

文章编号: 1000-0887(1999)06-0579-06

正交异性悬臂柱壳轴对称问题的弱形式解*

克伟, 唐立民

(大连理工大学 工程力学研究所, 大连 116023)

摘要: 导出层合柱壳轴对称问题的平衡方程和边界条件的弱形式, 提供了方程和边界条件放在一起的算子形式, 建立了悬臂柱壳轴对称问题的热应力混合方程, 给出了正交异性层合悬臂柱壳在热荷载和机械荷载作用下的弱形式解。本文提出的方法弱化了求解方程和边界条件, 化解了问题, 具有一般性并便于推广。

关键词: 悬臂柱壳; 热应力; 混合方程; 轴对称; 弱形式解

中图分类号: O343.1 文献标识码: A

引言

文[1~3]从三维弹性力学理论出发, 分别对各向同性和正交各向异性圆柱壳的热效应等问题进行了研究, 但这些文献所讨论的对象都具有简单的边界条件。对于非简支的情况, 由于数学求解的困难, 解析求解非常有限。为了解决这一难题, 范家让教授^[4]提出了强厚度叠层板壳的精确理论。本文依据文[5]的思想, 导出了层合柱壳轴对称问题的平衡方程和边界条件的弱形式统一方程; 提供了方程和边界条件放在一起的算子形式; 克服了采用强形式的平衡方程和边界条件下, 在求解时面对不同的边值问题必须采用不同的处理方法, 且过多的依赖于技巧性问题, 扩大了求解的空间; 对悬臂柱壳建立其热应力混合方程, 给出了层合悬臂柱壳在热荷载和机械荷载作用下的弱形式解。本文提出的方法弱化了求解方程和边界条件, 以柔克刚, 化解了问题, 求解时无需特殊技巧, 更具有一般性并便于推广。

1 基本方程

设一柱形域 V , 边界 S (图 1), 体积力 f_x, f_r , 面力 p_x, p_r , 对任一由 δS 包围的子域 δV 在 x 方向的平衡方程为

$$\iint_{\delta S} p_x ds + \iiint_{\delta V} f_x dV = 0.$$

对整个区域, 设在边界 S_0 处作用有已知边界力 p_x , 则有

$$\iint_S p_x ds + \iint_{S_0} (p_x - p_x) ds + \iiint_V f_x dV = 0.$$

通过 Green 公式得出

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} + f_x \right) dV + \lambda \iint_{S_0} (p_x - p_x) ds = 0,$$

* 收稿日期: 1998_04_16; 修订日期: 1998_11_16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19392305); 安徽省教委基金资助课题

作者简介: 丁克伟(1962~), 男, 副教授, 博士。

$$\lambda = \begin{cases} 1, & S_\sigma \text{ 上,} \\ 0, & S - S_\sigma \text{ 上.} \end{cases}$$

同理

$$\left. \begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r \right) dV + \\ & \lambda \iint_{S_\sigma} (p_r - p_r) ds = 0, \\ & \lambda_r = \begin{cases} 1, & S_\sigma \text{ 上} \\ 0, & S - S_\sigma \text{ 上} \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

协调方程

$$\left. \begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) dV + \beta_x \iint_{S_u} (u - u) n_x ds = 0, \\ & \beta_x = 1 - \lambda = \begin{cases} 1, & S_u \text{ 上} \\ 0, & S - S_u \text{ 上;} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

.....

.....

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} - \lambda_x \right) dV + \beta_x \iint_{S_u} (u - u) n_r ds + \beta_r \iint_{S_u} (w - w) n_x ds = 0 \quad (2d)$$

物理方程

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon + \varepsilon_r\}. \quad (3)$$

将(3)式代入(2a)~(2d)式,并进行加权积分,即在式(1a)、(1b)分别乘以可能微小位移(虚位移) $\delta u, \delta w$,在(2a)~(2d)式分别乘以可能微小应力(虚应力) $\delta \alpha_x, \dots, \delta \tau_{rx}$,并采用记号: $\mathbf{q} = (uw)^T$, $\mathbf{p} = (\tau_{rx} \sigma_r)^T$, $\mathbf{p}_1 = (\alpha_x \sigma_\theta)^T$, $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \ \mathbf{q})^T$ 即得热应力问题混合状态方程和边界条件的弱形式统一方程

$$\iiint_V \delta \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{F} dV = \iiint_V \delta \mathbf{F} (\mathbf{H} \mathbf{F} + \mathbf{T}_F + \mathbf{D}_1 \mathbf{p}_1) dV + \iint_S \delta \mathbf{F} \mathbf{S}_1 ds, \quad (4)$$

$$\iiint_V \delta \mathbf{p} (\mathbf{D}_2 \mathbf{F} + \mathbf{T}_p + \mathbf{B} \mathbf{p}_1) dV + \iint_S \delta \mathbf{p} \mathbf{S}_2 ds = 0, \quad (5)$$

其中

$$\delta \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta u & [0] \\ & \delta w \\ & \delta \tau_{rx} \\ [0] & \delta \sigma_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ S_{55} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & S_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} p_x - p_x \\ p_r - p_r \\ (w - w) n_x + (u - u) n_r \\ (w - w) n_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & S_{13} & -\partial/\partial x & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & -1/r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

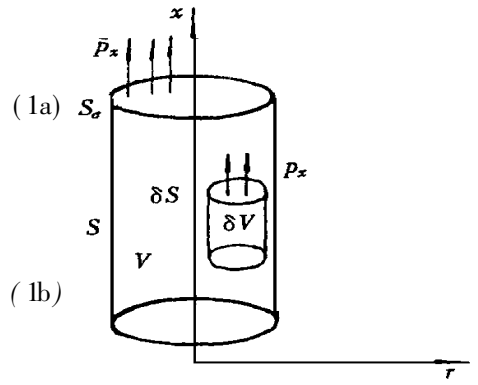


图 1 轴对称柱形域

$$\delta p = \begin{bmatrix} \delta \alpha_x & 0 \\ 0 & \delta \alpha_0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} (u - u) n_x \\ 0 \end{bmatrix}, T_F = \begin{bmatrix} -f_x & -f_r & 0 & \alpha T \end{bmatrix}^T, \\ T_p = \begin{bmatrix} \alpha_x T & \alpha_0 T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

S_{ij} 为本构关系的柔度系数。

2 研究对象和求解

考察一正交异性悬臂柱壳, $x = 0$ 端固支, $x = l$ 端自由, 将固支边变成简支边, 然后加上原固支边的反力 $p(r)$, $w(r)$ 是自由端 $x = l$ 处沿 r 方向位移, $u(r)$ 是 $x = 0$ 端位移函数。

$$\text{令 } u = u_x + (1 - x/l)u(r) \quad (6)$$

并取(记 $\zeta = m\pi/l$)

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \sum_m u_{x,m}(r) \cos \zeta x, \quad \alpha_x = \sum_m \alpha_{x,m}(r) \sin \zeta x, \quad \tau_{rx} = \sum_m \tau_{r,x,m}(r) \cos \zeta x, \\ w &= \sum_m w_m(r) \sin \zeta x, \quad T = \sum_m T_m(r) \sin \zeta x, \quad x = \frac{l}{2} + \sum_m \frac{2l \cos(m\pi - 1)}{m^2 \pi^2} \cos \zeta x. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将(6)、(7)式代入弱形式统一方程(4)、(5), 同时记

$$C_1 = -C_{13}/C_{33}, \quad C_2 = C_{11} - C_{13}^2/C_{33}, \quad C_3 = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}, \\ C_4 = C_{22} - C_{23}^2/C_{33}, \quad C_5 = -C_{23}/C_{33}, \quad C_7 = 1/C_{33}, \quad C_8 = 1/C_{55}, \\ C_a = C_3 \alpha_x + C_4 \alpha_0, \quad C_b = C_2 \alpha_x + C_3 \alpha_0, \quad C_d = C_1 \alpha_x + C_5 \alpha_0 - \alpha_x,$$

于是对于每个 m 值, 即得悬臂柱壳热应力混合方程

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} ru_{x,m}(r) & rw_m(r) & \tau_{r,x,m}(r) & \alpha_{x,m}(r) \end{bmatrix}^T = \\ H \begin{bmatrix} ru_{x,m}(r) & rw_m(r) & \tau_{r,x,m}(r) & \alpha_{x,m}(r) \end{bmatrix}^T + B(r), \quad (8)$$

式中

$$H = \begin{bmatrix} 1/r & -\zeta & C_8 r & 0 \\ -C_1 \zeta & (C_5 + 1)/r & 0 & C_7 r \\ C_2 \zeta^2/r & -C_3 \zeta/r^2 & -1/r & C_1 \zeta \\ -C_3 \zeta/r^2 & C_4/r^3 & \zeta & -(C_5 + 1)/r \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$B(r) = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4]^T \quad (m \neq 0), \\ g_1 = -rdA/dr - (2r \cos m\pi/l)w(r), \quad g_2 = -C_1 \zeta A r - C_d r T_m(r), \\ g_3 = C_2 \zeta^2 A + 2p(r)/l + C_b \zeta T_m(r), \quad g_4 = -C_3 \zeta A/r - C_a T_m(r)/r, \\ B(r) = [-0.5r du(r)/dr \quad 0 \quad p(r)/l \quad 0]^T \quad (m = 0), \\ A = (2/m^2 \pi^2)(\cos m\pi - 1)u(r).$$

为了求解方程(8), 需将厚壳分成若干薄层(薄层数视计算精度而定), 然后以每个薄层中径代替(9)式中的 r , 于是对第一薄层, 方程(8)的解是

$$F(r) = G(r-a)F(a) + C(r-a), \quad (10)$$

其中

$$F(r) = [ru_{x,m}(r) \quad rw_m(r) \quad \tau_{r,x,m}(r) \quad \alpha_{x,m}(r)]^T, \\ F(a) = [au_{x,m}(a) \quad aw_m(a) \quad \tau_{r,x,m}(a) \quad \alpha_{x,m}(a)]^T, \\ G(r-a) = \exp[H \cdot (r-a)], \\ C(r-a) = \int_r \exp[H \cdot (r-t)] B(t) dt.$$

式(9)就是 Hamilton 算子阵, 故 $G(r-a)$ 、 $C(r-a)$ 可借助 Symplectic 算法^[6]求得。

对于多层壳, 采用转移矩阵法求解, 对于第一层, 则有 (h_1 指层厚)

$$F(r_1) = G(-h_1)F(a) + C(-h_1) \cdot$$

把第一层的终值当作第二层的初值就有

$$F(r_2) = G(-h_2)G(-h_1)F(a) + G(-h_2)C(-h_1) + C(-h_2),$$

所以对 k 层就有

$$F(b) = \Pi F(a) + \Pi_1 \quad (11)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= G(-h_k)G(-h_{k-1})G(-h_{k-2}) \dots G(-h_2)G(-h_1), \\ \Pi &= G(-h_k)(G(-h_{k-1}) \dots G(-h_2)C(-h_1) + G(-h_{k-1}) \dots C(-h_2) + \\ &\quad \dots + C(-h_{k-1})) + C(-h_k) \cdot \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

在通常情况下,作用在壳体内外表面的外力和热荷载是给定的,所以(11)式实际上是壳体内外表面 4 个位移分量以及边界位移(在 Π 内)的矩阵方程,取其中的第 3 和第 4 行组成新的方程组,即

$$\begin{Bmatrix} au_{x,m}(a) \\ aw_m(a) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \tau_m(b) \\ \sigma_m(b) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \Pi_{33} & \Pi_{34} \\ \Pi_{43} & \Pi_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_m(a) \\ \sigma_m(a) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{Bmatrix} \right\}, \quad (13)$$

上式中的 Π_2, Π_3 由边界条件确定后, $F(a)$ 成为已知,于是就可以利用式(11)求得任一层的状态力学量,而非状态量则可由下式得到

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2(\partial/\partial x) & -C_1 & C_3/r \\ C_3(\partial/\partial x) & -C_5 & C_4/r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \alpha_r \\ w \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} C_b T \\ C_a T \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

考虑(3)、(6)、(7)式和(14)式,可以看出,要满足在 $x = l$ 处, $\alpha_x = 0$ 这个边界条件,就有

$$u(r) = (C_3l/C_2r)w(r) \cdot \quad (15)$$

于是在固支端 $w = v = 0$, 自由端 $\alpha_x = 0$ 边界条件已经满足,至此还剩下两个待求量 $p(r), w(r)$, 它们正好可以通过下面两个尚未满足的边界条件而得

$$u = 0, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 处}; \quad \tau_x = 0, \quad \text{在 } x = l \text{ 处}. \quad (16)$$

为此将(7)式中的第一式代入(6)式并考虑(15)式,然后再将(7)式中的第三式一并代入(16)式,即有

$$\left. \begin{aligned} \sum_m \int_r \left[u_{x,m}(r) + (C_3l/C_2r)w(r) \right] \delta(r - r_j) dr &= 0, \\ \sum_m \int_r \left[(-1)^m \tau_m(r) \right] \delta(r - r_j) dr &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在边界处实施配点法,以满足尚未满足的边界条件,即可求得边界未知量,当边界量求出后,整个连续壳就变为可求。(求解过程类似[4]、[7])

3 数值算例

算例 1 考察三层悬臂柱壳, $x = 0$ 端固支, $x = l$ 端自由,受热荷载 $T = T_1$ 作用。里外两层材料相同,每层均有以下的弹性常数:

$$C_{12}/C_{11} = 0.246269, \quad C_{13}/C_{11} = 0.0831715, \quad C_{22}/C_{11} = 0.543103,$$

$$C_{23}/C_{11} = 0.115017, \quad C_{33}/C_{11} = 0.530172, \quad C_{55}/C_{11} = 0.159914, \quad \alpha_x = \alpha_r = 3\alpha_0 \cdot$$

引入 $\nu = C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)}$, $C_{11}^{(1)}$ 和 $C_{11}^{(2)}$ 分别是里层和中间层材料的 C_{11} 值。几何参数为: $h_1 = h_3 = 0.1h$, $h_2 = 0.8h$, $l = 2\pi R_0$, h_1, h_2 和 h_3 分别是里层、中层和外层的厚度, l 为壳长, R_0 为中面

半径。计算结果见表 1, 级数取项为 $m = 0, 1, 2, \dots, 299$ 。表中还给出了 SAP5 有限元解, 采用的是 20 节点 128 个三维块体等参元(对 1/2 壳)。表中 $w^* = w / (T_1 \alpha_0 h)$, $u^* = u / (T_1 \alpha_0 h)$, $\sigma_x^* = \sigma_x / (C_{11}^{(2)} T_1 \alpha_0)$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta / (C_{11}^{(2)} T_1 \alpha_0)$ 。

表 1 三层悬臂壳在热荷载作用下的位移和应力

$y = 5$		$(h/R_0 = 0.8)$				$(h/R_0 = 1.0)$			
		$w^*(x=l)$	$u^*(x=l)$	$\sigma_x^*(x=\frac{l}{2})$	$\sigma_\theta^*(x=\frac{l}{2})$	$w^*(x=l)$	$u^*(x=l)$	$\sigma_x^*(x=\frac{l}{2})$	$\sigma_\theta^*(x=\frac{l}{2})$
本文	1+	0.314 7	20.770	-1.161 2	-2.177 3	0.122 5	19.493	-1.470 5	-2.721 1
	1-	0.613 5	20.718	-0.843 4	-1.338 5	0.419 4	19.448	-0.887 8	-1.436 9
	2+	0.613 5	20.718	-0.192 9	-0.301 2	0.419 4	19.448	-0.219 8	-0.345 8
	2-	2.752 3	20.318	0.084 9	0.268 1	2.448 8	18.835	0.091 3	0.299 3
	3+	2.752 3	20.318	0.472 3	1.406 6	2.448 8	18.835	0.096 4	1.601 1
	3-	3.040 1	20.284	0.521 1	1.603 8	2.731 2	18.733	0.104 4	1.927 0
SAP5	1+	0.301 3	23.822	-1.202 8	-1.817 6	0.127 4	19.095	-1.295 5	-2.200 3
	1-	0.512 1	23.765	-0.953 6	-1.336 3	0.367 6	19.038	-0.972 6	-1.355 3
	2+	0.512 1	23.765	-0.148 4	-0.208 6	0.367 6	19.038	-0.184 5	-0.247 5
	2-	2.531 9	23.391	0.132 8	0.353 2	2.266 9	18.663	0.106 7	0.368 7
	3+	2.531 9	23.391	-0.139 9	1.196 5	2.266 9	18.663	0.020 5	1.483 1
	3-	2.708 5	23.379	-0.050 2	1.255 3	2.470 9	18.612	0.104 0	1.566 6

1+ : 内层内表面, 1- : 内层外表面; 2: 中层, 3: 外层

表 2 三层悬臂壳在热荷载和机械荷载共同作用下的位移和应力

$y = 5$		$(h/R_0 = 0.8)$				$(h/R_0 = 1.0)$			
		$w(x=l)$	$u(x=l)$	$\sigma_x(x=\frac{l}{2})$	$\sigma_\theta(x=\frac{l}{2})$	$w(x=l)$	$u(x=l)$	$\sigma_x(x=\frac{l}{2})$	$\sigma_\theta(x=\frac{l}{2})$
本文	1+	1.478 6	19.279	-0.330 1	1.860 5	0.723 1	18.693	-0.384 9	0.478 5
	1-	1.695 8	19.271	-0.148 6	2.133 9	0.962 8	18.688	-0.277 1	1.111 8
	2+	1.695 8	19.271	-0.109 6	0.316 4	0.962 8	18.688	-0.142 8	0.101 7
	2-	3.462 4	19.181	0.030 1	0.477 3	2.727 9	18.319	0.026 3	0.402 3
	3+	3.462 4	19.181	0.237 8	2.507 2	2.727 9	18.319	-0.107 4	2.149 6
	3-	3.740 0	19.166	0.241 8	2.626 7	3.014 8	18.230	-0.104 3	2.437 6
SAP5	1+	1.435 0	22.422	-0.509 3	2.087 2	0.712 3	18.351	-0.610 1	0.943 1
	1-	1.595 3	22.411	-0.537 7	1.956 8	0.912 9	18.332	-0.298 2	1.043 3
	2+	1.595 3	22.411	-0.083 0	0.434 5	0.912 9	18.332	-0.119 6	0.223 9
	2-	3.242 3	22.322	0.054 3	0.544 9	2.560 8	18.148	0.056 2	0.464 9
	3+	3.242 3	22.322	-0.430 5	2.229 4	2.560 8	18.148	-0.167 6	2.013 7
	3-	3.406 4	22.329	-0.382 3	2.211 9	2.759 0	18.139	-0.110 9	2.050 1

1+ : 内层内表面, 1- : 内层外表面; 2: 中层, 3: 外层

算例 2 考察三层悬臂柱壳在温度 $T = T_1 = 1^\circ\text{C}$ 和内表面受均布压力 $q = 1$ 共同作用下的位移和应力($\alpha_0 = 1, C_{11}^{(2)} = 1$)。材料特性和几何参数同例 1。计算结果见表 2。

4 结 论

本文给出的悬臂柱壳轴对称问题的弱形式求解热应力混合方程是有效的, 物理概念清晰。本文也为验证其它数值方法的正确性和计算精度提供了考题和依据。

参 考 文 献

- [1] Huang N N, Tauchert T R. Thermal stresses in doubly curved cross ply laminates [J]. Internat J Solids Structures, 1992, **29**(8): 991~ 1000.
- [2] Chen T C, Lee M C. Thermal stresses in an axisymmetric double layer annular circular cylinder with interlayer thermal resistance [J]. J Thermal Stresses, 1993, **16**(1): 11~ 30.
- [3] Soldatos K P, Ye J Q. Three dimensional static, dynamic, thermoelastic and buckling analysis of homogeneous and laminated composite cylinders [J]. Compos Structures, 1994, **29**(4): 131~ 143.
- [4] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [5] 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程[J]. 计算结构力学及其应用, 1991, **8**(4): 343 ~ 350.
- [6] Van Loan C. A symplectic method for approximating all the eigenvalues of a Hamiltonian matrix [J]. Linear Algebra Appl, 1984, **61**(10): 233~ 251.
- [7] 丁克伟, 范家让. 强厚度叠层闭口悬臂柱壳轴对称问题的精确解[J]. 合肥工业大学学报, 1995, **18**(2), 9~ 18.

The Solution of Weak Formulation for Axisymmetric Problem of Orthotropic Cantilever Cylindrical Shell

Ding Kewei, Tang Limin

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

Abstract: Weak formulation of equilibrium equations including boundary conditions of laminated cylindrical shell are presented, and thermal stresses mixed state equation for axisymmetric problem of closed cantilever cylindrical shell is established. A unified approach and weak solutions are obtained for closed laminated cantilever cylindrical shell of arbitrary thickness under thermal and mechanical loadings. The equations and boundary conditions proposed in this paper are weakened, the method of this paper would be easy to popularize in dynamics analysis of elasticity.

Key words: closed cantilever cylindrical shell; thermal stresses; mixed equation; axisymmetric problem; weak solution