

文章编号: 1000\_0887(1999) 06\_0559\_10

# 简单剪切振荡现象及弹塑性本构的限制条件<sup>\*</sup>

陈良森<sup>1</sup>, 赵兴华<sup>2</sup>, 扶名福<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 南昌大学 工程力学研究所, 南昌 330029;

<sup>2</sup> 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要: 基于在真应力空间刻划弹塑性物质的强化、软化和理想塑性特性, 本文以刚塑性随动强化模型为例说明产生简单剪切振荡现象, 是与模型在简单剪切变形下, 其强化和软化特性发生交替变化的现象有关。为使弹塑性本构模型更符合实际, 要求它们必须满足如下条件: 即对任意弹塑性加载变形过程, 本构模型所给出的应力应该是非振荡的, 所描述的强化和软化特性, 不存在从软化阶段至强化阶段的过渡。

关键词: 客观率问题; 弹塑性本构; 剪切振荡

中图分类号: O344.1 文献标识码: A

## 引 言

自从 Dienes(1979)、Nagtegaal 和 De Jong(1982) 等意外发现常用的有限变形线性随动强化模型出现所谓的简单剪切振荡现象以来, 何种客观率更合适的问题已成为讨论的焦点。例如, Agah\_Tehrani 等(1987)<sup>[1, 2, 3]</sup> 都认为应选用适当的客观率。然而, Truesdell 和 Noll(1965)、Casey 和 Naghdi(1988) 及 Nemat\_Nasser(1983) 等均认为各种客观率是等价的。Nemat\_Nasser 还进一步指出, 对同一模型, 不同的客观率的使用代表了不同的本构方程, 出现振荡现象仅是因为本构方程本身不合适。

振荡现象之所以不合理, 是因为与我们的力学经验不符。因此, 应该用数学形式把这一点变成本构关系的一个限制条件, 而不是用修正本构模型中某一成分(例如客观率)作为克服振荡现象的一般方法。本文的研究表明, 线性随动强化模型的简单剪切振荡现象, 是当采用不同客观率时, 在模型中出现强化和软化特性交替变化的现象有关。实际上, 原来使用 Jaumann 率的线性随动强化模型不是一个真正的强化模型。这一结论是在真应力空间中刻划弹塑性物质的强化、软化和理想塑性特性的基础上得到的。此外, 在不同 Lagrange 型应力空间中定义的强化、软化和理想塑性实际是不等价的。同时, 从力学经验看, 在连续的弹塑性加载变形过程中, 当物质出现软化特性以后, 就不可能再出现强化特性。利用这一条件显然可以限制一些振荡现象(包括简单剪切振荡现象)的出现。在文中我们还给出了针对本构模型的这一限制条件的具体形式。

## 1 刚塑性线性随动强化模型的简单剪切振荡现象

设  $T$  是 Cauchy 应力张量,  $F$  是变形梯度,  $R, U$  分别是  $F$  的旋转和右伸长张量, 应力张量由

\* 收稿日期: 1998\_04\_14

作者简介: 陈良森(1966~), 男, 博士, 副教授; 赵兴华(1939~), 男, 教授; 扶名福(1953~), 男, 教授。

$$\sigma = R^T TR \quad (1)$$

定义· 其偏应力张量  $s = \sigma - \frac{1}{3}(\text{tr}\sigma)I$ ,  $I$  为单位二阶张量· 如果记  $S = T - \frac{1}{3}(\text{tr}T)I$  为 Cauchy 应力  $T$  的偏应力张量, 那么,

$$s = R^T SR \quad (2)$$

为简单和方便, 下面考虑刚塑性线性随动强化模型·

设  $\alpha$  是欧拉型背应力张量, 它由旋转张量  $\beta$  (由某旋率  $\Omega$  决定) 和真应力  $\sigma$  空间的屈服面的“中心”  $\sigma_0$  确定<sup>[4]</sup>, 即

$$\alpha = \beta\sigma_0\beta^T \quad (3)$$

考虑 von Mises 屈服函数

$$F(S, \alpha) = f(S, \alpha) - k_0^2 = (S - \alpha) \cdot (S - \alpha) - k_0^2 \quad (4)$$

其中  $(\ ) \cdot (\ )$  表示两张量的标量积,  $k_0$  为材料常数· 如果正交流动法则成立, 即有

$$D = \lambda(S - \alpha) \quad (\lambda > 0), \quad (5)$$

其中  $D = (1/2)(L + L^T)$ ,  $L = \dot{F}F^{-1} = D + W$  和  $W$  分别是伸长率和旋率张量· 由屈服条件可得

$$\lambda = (D \cdot D)^{1/2}/k_0, \quad S = \alpha + \frac{k_0}{(D \cdot D)^{1/2}}D \quad (6)$$

这是刚塑性物质只能经受不可压缩的变形·

定义

$$f = \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S = \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} = 2(S - \alpha) \cdot \dot{S}, \quad (7)$$

其中  $\dot{S} = \dot{S} - R R^T S + S R R^T$  是偏应力张量  $S$  的 Green-Naghdi 率, 简称为  $S$  的 GN 率·  $f$  是应力空间表述的弹塑性理论中的加载参数· 在此, 用  $\sigma$  而不是 Cauchy 应力  $T$  或其他应力张量乃是因为  $\sigma$  是物质的真应力且与变形的旋转部分无关· 对于刚塑性物质根据  $f$  是否大于、等于或小于零, 就可以判断物质是处于屈服、理想塑性还是软化状态·

假设背应力的演化律为

$$\dot{\alpha} = \alpha - \Omega\alpha + \alpha\Omega = cD, \quad (c > 0), \quad (8)$$

其中  $\Omega = \beta\dot{\beta}^T$ · 由此式可决定随塑性变形的变化, 从而据(6)式可决定应力  $S$ ·

下面考虑简单剪切变形下上述刚塑性模型的应力响应· 在某直角坐标下,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos r & \sin r & 0 \\ -\sin r & \cos r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$D = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中  $r = \arctan(\gamma/2)$ ,  $0 \leq r < \pi/2$ , 是一个与简单剪切角  $\theta = \arctan\gamma$  相当的量, 在此也简称为简单剪切角· 由此有

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S = 2\sqrt{2}k_0r \left[ \frac{dS_{12}}{dr} + (S_{11} - S_{22}) \right], \\ t &= \frac{f}{2\sqrt{2}k_0r} = \frac{1}{c} \left[ \frac{dS_{12}}{dr} + S_{11} - S_{22} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

以下只考虑当  $\alpha$  的客观率选用 Jaumann 率 (JM 率)、Green\_Naghdi 率 (GN 率)、Sowerby\_Chu 率 (SC 率) 和扶氏率时 4 种情形, 结果见表 1•

表 1 不同客观率的刚塑性随动强化模型的简单剪切变形解

刚塑性随动强化模型	简单剪切变形下的应力解
Jaumann 率模型 ( $\Omega = \mathbf{W}$ )	$S_{11} = \alpha_{11} = c[1 - \cos(2\alpha n r)]/2 = -S_{22} = -\alpha_{22}$ $S_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}k_0 + \frac{c}{2}\sin(2\alpha n r), S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$ $t = \frac{f}{2\sqrt{2}k_0 r \dot{\gamma}} = 1 + \tan^2 r \cos(2\alpha n r)$
Green_Naghdi 率模型 ( $\Omega = \mathbf{R}\mathbf{R}^T$ )	$S_{11} = 2c[\cos(2r)\ln(\cos r) + \sin(2r) - \sin^2 r]$ $S_{12} = \sqrt{2}k_0/2 + \cos(2r)[2r - 2\tan(2r)\ln(\cos r) - \tan r] = S_{22} = -S_{11}$ $S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$
Sowerby_Chu 率模型 ( $\Omega = \Omega_E$ )	$S_{11} = c \left[ \sin r \ln \left( \frac{\sin r + 1}{\cos r} \right) + \cos r - 1 \right] = -S_{22}$ $S_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}k_0 + c \left[ \cos r \ln \left( \frac{\sin r + 1}{\cos r} \right) + \tan r - \sin r \right]$ $S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$
扶氏客观率模型 ( $\Omega = \mathbf{W}_F$ )	$S_{11} = c[\cos 2\theta \ln(\cos \theta) + \theta \sin 2\theta - \sin^2 \theta]$ $S_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}k_0 + \frac{c}{2}\cos 2\theta (2\theta - 2\tan 2\theta \ln(\cos \theta) - \tan \theta)$ $S_{22} = -S_{11}, S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0, \theta = \arctan(2\alpha n r)$

其中

$$\Omega_E = \frac{r\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_F = \frac{\dot{\gamma}}{1 + \dot{\gamma}^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分别是左 Cauchy\_Green 伸长张量  $\mathbf{V}$  的主标架旋率(见[3]) 和某种旋率<sup>[5]</sup>, 量  $t$  随  $r$  的变化规律见图 1•

从图 1 中可看出, 如果欧拉型  $\alpha$  的演化律中使用 Jaumann 率, 那么, 参数  $t$  因而  $f$  的值随  $r$  由正数变成负数交替出现, 这表明此刚塑性线性随动强化模型不是一个真正的强化模型, 而是一个具有强化和软化特性交替变化的刚塑性模型• 如果改用 Green\_Naghdi 率或 Sowerby\_Chu 率或扶氏客观率, 那么,  $t$  因而  $f$  始终是正数, 从而刚塑性模型才是真正的线性随动强化模型• 而从图 2(a)、

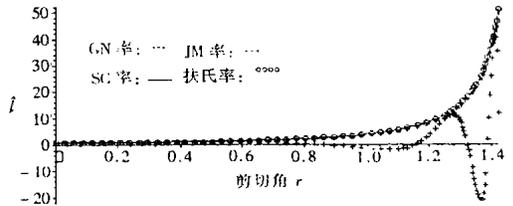
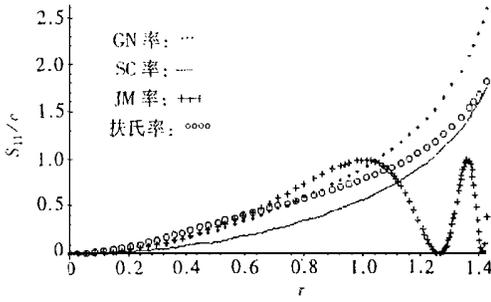


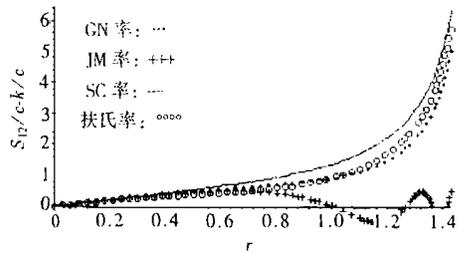
图 1 不同客观率的线性随动强化模型, 在简单剪切变形下量  $t$  随剪切角  $r$  的变化规律

(b) 中可知, 对于后三个刚塑性模型, 简单剪切变形中各 Cauchy 应力分量随  $r$  的变化均为非振荡的, 图中  $k = \sqrt{2}k_0/2$  由于  $c$  在单轴拉伸条件下相当于切线模量  $E_p$ , 大约是弹性模量  $E$  的  $10^{-1}$  倍(对金属而言), 而  $k$  相当于屈服应力大约是  $E$  的  $10^{-3}$  倍• 因此, 可取  $k$  与  $c$  相差两个数量级• 图 2(c)、(d) 给出了  $k/c = 10^{-2}$  时  $\sigma_{11}$  及  $\sigma_{12}$  这两个真应力分量随  $r$  的变化情况• 对后三种情况, 它们也是非振荡的• 而且 Jaumann 率刚塑性模型得到的  $\sigma$  路径为一简单闭曲线,

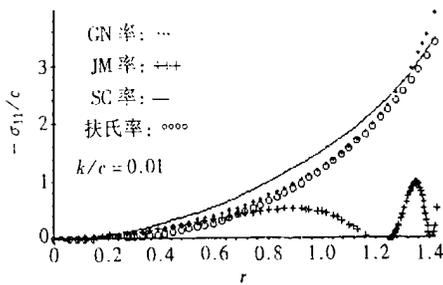
而其它三个刚塑性模型的  $\sigma$  路径则不是, 如图 2(e)、(f) 所示( $0 \leq r \leq \pi/2, 1$ )。



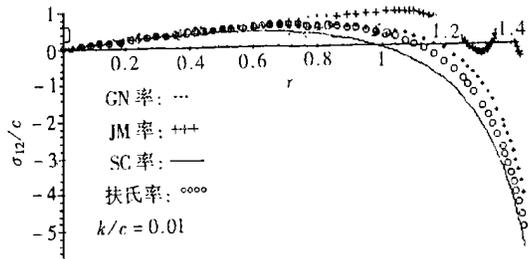
(a) 4种刚塑性模型的应力  $S_{11}/c$  随剪切角  $r$  的变化规律



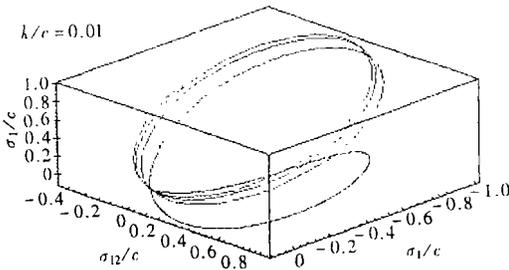
(b) 4种刚塑性模型的剪应力  $S_{12}$  随剪切角  $r$  的变化规律



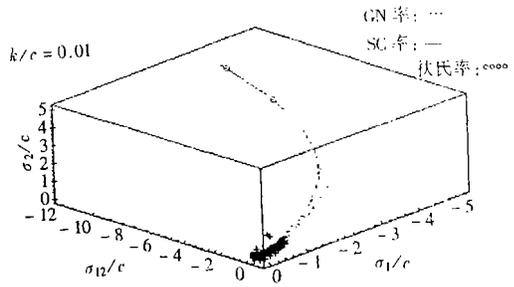
(c) 真应力  $\sigma_{11}/c$  随剪切角  $r$  的变化规律



(d) 4种刚塑性模型的真应力  $\sigma_{12}/c$  随剪切角  $r$  的变化规律



(e) Jaumann 率的刚塑性模型的真应力路径



(f) 其它客观率的刚塑性模型的真应力路径

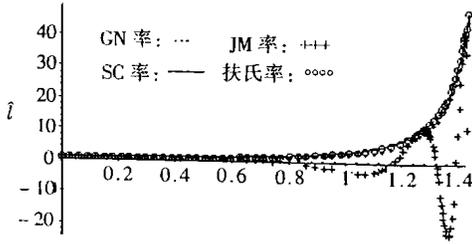
图 2 4种刚塑性模型在简单剪切变形下的应力解

因此, 可以得出结论, 简单剪切振荡现象与模型在持续的塑性变形中出现强化和软化交替变化的现象有关。

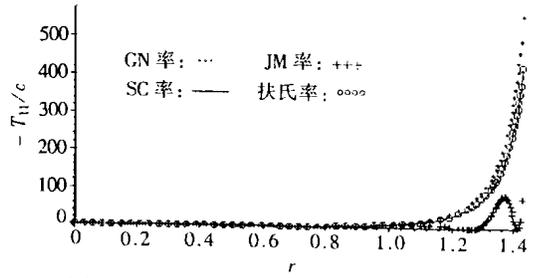
在此必须指出, 上述结论是基于强化和软化的如下定义, 即真应力空间中的屈服面是否局部扩张 ( $f > 0$ )、收缩 ( $f < 0$ ) 或不动来判断模型是处于强化、软化还是理想塑性状态。采用此定义的理由是, 由客观性原理可知, 应变历史所决定物质的真应力是应力张量而非 Cauchy 应力张量; 其次, 由[4]中的讨论可知, 基本定义给出的背应力或移动张量只能是 Lagrange 型张量。因此, 如果以弹塑性物质的真应力来描述屈服面的变化并来刻划其强化、软化和理想塑性特性时, 就自然导致(9)式这种定义。因而就只能使用 Green\_Naghdi 率。图 3 给出

了用 Jaumann 率、Sowerby\_Chu 率和扶氏率代替  $S$  的 Green\_Naghdi 率时, 前面讨论的 4 种本构模型的  $\hat{t}$  随  $r$  的变化规律。由计算可知, 对同一本构模型而言, 用不同的客观率计算  $f$  结果是不同的。当使用 Jaumann 率计算时所有模型均只有强化特性, 根本不出现软化特性。图 3 的结果是根据下面的公式计算的:

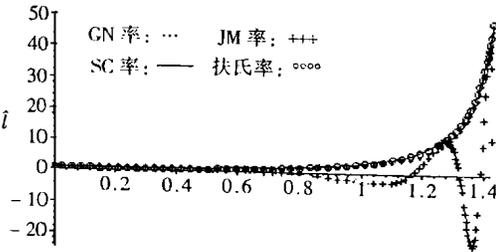
$$f = 2(S - \alpha) \cdot (S - \Omega S + S \Omega) = 2\sqrt{2k_0} a \left[ \frac{dS_{12}}{da} + S_{11} - S_{22} \right] \cdot$$



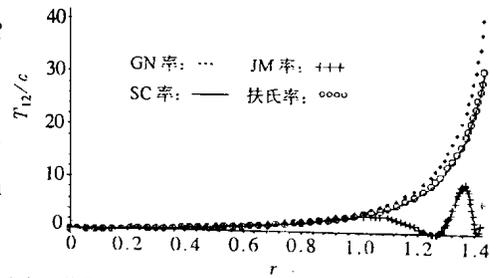
(a) 扶氏客观率的强化参数随  $r$  的变化规律



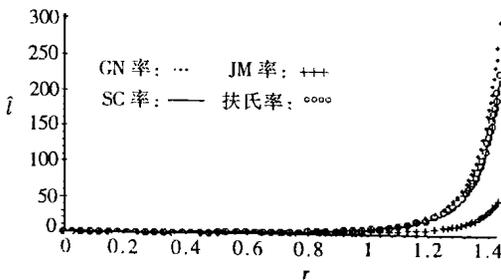
(a) 4 种刚塑性模型的 Piola-Kirchhoff 应力分量  $T_{11}/c$  的解



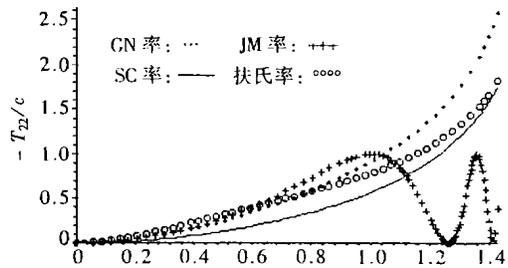
(b) Sowerby-Chu 率的强化参数随  $r$  的变化规律



(b) 4 种刚塑性模型的 Piola-Kirchhoff 应力分量  $T_{12}/c$  的解



(c) Jaumann 率的强化参数随  $r$  的变化规律



(c) 4 种刚塑性模型的 Piola-Kirchhoff 应力分量  $T_{22}/c$  的解

图 3 用另外 3 种客观率的  $\hat{t}$  随  $r$  的变化规律

图 4 简单剪切变形下刚塑性模型的 Piola-Kirchhoff 应力解 ( $k/c = 0.01$ )

在此, 利用了  $\Omega$  具有下面的形式

$$\Omega = a \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

因此,

$$l = \frac{1}{c} \left[ \frac{dS_{12}}{dr} + \frac{da}{dr} (S_{11} - S_{22}) \right]. \quad (12)$$

当  $\Omega$  分别为  $\mathbf{RR}^T$ 、 $\mathbf{W}$ 、 $\Omega_E$  和  $\mathbf{WF}$  时,  $da/dr$  分别为  $1$ 、 $(1 + \tan^2 r)$ 、 $1/2$  和  $(1 + \tan^2 r)/(1 + 4\tan^2 r)$ 。

上一段的论述自然引出这样的问题: 以其它 Lagrange 型应力空间屈服面的变化来刻画强化、软化特性情形如何? 一般地, 它们将不等价, 因而也与定义(9)不等价。例如, 以第二类 Piola\_Kirchhoff 应力空间中屈服面的变化来定义强化软化特性, 这相当于定义

$$f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{S}} = 2(\mathbf{S} - \alpha) \cdot \dot{\mathbf{S}}, \quad (13)$$

其中  $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \mathbf{L}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}^T + \text{Str} \mathbf{D}$  是偏应力张量  $\mathbf{S}$  的 Truesdell 率, 在简单剪切变形下, 对上述 4 种刚塑性模型有

$$f = 2\sqrt{2}k_0 \left[ \frac{dS_{12}}{dY} - S_{22} \right] = 2\sqrt{2}k_0 \left[ \frac{dS_{12}}{dY} + S_{11} \right], \quad (14)$$

因而,

$$l = \frac{1}{c} \left[ \frac{dS_{12}}{dr} + 2(1 + \tan^2 r) S_{11} \right]. \quad (15)$$

此结果与用 Jaumann 率计算的结果相同。用  $\mathbf{S}$  的 Oldroyd 率  $\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \mathbf{L}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}^T$  及 Cotter\_Rivlin 率  $\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \mathbf{L}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{L}$  也得到同样的结果。此时, 前述 4 种刚塑性模型均呈现强化特性, 例如, 对于使用 Jaumann 率的刚塑性模型, 用 Jaumann 率, Truesdell 率, Oldroyd 率及 Cotter\_Rivlin 率计算的  $l$  均为

$$l = 1 + \tan^2 r. \quad (16)$$

对于此刚塑性模型, 第二类 Piola\_Kirchhoff 应力张量的非零分量均为振荡的, 见图 4 ( $k/c = 10^{-2}$ )。

因此, 应力的振荡性似乎不依赖于应力度量, 而刻画强化软化特性的量则依赖应力度量。

上述分析也说明, 应力的振荡性与强化软化交替出现现象虽有联系, 但不是一回事。如果应力的振荡性确实不依赖应力度量, 即对某一种应力度量的振荡性即意味着其它应力度量的振荡性, 那么, 就克服应力的振荡性而言, 在真应力  $\sigma$  空间刻画强化软化特性, 要比在第二类 Piola\_Kirchhoff 应力张量空间中定义更好。最后, 还有一点必须说明即刻刻画强化软化特性的量(例如前面的  $l$ ) 对应力度量的依赖性类似于有限弹性理论中应力与应变关系对应力度量的依赖性, 显然  $\sigma$  和第二类 Piola\_Kirchhoff 应力张量对同一应变变量的一一对应关系是不等价的。

## 2 弹塑性本构的限制性条件

对于弹性物质, 其本构方程必须满足本构不等式条件, 此本构不等式必须保证一些力学事实成立, 例如, 随静水压力增加将导致物质的体积不断缩小。使用 Jaumann 率的线性次弹性模型出现的简单剪切振荡现象, 正是由于它不满足本构不等式且与人们经验事实相违背, 才不被认为是恰当的弹性模型。同样, 对于弹塑性物质, 当经受弹性变形时必须满足上述不等式。然而, 当物质经受弹塑性变形, 它还必须满足新的限制条件, 否则, 可能出现简单剪切振荡现象, 从上一节的讨论可知, 简单剪切振荡现象与强化软化的交替变化有一定的联系。而后一现象不可能由 Naghdi 和 Trapp(1975) 提出的功假设(类似于小变形下的 Ilyushin 假设)来限制, 原因是此假设允许弹塑性本构方程描述强化和软化现象(见下面的讨论)。

实际上, 任何力学上可接受的弹塑性物质模型, 在塑性加载变形过程中, 其应力都不应该随变形的增大而出现振荡现象。同样, 也很难想象弹塑性物质在塑性加载过程中, 经受软化后

还会再出现强化现象·

设  $\xi_I, I = 1, \dots, N$  是描述加载历史的内变量· 弹塑性物质的应力函数为

$$\sigma = \sigma(E, \xi_I), \quad (17)$$

其中  $E = 0.5(C - I)$ ,  $C = F^T F$  为右 Cauchy-Green 张量,  $\sigma(\cdot, \xi_I)$  表示  $\sigma$  依赖于变量  $\xi_I, I = 1, \dots, N$ , 以下均采用此简化记号· 设屈服函数为

$$F(\sigma, \xi_I) = f(\sigma, \xi_I) - k \leq 0, \quad (18)$$

在应变空间的屈服函数为

$$g(E, \xi_I) = f(\sigma(E, \xi_I), \xi_I) - k \leq 0 \quad (19)$$

定义

$$\mathcal{L}[E] = \frac{\partial \sigma}{\partial E}[E], \quad f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \sigma, \quad \hat{g} = \frac{\partial g}{\partial E} \cdot E = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial E}[E] = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathcal{L}[E], \quad (20)$$

其中  $\mathcal{L}[E]$  表示为  $E$  的线性函数,  $\mathcal{L}$  为弹性张量· 设在塑性加载时, 即  $g = 0$  且  $\hat{g} > 0$  时, 内变量  $\xi_I, I = 1, \dots, N$  的演化律为

$$\dot{\xi}_I = \lambda \theta(E, \xi_I), \quad (I, J = 1, \dots, N, \lambda > 0) \quad (21)$$

由一致性条件可求得

$$\lambda = \hat{g}/D > 0, \quad (22)$$

其中  $D = -\partial g / \partial \xi_I \cdot \theta$ , 在此采用了求和约定· 定义

$$\sigma_p = \frac{1}{D} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_I}[\theta] \quad (23)$$

则有, 在塑性加载时,

$$\sigma = \mathcal{L}[E] + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_I}[\dot{\xi}_I] = \mathcal{L}[E] + \frac{\hat{g}}{D} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_I}[\theta] = \mathcal{L}[E] + \sigma_p + \frac{\partial g}{\partial E}[E] = \mathcal{L}_e[E] \quad (24)$$

由(20)的第三式可知(24)式也可写成

$$\sigma = \mathcal{L}[E] + \sigma_p + \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathcal{L} \right][E] = \left[ \mathcal{I} + \sigma_p + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \mathcal{L}[E] = \mathcal{H} \mathcal{L}[E], \quad (25)$$

其中  $\mathcal{H}$  为单位四阶张量· 据 Casey 和 Naghdi(1984), 有

$$\det \mathcal{H} = 1 + \sigma_p \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (26)$$

实际上, 可取与  $\sigma_p$  平行及互相垂直的一组标准基, 那么  $\mathcal{H}$  在设一组标准基的表示是一个  $6 \times 6$  的矩阵, 而且此矩阵对角线及第一行上的元素非零, 对角线最上端的元素是  $1 + \sigma_p \cdot (\partial f / \partial \sigma)$ , 其它元素均为 1, 因此, (26) 式成立·

定义

$$\Phi = \frac{f}{\hat{g}}, \quad (27)$$

此参数刻划了弹塑性响应的硬化 ( $\Phi > 0$ )、理想塑性 ( $\Phi = 0$ ) 及软化特性· 这一定义略不同于 Casey 和 Naghdi(1983) 中给出的定义, 在那里  $f$  是基于第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量定义的· 在此, 采用(27), 是因为在真应力空间定义  $\Phi$  将更好地限制弹塑性本构模型出现应力振荡的现象(见上一节的分析)·

由一致性条件可知,

$$f = f + \frac{\hat{g}}{D} \frac{\partial f}{\partial \xi_I} \cdot \theta = 0,$$

即

$$\Phi = - \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \cdot \theta \quad (28)$$

另外,由一致性条件

$$g \geq \hat{g} + \frac{\hat{g}}{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_j} [\theta] + \frac{\hat{g}}{D} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \cdot \theta = 0$$

且利用(28)式可得

$$\Phi = 1 + \sigma_p \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (29)$$

而由(26)式表明,

$$\Phi = \det \mathcal{N} \quad (30)$$

下面提出如下假设:

设  $(E^0, \xi^0)$  是弹塑性物质的一状态即  $g(E^0, \xi^0) \leq 0$ , 对任意满足下列条件的变形过程  $E(\gamma)$  ( $\gamma$  为某参数,  $\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_f$ ),

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } E(\gamma_0) = E_0; \\ \text{(b) 对任意 } \gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_e, g(E(\gamma), \xi^0) \leq 0; \\ \text{(c) } \gamma_e \leq \gamma \leq \gamma_f, \text{ 有 } g(E(\gamma), \xi^0) \leq 0 \text{ 且 } \hat{g}(\gamma) > 0 \cdot \end{array} \right\} \quad (31)$$

且设  $\Phi(\gamma)$  在  $\gamma_e \leq \gamma \leq \gamma_f$  是连续函数, 那么,  $\Phi(\gamma)$  只能满足下列三种情况之一:

$$1) \text{ 对任意 } \gamma_e \leq \gamma < \gamma_f, \quad \Phi(\gamma) \geq 0; \quad (32)$$

$$2) \text{ 对任意 } \gamma_e \leq \gamma < \gamma_f, \quad \Phi(\gamma) \leq 0; \quad (33)$$

$$3) \text{ 存在 } \gamma_{hs}, \gamma_e < \gamma < \gamma_f, \text{ 当 } \gamma_e \leq \gamma \leq \gamma_{hs} \text{ 时,} \quad \Phi(\gamma) \geq 0; \quad (34)$$

$$\text{当 } \gamma_{hs} \leq \gamma < \gamma_f \text{ 时,} \quad \Phi(\gamma) < 0 \cdot \quad (35)$$

这一假设具体表述了这一概念, 对任意只产生塑性加载的变形过程弹塑性物质不存在由软化阶段至强化阶段的变化. 具体说, 如果弹塑性物质处于任一状态, 此后经受任一开始为弹性加载而后为塑性加载的变形过程, 其强化软化特性只能为三种情形: 1) 理想塑性和强化; 2) 软化和理想塑性; 3) 由强化和理想塑性转变为理想塑性和软化.

由(24)和(25)式可知, 弹塑性张量  $\mathcal{L}_{ep}$  可分解成两部分即  $\mathcal{N}$  和  $\mathcal{L}$ . 而(30)式表明 上述本构限制条件仅是对  $\mathcal{L}_{ep}$  中的  $\mathcal{N}$  的限制性条件. 而弹性本构不等式则是对弹性张量  $\mathcal{L}$  的限制条件. 由此也证实引入弹塑性本构的限制条件的本构方程都不可能出现强化和软化随塑性变形交替变化的现象.

在此需要指出, Naghdi 和 Trapp 的功假设导致存在应力势函数, 和此势函数关于  $\xi_j$  的偏导数应满足的不等式, 此不等式导致  $\sigma_p$  平行于  $(\det U) U^{-1} (\partial g / \partial E) U^{-1}$ , 另外, 还导致对应变空间的屈服面有一定的限制条件. 很明显, 这些限制条件不同于(32) ~ (35) 给出的对  $\mathcal{N}$  的限制条件.

### 3 讨论与结论

首先我们注意到, 根据 Noll 的简单物质理论及客观性原理, 纯变形历史或应变历史只能决定 Lagrange 型应力张量, 因此, 弹塑性物质本构理论中的屈服面概念只能定义在 Lagrange

型应力空间中,这与[4]中的结论,即背应力的基本定义只给出 Lagrange 型背应力张量是一致的。由此表明,弹塑性物质的强化、理想塑性和软化特性也只能以 Lagrange 型应力空间中屈服面的局部变化来刻画。显然,在不同的 Lagrange 型应力空间描述同一种弹塑性物质的强化软化特性是不等价的,这已在第 1 节的分析中看到。由此可知,弹塑性本构理论的 Lagrange 描述是基本的。

对于任意的弹塑性物质,我们在此提出了一个本构假设,即要求弹塑性本构方程满足下面的限制条件:弹塑性物质从任一状态开始,经受弹性加载而后为塑性加载的变形过程,都不能经历由软化阶段至强化阶段的变化,从而使弹塑性物质不能出现强化和软化特性随塑性变形交替变化的现象。从概念上看,弹塑性本构方程描述的理想物质从某状态经受一开始为弹性变形而后为塑性变形的变形过程出现振荡的应力,明显地与弹塑性物质在此过程中出现强化与软化交替出现的现象有联系。而且,一般情况下,如果弹塑性物质对某一这类过程出现后一现象,那么,将会发生随塑性变形出现振荡的应力;反过来则不成立。第 1 节对线性强化刚塑性模型的讨论与此结论相符。然而,还需要对这一问题作严格的论证。尽管如此,给出弹塑性本构方程不出现强化和软化随塑性变形交替出现的限制性条件会限制弹塑性物质随塑性变形出现应力振荡。对线性随动强化刚塑性模型简单剪切振荡现象的分析表明,在真应力  $\sigma$  空间给出弹塑性物质的强化和软化特性的本构限制性条件比在第二类 Piola\_Kirchhoff 应力空间给出此条件,更容易限制简单剪切振荡现象的产生。因此,第 2 节给出的这一弹塑性本构方程的限制性条件的具体形式(见(32)~(35)式)就是基于此考虑的。

因此,可以相信,应该从一个角度来理解客观率问题。正如 Casey 和 Naghdi (1988) 及 Nemat\_Nasser(1983)所指出的,任何一种客观率在构造弹塑性模型时原则上是等价的,在同一模型中不同客观率的使用仅代表了不同的本构模型。一个本构模型的合理与否不应该用使用何种客观率来判断,而应该由普遍的且合理的弹塑性本构方程的限制性条件来决定。实际上,自从 Dienes(1979)和 Nagtegaal 和 DeJong(1982)关于简单剪切振荡现象的讨论以来,并没有在关于何种客观率更优这一方面取得一致意见。

然而,要把弹塑性物质是连续的塑性变形不产生振荡的应力的限制条件转成具体的形式似乎存在困难。对于任一开始为弹性变形 ( $\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_e$ ) 而后为塑性变形 ( $\gamma_e \leq \gamma < \gamma_f$ ) 的变形过程  $E(\gamma)$ , 决定应力的本构方程一般是关于  $\sigma, \xi, I = 1, \dots, N$  的一组方程。根据存在唯一解  $\xi_I(\gamma), I = 1, \dots, N$  这一要求,应力  $\sigma(\gamma)$  应满足

$$\frac{d\sigma}{d\gamma} = a(\gamma) + \sigma_p(\gamma) \left[ a(\gamma) \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma, \gamma) \right], \quad (\gamma_e \leq \gamma < \gamma_f), \quad (36)$$

其中  $a(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma)[dE/d\gamma]$ , 在  $\gamma_e \leq \gamma < \gamma_f$  时,  $g = 0$  且  $\hat{g}(\gamma) > 0$ 。因此,问题转化为讨论以上方程在所给定的任意应变路径下在什么条件下不会出现振荡解。一般情况下,振荡的应力解在  $\sigma$  空间是一条首尾相接的闭曲线组成的曲线,或是一条从不自相交的闭曲线,称为简单闭曲线。这样,上述问题可叙述为,对任一开始为弹性变形而后为塑性加载的变形过程,弹塑性物质的应力响应应在  $\sigma$  空间不应该是一条一般闭曲线或简单闭曲线。

总之,一个合理的弹塑性本构模型除了应该满足弹性性质的本构不等式以外,还必须满足另外 3 个本构限制条件,即 Naghdi 等提出的功假设和上述两个本构限制条件。

致谢 作者之一感谢南昌大学工程力学所诸位老师尤其是赵锡钱教授、黄模佳教授和丁成辉教授的帮助,同时也感谢南昌大学的资助。

## 参 考 文 献

- [1] Agah\_Tehrani A, Lee E H, Mallett R L. The theory of elastic\_plastic deformation of finite strain with induced anisotropy modeled as combined isotropic\_kinematical hardening[J]. J Mech Phys Solids, 1987, **35**(5): 519~ 539.
- [2] Dienes J K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies[J]. Acta Mech, 1979, **32**(3\_4): 217~ 232.
- [3] Szabo L, Balla M. Comparison of some stress rates[J]. Int J Solids Struct, 1989, **25**( 3): 279~ 297.
- [4] 陈良森, 赵兴华. 带弹性范围物质理论和背应力的定义[J]. 应用数学和力学, 1999, **21**(5): 452~ 460.
- [5] 扶名福, 杨德品, 黄模佳. 有限变形模糊损伤弹塑性[M]. 北京: 航空工业出版社, 1995, 20~ 21.
- [6] Casey J, Naghdi P M. Further constitutive results in finite plasticity[J]. Q J Mech Appl Math, 1984, **37**(2): 231~ 259.
- [7] Casey J, Naghdi P M. On the relationship between the Eulerian and Lagrangian description of finite rigid plasticity[J]. Arch Rational Mech Anal, 1988, **102**(4): 351~ 375.
- [8] Nagtegaal J C, De Jong J E. Some aspects of nonisotropic work hardening in finite strain plasticity [A]. In: Proc Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain [C]. Div Appl Mech Stanford University, Rensselaer Polytechnic Institute, 65, 1982, 56~ 106.
- [9] Nemat\_Nasser S. On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials[J]. J Appl Mech, 1983, **50**(4b): 1114~ 1126.

## The Simple Shear Oscillation and the Restrictions to Elastic\_Plastic Constitutive Relations

Chen Liangsen<sup>1</sup>, Zhao Xinghua<sup>2</sup>, Fu Minfu<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>Institute of Engineering Mechanics, University of Nanchang, Nanchang 330029, P R China;

<sup>2</sup>Shanghai Institute of Appl Math Mech, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

**Abstract:** Based on the definitions of hardening, softening and ideal plastic behavior of elastic\_plastic materials in the true stress tensor space, the phenomena of simple shear oscillation are shown to be relative to the oscillatory occurrence of hardening and softening behavior of elastic\_plastic materials, namely the oscillation of hardening behavior, by analyzing a simple model of rigid\_plastic materials with kinematical hardening under simple shear deformation. To make the models of elastic\_plastic materials realistic, must be satisfied the following conditions: for any constitutive model, its response stresses to any continuous plastic deformation must be non\_oscillatory, and there is no oscillation of hardening behavior during the plastic deformation.

**Key words:** objective rates; elastic\_plastic constitutive relation; simple shear oscillation