

文章编号: 1000-0887(1999) 07_0756_05

非稳态渗流的自由边界问题*

孙 鹰¹, 郭小明², 余颖禾²

(1. 工程兵工程学院, 南京 210007; 2 东南大学, 南京 210096)

(刘慈群推荐)

摘要: 随着经济建设的高速发展, 各种地下工程大量增加, 如水坝和高层建筑的基础、地铁和隧道、水井和油井等。那里, 介质中的渗流现象往往是工程单位需要考虑的重要问题。余颖禾等在《应用数学和力学》第 17 卷 6 期中曾经给出了具有自由边界的稳态渗流的变分不等式模式及有限元解。本文中, 以抽水井为例, 进一步研究了非稳态渗流问题的变分不等式模式及其有限元解法。结果表明, 对于非稳态的渗流问题, 这种方法同样能避免传统的自由边界的迭代过程, 为简单而快速地进行数值分析提供方便。

关键词: 渗流; 非稳态; 变分不等式

中图分类号: O357.3 文献标识码: A

1 非稳态可压缩井流的变分不等式模式

考虑一个均质、各向同性介质中的可压缩抽水井(如图 1)。其底板为水平隔水; 井半径为 r ; 井内水位为 $C(t)$; 与井中心的距离为 R 的界面是定水头边界, 其水头高为 b 。为减少符号, 这里将一般三维空间里的 (r, z) 坐标的变量符号 r 和 z 分别用 x 和 y 来表示, 则无压水头可记 $u(x, y, t)$, 初始水头为 $u(x, y, 0) = b$ 。设自由水面的位置为 $y = \phi(x, t)$ 。我们假设: $C(0) = b, 0 < C(t) \leq b, t \in [0, T], T > 0$ 是所研究的渗透过程的时间域。

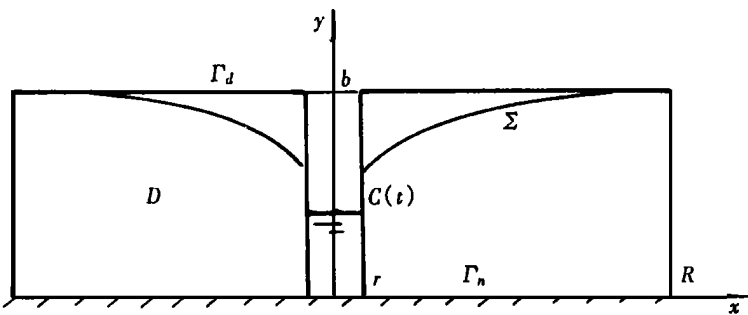


图 1 抽水井剖面

众所周知, 在上述假定下, 非稳态可压缩井流的轴对称自由边界问题的数学提法如下:

问题 I:

寻找一个三元组 $\{\phi, \Omega, u\}$, 使得:

* 收稿日期: 1997_10_21; 修订日期: 1999_04_07

作者简介: 孙鹰(1966~), 女, 讲师, 已发表论文 3 篇。

1) $\phi(x, t)$ 是 $[r, R] \times [0, T]$ 上的正则函数, 它满足:

$$\left. \begin{aligned} 0 < \phi(x, t) \leq b \quad ((x, t) \in [r, R] \times [0, T]), \\ \phi(r, t) \geq C(t) \quad ((x, t) \in [0, T]), \\ \phi(R, t) = b \quad (t \in [0, T]), \\ \phi(x, 0) \quad (x \in [r, R]); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2) $\Omega = \{(x, y, t); r < x < R, 0 < t < T, 0 < y < \phi(x, t)\};$ (2)

3) $u(x, y, t)$ 是 Ω 上的正则函数, 它满足以下的轴对称非稳态连续方程、边界条件与初始条件:

$$Eu \equiv (xu_x)_x + xu_{yy} - kxu_t = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}), \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u(r, y, t) = C(t), \quad 0 \leq y \leq C(t) \quad (0 < t \leq T), \\ u(r, y, t) = y, \quad C(t) < y \leq \phi(r, t) \quad (0 < t \leq T), \\ u(R, y, t) = b \quad (0 \leq y \leq b, 0 < t \leq T), \\ u_y(x, 0, t) = 0 \quad (r < x < R, 0 < t \leq T), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) = y, \quad (\Sigma), \\ u_x^2 + u_y^2 - u_t = ku_t, \quad (\Sigma), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中, Σ 是浸润区的自由边界:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma = \{(x, y, t); (r < x < R, 0 < t < T, y = \phi(x, t))\}, \\ u(x, y, 0) = b, (r \leq x \leq R, 0 \leq y \leq b), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

下面引入几个记号:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y); r < x < R, 0 < y < b\}, \\ \Gamma_n &= \{(x, y); r < x < R, y = 0\}, \\ \Gamma_d &= \partial D \setminus \Gamma_n, \\ Q &= D \times (0, T), \\ Q_1 &= \{(x, y, t); r < x < R, 0 < t < T, 0 < y < b + T - t\}, \end{aligned}$$

定义下面的函数:

$$\begin{cases} g_1(y, t) = \int_0^t [C(\tau) - (y + t - \tau)]^+ d\tau + z(y + t), \\ g_2(y, t) = \int_0^t [b - (y + t - \tau)]^+ d\tau + z(y + t), \\ G(x, y, t) = g_1 + \frac{x-r}{R-r}(g_2 - g_1), \end{cases}$$

其中: $z(\lambda) = \frac{1}{2}[(b - \lambda)^+]^2 \quad (\lambda \in R),$

再定义双线型

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_D x \nabla u \nabla v dx dy + \int_{\Gamma_n} x Y_0 u Y_0 v dx, \\ b(u, v) = \int_{\Gamma_n} x (\Gamma_0 u)_x (Y_0 v)_x dx, \\ (u, v) = \int_D uv dx dy, \end{cases} \quad (7)$$

Y_0 是到 Γ_n 上的迹算子.

假设 $\{\phi, \Omega, u\}$ 是问题 I 的古典解, 将 u 作如下的延拓:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \begin{cases} u(x, y, t) & ((x, y, t) \in \bar{\Omega}) \\ y & ((x, y, t) \in \bar{Q}_1 / \bar{\Omega}) \end{cases}$$

通过下面的一个 Torelli 变换^[2]

$$\tilde{w} = \int_0^t \left\{ \tilde{u}(x, y + t - \tau, \tau) - (y + t - \tau) \right\} d\tau, \quad (8)$$

令:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \tilde{w}(x, y, t) + z(y + t), \\ K(t) &= \left\{ v \in H^1(D); v = G \text{ 在 } \Gamma_d \text{ 上, } \forall_0 v \in H^1(\Gamma_n) \right\}, \end{aligned}$$

可以将问题 I 的弱型归结为如下的一个发展型变分不等式^[1]:

问题 II:

找 \bar{Q} 上的函数 $w(x, y, t) \in K(t)$, 满足

$$w \in L^\infty(0, T, H^1(D)), \forall_0 w \in L^\infty(0, T, H^1(\Gamma_n)),$$

$$w_t \in L^2(0, T, H^1(D)) \cap L^\infty(0, T, L^2(D)),$$

$$w(x, y, 0) = z(y),$$

$$\begin{aligned} (xw_t, v - w) + a(w, v - w) + b \left[\int_0^t w(\tau) d\tau, v - w \right] + (x, v^+ - w^+) \geq \\ - \int_{\Gamma_n} xq \forall_0(v - w) dx \quad (\forall v \in K(t), \text{ a. e. } t \in [0, T]). \end{aligned}$$

$$\text{其中 } q = z'(0) - z(0) = -b - \frac{b^2}{2}.$$

可以证明^[1]: 问题 I 的解存在且唯一; 其有限元解收敛. 这就是非稳态可压缩井流自由边界问题的变分不等式模式.

2 非稳态渗流的有限元离散格式

由于时间域具有无限延伸的性质, 如果将方程对时间和空间作统一的离散, 势必导致过大的求解规模. 因此, 按照习惯的作法, 本文仍采用分离变量的办法, 对空间坐标与时间坐标时行分别处理.

首先进行空间域的离散化. 图 1 所示抽水井是个轴对称问题, 实际上可化为二维问题来处理. 将整个剖面可能与渗流有关的区域 D 划分成有限个单元, 各单元区域记为 D_e . 对单元内的函数 $w(r, t)$ 用型函数 N 进行插值, 即

$$w(r, t) = NW^e(t). \quad (9)$$

通过对上节的变分不等式模式的讨论可以证明, 与问题 II 等价的泛函极值问题为求 $w \in K(t)$, 使 $J(w) = \inf_{v \in K(t)} J(v)$,

其中

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + (xv_t, v) + b \left[\int_0^t v(\tau) d\tau, v \right] + (x, v) + \int_{\Gamma_n} xq \forall_0 v dx.$$

考虑到底板是水平隔水面, 其节点可视为内部点, 只需计及属一类条件的 Γ_d 边界, 这时在 D_e 上的泛函应简化为:

$$J_e(w) = \int_{D_e} \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial t} w + w \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} x dx dy. \quad (10)$$

将(9)式代入(10)式, 再由泛函 $J(w)$ 的驻值条件 $\delta J = 0$ 可得:

$$\sum_e \left(\frac{\partial J_e}{\partial w} \right) = 0 \tag{11}$$

而 $\frac{\partial J_e}{\partial w} = C_e w(t) + K_e w(t) - f_e$

由条件(11)可导出一般的有限元求解的正则方程

$$C_w(t) + K_w(t) = f \tag{12}$$

系数矩阵和右端项为: $C = \sum_e C_e, K = \sum_e K_e, f = \sum_e f_e$,

单元系数阵与右端项的元素为:

$$C_e = \iint_{D_e} N^T N x \, dx \, dy,$$

$$K_e = \iint_{D_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial}{\partial x} N + \frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial}{\partial y} N \right] x \, dx \, dy,$$

$$f_e = - \iint_{D_e} N^T x \, dx \, dy \cdot$$

接下来,可采用各种不同的计算格式再对时间域进行离散化,例如可用各种显式和隐式的差分格式等。本文是利用了变步长时域有限元的递推格式^[3]求解方程(12),算出各时刻的各节点的 $w(t)$ 值。与稳态渗流问题类似^[4],这里可直接确定各个瞬时的自由边界曲线,从而免去了事先假设边界形态再反复迭代的过程。

3 抽水井算例

考察图2所示的抽水井,其几何参数为:

$$r = 4.8, R = 76.8, b = 48.0$$

$$\text{设 } C(t) = -0.36t + 48 \quad (0 \leq t \leq 50),$$

$$C(t) = 0.0018(t - 150)^2 + 12 \quad (50 \leq t \leq 150),$$

$$C(t) = 12 \quad (150 < t)$$

本文中,作者对整个区域 D 进行单元剖分,总共分为40个二次等参元,每个瞬时的自由边界均由前期结果直接算出,无需迭代。其计算结果见表1,介质内液体的浸润线(即自由边界)的变化过程在图2中给出。它与文^[1]中所引用的计算结果很接近,但该算例是用了384个单元且经过迭代才得出的。

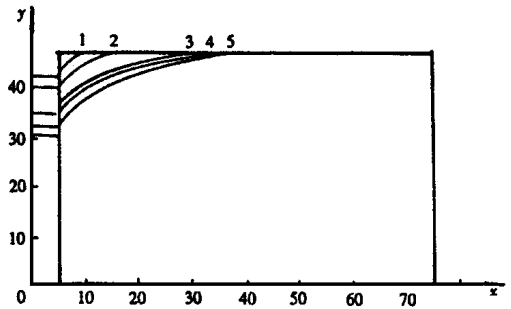


图2 抽水井浸润线变化

表1 浸润线高度 y 的计算结果

| y | x = 7.61 | x = 12.09 | x = 19.02 | x = 30.47 | x = 43.38 |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 t = 25Δt | 42.0 | 48.0 | 48.0 | 48.0 | 48.0 |
| 2 t = 50Δt | 40.5 | 45.0 | 46.5 | 48.0 | 48.0 |
| 3 t = 75Δt | 36.0 | 40.0 | 43.5 | 45.0 | 48.0 |
| 4 t = 100Δt | 33.0 | 37.5 | 42.0 | 45.0 | 48.0 |
| 5 t = 125Δt | 31.5 | 36.0 | 40.5 | 45.0 | 48.0 |

4 结 论

研究表明, 与稳态渗流问题一样, 对于非稳态渗流的自由边界问题建立一个变分不等式模式同样是比较合理的, 它给各种具有不定边界的非稳态的物理过程提供了一个新的、可靠的数学模型, 为直接确定其各瞬时的自由边界提供了理论依据。

用有限元法进行轴对称瞬态渗流分析时, 只需对于整个对称面的有关部分作单元剖分, 各瞬时的自由表面位置均可直接算出, 避免了传统的迭代过程。

[参 考 文 献]

- [1] Huang S, Zhou C. Numerical solution of non_steady state porous flow free boundary problems[J]. Journal of Computational Mathematics, 1985, 3(1): 72~ 89.
- [2] Torelli A. On a free boundary value problem connected with a non_steady filtration phenomenon[J]. Ann Scu Norm Sup Prsa, 1977, 4(1): 33~ 59.
- [3] 张柔雷, 余颖禾. 用变步长有限元法求解暂态温度场[J]. 南京工学院学报, 1984, 14(2): 1~ 10.
- [4] 余颖禾, 孙鹰, 郭小明. 具有自由边界的二维渗流问题[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(6): 523~ 527.

Free Boundary Problem of Non-Steady State Seepage Flow

Sun Ying¹, Guo Xiaoming², She Yinghe²

(1. Nanjing Engineering Institute, Nanjing 210007, P R China;

2 Southeast University, Nanjing 210096, P R China)

Abstract: Along with the vigorous developing construction, the number of various underground engineerings is greatly increasing, such as the foundations of dams and high-rise multistored houses, the subways and the tunnels, the water and oil wells etc., where the close attention is always paid to the seepage behaviour in the media around the structures. In Appl. Math Mech. 1996, 17(6), the variational inequality formulation and its FEM solution for the free boundary problem of 2D steady state seepage flow was given by She Yinghe et al. In this paper a further investigation is made on the non-steady state seepage problem, by taking the seepage flow of wells as an example. The presented approach—variational inequality and its FEM solution—is also very beneficial to the non-steady state problems, where the transient free boundary can also be defined directly without conventional iterations.

Key words: seepage; non-steady state; variational inequality