[2dy+cz+bu]p(t,x,y,z,u).\end{aligned} \tag{10}$$

因为

$$\begin{aligned}&(b^2cd)y^2+(b^2)[b\varphi(t,x,y,z)-c]u^2+(2b^2d)yu\varphi(t,x,y,z)=\\&\left(\frac{b^2d}{c}\right)[cy+\varphi(t,x,y,z)u]^2+\left(\frac{b^2}{c}\right)[bc\varphi(t,x,y,z)-\\&d\varphi^2(t,x,y,z)-c^2]\geqslant(b^2\delta/c)u^2,\end{aligned}$$

从(10)式可得

$$\dot{V} \leqslant -\left(\frac{2b^2\delta}{c}\right)u^2 - (2b^3)\left[\frac{g(t,x,y)}{y} - c\right]yu + (2b^2c)y^2\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x'(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right] +$$
$$(2b^2)[2dy + cz + bu]p(t,x,y,z,u). \tag{11}$$

让我们考虑(11)式中下列诸项

$$w = -\left(\frac{b^2\delta}{c}\right)u^2 - (2b^3)\left[\frac{g(t,x,y)}{y} - c\right]yu + (2b^2c)y^2\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x'(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right].$$

根据条件(iii),很明显,w 满足 $w \leqslant 0$. 于是可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leqslant -(b^2\delta/c)u^2 + (2b^2)[2dy + cz + bu]p(t,x,y,z,u) \leqslant \\
&-(b^2\delta/c)u^2 + (2b^2)[b^2 + c^2 + 4d^2]^{1/2} \times \\
&[y^2 + z^2 + u^2]^{1/2}[x^2 + y^2 + z^2 + u^2]^{1/2}P(t) \leqslant \\
&(b^2)[-(\delta/c)u^2 + rP(t)(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)] \leqslant \\
&(b^2)[-(\delta/c)u^2 + rP(t)V/\varepsilon] \leqslant \\
&b^2 rP(t)V/\varepsilon = G(V,t),
\end{aligned}$$

这里业已利用了条件(iv),其中 $r = 2[b^2 + c^2 + 4d^2]^{1/2}$.

显然,函数 V 满足引理1中的所有条件,因此系统(3)的所有解都是有界的. 我们完全证明了定理1.

定理2 设定理1中的条件(i)~(iv)都满足,同时进一步满足

$$\frac{rP(t)V}{\varepsilon} - \left(\frac{\delta}{c}\right)u^2 \leqslant 0, \tag{12}$$

则系统(3)的所有解都是一致有界的.

证明 我们用与前面相同的方法处理定理2,可以证明,函数(7)满足引理2中的所有条件及(12). 因此(3)式的所有解都是一致有界的. 这就证明了定理2.

注记1 定理1和定理2改进并包含了文献[4]的定理1和定理2.

现在让我们讨论方程(2)的所有解的有界性和一致有界性.

定理3 设系统(4)满足下列条件:

(i) a、b、d、δ、A、D 都是正常量,并对一切 t、x、$y \neq 0$,有

$$ab\frac{g(t,x,y)}{y} - \left[\frac{g(t,x,y)}{y}\right]^2 - a^2d \geqslant \delta;$$

(ii) 对所有 t、x、y,有

$$g(t,x,0) = 0,\quad yg_t'(t,x,y) \leqslant 0,$$

对所有 t、x、$y \neq 0$,有

$$\frac{1}{y}\int_0^y g_x'(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \leqslant \left(-\frac{b^2\delta D}{2a^2A}\right);$$

(iii) 对所有 $t,x,y,z \neq 0$,有

$$f(t,x,y,0) = 0,\quad 0 \leqslant \frac{f(t,x,y,z)}{z} - b \leqslant \left(\frac{2\delta D}{A}\right);$$

(iv) 对所有 t,x,y,z,有

$$z[f_t'(t,x,y,z) + yf_x'(t,x,y,z) + zf_y'(t,x,y,z)] \leqslant 0;$$

(v) $|p(t,x,y,z,u)| \leqslant P(t)(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)^{1/2}$,这里 $P(t)$ 为非负连续函数,且

$$\int_0^{\infty} P(t)\mathrm{d}t \leqslant +\infty.$$

则系统(4)的所有解都是有界的.

证明　证明本定理主要利用了可微函数 $V = V(t, x, y, z, u)$, 它定义如下:

$$\begin{aligned}2V = &(b^2)[2u + az + by]^2 + (2bd)[2z + ay + bx]^2 + (b^2 - 4d)[az + by]^2 + \\ &(4ab^2)\int_0^y\left[\frac{g(t, x, \eta)}{\eta} - \frac{ad}{b}\right]\eta\mathrm{d}\eta + 2b(b^2 - 4d)z^2 + 4a^2dz^2 + \\ &(8b^2)\int_0^z\left[\frac{f(t, x, y, \zeta)}{\zeta} - b\right]\zeta\mathrm{d}\zeta.\end{aligned} \tag{13}$$

由条件(i)和(iii), 得

$$b^2 - 4d > 0,$$

$$0 \leqslant \int_0^y\left[\frac{g(t, x, \eta)}{\eta} - \frac{ad}{b}\right]\eta\mathrm{d}\eta \leqslant \left[\frac{a(b^2 - d)}{2b}\right]y^2$$

及

$$0 \leqslant \int_0^z\left[\frac{f(t, x, y, \zeta)}{\zeta} - b\right]\zeta\mathrm{d}\zeta \leqslant \left(\frac{\delta D}{A}\right)z^2.$$

从上述讨论, 我们可以证明(13)式所定义的函数 $V(t, x, y, z, u)$ 是一个正定函数, 它具有一个无穷的下限和无穷小的上限. 所以, 我们可以定义一个正常量 ε, 使

$$V(t, x, y, z, u) \geqslant \varepsilon(x^2 + y^2 + z^2 + u^2). \tag{14}$$

从(13)和(4), 我们很易计算求得

$$\begin{aligned}\dot{V} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t, x, y, z, u) = &-(2ab^2)\left[u + \frac{g(t, x, y)}{a}\right]^2 - (2b^3)yz\left[\frac{f(t, x, y, z)}{z} - b\right] - \\ &(2ab^2)\left[\frac{f(t, x, y, z)}{z} - b\right]z^2 - \left(\frac{2b^2}{a}\right)\left[ab\frac{g(t, x, y)}{y} - \frac{g^2(t, x, y)}{y^2} - a^2d\right]y^2 + \\ &(2ab^2)\int_0^y g_t'(t, x, \eta)\mathrm{d}\eta + (2ab^2)y\int_0^y g_x'(t, x, \eta)\mathrm{d}\eta + (4b^2)\int_0^z f_t'(t, x, y, \zeta)\mathrm{d}\zeta + \\ &(4b^2y)\int_0^z f_x'(t, x, y, \zeta)\mathrm{d}\zeta + (4b^2z)\int_0^z f_y'(t, x, y, \zeta)\mathrm{d}\zeta + \\ &(2b^2)[2u + az + by]p(t, x, y, z, u).\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant &-\left(\frac{2\delta b^2}{a}\right)y^2 - (2b^3)yz\left[\frac{f(t, x, y, z)}{z} - b\right] - (2ab^2)\left[\frac{f(t, x, y, z)}{z} - b\right]z^2 + \\ &(2ab^2)\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x'(t, x, \eta)\mathrm{d}\eta\right]y^2 + (2b^2)[2u + az + by]p(t, x, y, z, u),\end{aligned} \tag{15}$$

这里利用了条件(i)、(ii)、(iv).

现在考虑表达式

$$\begin{aligned}w = &-(2ab^2)[f(t, x, y, z)z - bz^2] - (2b^3)[f(t, x, y, z)y - byz] + \\ &(2ab^2)\left[y\int_0^y g_x'(t, x, \eta)\mathrm{d}\eta\right].\end{aligned}$$

利用(ii)和(iii), 我们在 $y \neq 0$ 和 $z \neq 0$ 时得到

$$\begin{aligned}&(2ab^2)\left[\frac{f(t, x, y, z)}{z} - b\right]z^2 + (2b^3)yz\left[\frac{f(t, x, y, z)}{z} - b\right] - \\ &\quad(2ab^2)\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x'(t, x, \eta)\mathrm{d}\eta\right]y^2 =\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2b^2}{a}\right)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z}-b\right]\left[az+\left(\frac{b}{2}\right)y\right]^2-\left(\frac{b^4}{2a}\right)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z}-b\right]y^2-$$
$$(2ab^2)\left[\frac{1}{y}\int_0^y g'_x(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]y^2 \geqslant$$
$$-\left(\frac{b^4}{2a}\right)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z}-b\right]y^2-(2ab^2)\left[\frac{1}{y}\int_0^y g'_x(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]y^2 \geqslant$$
$$-\left(\frac{b^4}{2a}\right)\left(\frac{2\delta D}{A}\right)y^2+2ab^2\left(\frac{\delta D b^2}{2a^2A}\right)y^2=0.$$

如此即得到对所有 t、x、$y\neq 0$ 和 $z\neq 0$, $w\leqslant 0$; 但对 $y=0$ 和 $z=0$, $w=0$. 这样, 我们得: 对所有 t、x、y、z,

$$w\leqslant 0. \tag{16}$$

把(16)和(15)合在一起, 我们得

$$\dot{V}\leqslant-\left(\frac{2b^2\delta}{a}\right)y^2+(2b^2)[2u+az+by]p(t,x,y,z,u)\leqslant$$
$$-\left(\frac{2b^2\delta}{a}\right)y^2+(2b^2)[4+a^2+b^2]^{1/2}[y^2+z^2+u^2]^{1/2}\times$$
$$[x^2+y^2+z^2+u^2]^{1/2}P(t)\leqslant$$
$$(2b^2)\left[-\left(\frac{\delta}{a}\right)y^2+rP(t)(x^2+y^2+z^2+u^2)\right]\leqslant$$
$$(2b^2)\left[-\left(\frac{\delta}{a}\right)y^2+\frac{rP(t)V}{\varepsilon}\right]\leqslant$$
$$\frac{2b^2rP(t)V}{\varepsilon}=G(V,t),$$

这里利用了条件(ⅴ), 而 $r=[4+a^2+b^2]^{1/2}$.

因此, 由(13)式定义的函数 $V(t,x,y,z,u)$ 满足引理1的所有条件, 系统(4)的所有解都是有界的. 定理得到完全证明.

注记2 定理3改进和包含了文献[4]的定理3和定理5.

定理4 设系统(4)满足定理3所列条件(ⅰ)~(ⅴ), 并满足下列条件:

$$rP(t)V/\varepsilon-(\delta/a)y^2\leqslant 0, \tag{17}$$

则系统(4)的所有解都是一致有界的.

证明 显然, (13)式所定义的函数 $V(t,x,y,z,u)$ 满足引理2的条件及(17)式, 所以(4)的一切解都是一致有界的.

注记3 定理4改进和包含了文献[4]的定理4和定理6.

参 考 文 献

[1] Reissig R, Sansone G, Conti R. Nonlinear Differential Equations of Higher Order[M]. Noordhoff International Publishing, 1974.

[2] Abou_El_Ela A M A, Sadek A I. On the asymptotic behaviour of solutions of some differential equations of the fourth order[J]. Ann Differential Equations, 1992, **8**(1): 1~12.

[3] Hara T. On the asymptotic behavior of the solutions of some third and fourth order non_autonomous differential equations[J]. Publ Res Inst Math Sci, 1974, **9**: 649~673.

[4] Jin Jun. On the uniform boundedness of the solution of the non_linear differential equation of the

fourth order[J]. Ann Differential Equations, 1988, **4**(2): 159~ 171.

[5] Tunç C. On the asymptotic behaviour of solutions of some differential equations of the fourth order [J]. Studia Univ Babes_Bolyai Math, 1994, **39**(2): 87~ 96.

[6] Lasalle J, Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications[M]. New York: Academic Press, 1961.

[7] Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method[Z]. The Mathematical Society of Japan, 1966.

[8] Ezeilo J O C. On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order[J]. J Math Anal Appl, 1962, **5**: 136~ 146.

[9] 卢定和, 沈家骐, 金均. 四阶微分方程 Liapunov 函数的构造及应用[J]. 上海师范大学学报, 1982, **11**(2).

[10] 秦元勋, 王联, 王慕秋. 运动稳定性理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[11] 沈家骐, 卢定和, 金均. 一类四阶微分方程 Liapunov 函数的构造[J]. 上海师范大学学报, 1983, **12**(2).

[12] Yoshizawa T. Liapunov's function and boundedness of solutions [J]. Funkciaiaj Ekvacioj, 1959, **2**.

On the Uniform Boundedness of Solutions of Some Non_Autonomous Differential Equations of the Fourth Order

Cemil Tunç

(Yüzüncü Yıl University, Education Faculty, 65080, Van, TURKEY)

Abstract: In this paper, sufficient conditions are established under which all solutions of some non-autonomous differential equations of the fourth order are bounded and uniformly bounded.

Key words: nonlinear differential equation of the fourth order; Lyapunov function; uniform boundedness