应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 07_0682_09

关于 Kuramoto_Sivashinsky 方程的吸收集半径*

王冠香[1], 刘曾荣[2]

(1. 北京大学 数学科学学院, 北京 100871; 2 上海大学 数学系, 上海 201800)

摘要: 给出了 Kuramoto_Sivashinsky 方程吸收集半径的优化估计• 证明了, 当粘性系数趋向某临界值时, 吸收集半径将趋于零• 这与已有结果比更符合物理直观•

关 键 词: K_S 方程; 一致估计; 吸收集
中图分类号: O175.2 文献标识码: A

1 引言和主要定理

我们知道, 惯性流形是把无穷维系统约化为有穷维系统的有力工具• 但一般来说, 惯性流形的存在性和吸收性要求很强的谱条件• 这使得可获得的惯性流形的维数很大• 由于没有有效的处理特大维动力学系统的方法, 对约化后系统的动力学讨论仍然是很困难的• 这样, 尽可能降低惯性流形的维数是必要的, 对于给定的系统, 惯性流形的维数主要由吸收集半径, 也就是解的一致界决定• 解的估计越严格, 惯性流形的维数越低• 本文以 Kuramoto_Sivashinsky 方程为例, 在此方面作了些尝试• 作为内在不稳定性的典型模型, Kuramoto_Sivashinsky(K_S) 方程

$$u_t + \alpha\Delta^2 u + \Delta u + u \cdot \nabla u = 0,$$

具有很多的物理背景: Kuramoto 和 Tsuzuki[1] (1975) 在研究空间三维 Belousov_Zhabotinski 型反应扩散系统的角_相位湍流时导出此方程; Sivashinsky[2] (1977) 在研究空间二维层焰面的微热扩散不稳定性时导出此方程; 此方程还在其他许多领域被导出(如见[3])• 无论是物理背景还是 K_S 方程自身都显示出包括混沌的非平凡的时空动力学行为(如见[4,5])• 深入研究 K_S 方程的动力学行为很有意义• 考虑一维 K_S 系统

$$u_t + \alpha u_{x^4} + u_{x^2} + u u_x = 0 \qquad ((x,t) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^+,\ \alpha > 0), \tag{1}$$

$$u(x,t) = u(x + 2\pi, t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_0(x) = -u_0(-x), \tag{3}$$

$$\int_0^{2\pi} u(x,t)\,dx = 0, \tag{4}$$

其中, $u_{x^i} \equiv \dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, \cdots$, $\alpha > 0$ 是粘性系数, 应当指出, 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, (1) ~ (4) 的所有解

* 收稿日期: 1998_09_07; 修订日期: 1999_05_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872044)
作者简介: 王冠香(1964~), 男, 博士, 研究方向: 微分方程, 动力系统, 已发表论文 10 余篇.

都将随时间的增加而趋于零,即 $\alpha=1$ 是参数临界值• 所以这里限制参数 α 的范围为 $(0,1)$• 关于(1) ~ (4) 的解的估计已有一些结果(见[6,7,8])• 但是在已有的估计中,当 $\alpha\to 1\_$ 时,吸收集半径将趋于某大数,这显然与当 $\alpha\geqslant 1$ 时吸收集半径为零的事实不符• 本文解决了这种不相符性• 记 $L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$, $H^1_{\text{per}}(0,2\pi)$ 为通常的Sobolev 空间, $\|\cdot\|$ 为 L^2 模• 本文的主要结果为

定理 设(3) 中的初始条件满足 $\|u_0\|\leqslant r$, 其相应的(1) ~ (4) 的解记为 $u(x,t)$, 则对于 $\alpha\in[0.088,1]$ 存在 $t^*(r)>0$ 使得

$$\|u\|\leqslant\rho_0,\ \|u_x\|\leqslant\rho_1\qquad(\text{当 } t\geqslant t^*(r)),$$

其中

$$\rho_0\equiv\rho_0(\alpha)<50\sqrt{2}\alpha^{-\frac{3}{4}}(1-\alpha)^{\frac{1}{2}},\tag{5}$$

$$\rho_1\equiv\min\left\{\rho_{11},\rho_{12}\right\},\ \rho_{11}\equiv 8\left(\frac{1+\sqrt{\frac{\pi}{6}\rho_0}}{3\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}\rho_0,\ \rho_{12}\equiv\max\left\{\left(\frac{7}{\alpha}\right)^{\frac{2}{5}}\rho_0^{\frac{7}{5}},\quad\left(\frac{7}{2\alpha^3}\right)^{\frac{1}{6}}\rho_0\right\}•\tag{6}$$

也就是说,球

$$\left\{u\in H^1_{\text{per}}(0,2\pi):\|u\|\leqslant\rho_0,\ \|u_x\|\leqslant\rho_1\right\},$$

是K_S 方程的吸收集•

2 定理的证明

定理的证明包括若干引理,首先,解释一下所用方法的抽象框架• 在方程(1) 中,令

$$u(x,t)=v(x,t)+\varphi(x),\tag{7}$$

其中 $\varphi(x)$ 是一个适当选取的 2π 周期的奇函数,方程(1) 变为

$$v_t+\alpha v_{x^4}+u_{x^2}+\varphi v_x+v\varphi_x=-[\alpha\varphi_{x^4}+\varphi_{x^2}+\varphi\varphi_x]•\tag{8}$$

记(8) 的右端为 $\Phi(x)$ 并用 v 对(8) 在 $L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$ 中作内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2+\alpha\|v_{x^2}\|^2-\|v_x\|^2+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi_x v^2\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\Phi v\mathrm{d}x•\tag{9}$$

如果将 $v(x,t)$ 写成付立叶(Fourier) 级数的形式(考虑条件(9)(10))

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)\sin kx•\tag{10}$$

则据付立叶(Fourier) 级数的正交性易得

$$\|v\|^2=\pi\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2,\qquad\|v_{x^i}\|^2=\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^{2i}a_k^2(i=1,2,\cdots)•\tag{11}$$

这样,(9) 成为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2+\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\alpha k^2-1)a_k^2+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi_x v^2\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\Phi(x)v\mathrm{d}x•\tag{12}$$

又由于

$$\|u\|\leqslant\|v\|+\|\varphi\|•\tag{13}$$

所以通过适当选取 $\varphi(x)$ 可以得到 $\|v\|$ 的一致估计,从而得到 $\|u\|$ 的一致估计•

引理1 令(3) 中的 $u_0(x)$ 满足 $\|u_0\|\leqslant r$, 相应的(1) ~ (4) 的解为 $u(x,t)$• 则存在 $t_1^*(r)>0$ 使得

$$\|u\|\leqslant\rho_{01}\qquad\left(\text{当 } t\geqslant t_1^*(r)\text{ 和 }\alpha\in\left(\frac{5}{17},1\right)\right),$$

其中

$$\rho_{01} = 4\sqrt{\pi}(1-\alpha)\left\{1 + 4\sqrt{\frac{2}{\beta_1}}\mathrm{SQR}\left[\frac{(1-4\alpha)^2}{17\alpha-5} + \frac{(1-\alpha)^2}{261\alpha-21}\right]\right\}, \tag{14}$$

$$\beta_1 = \min_{\alpha\in(5/17,1)}\left\{1-\alpha, 17\alpha-5, 36(5\alpha-1), 261\alpha-21\right\}. \tag{15}$$

且SQR表示平方根.

证明　取 $\varphi(x) = -4(1-\alpha)\sin 2x$, 即 $\varphi_x = -8(1-\alpha)\cos 2x$, 则据(12), 基本运算可得

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}k^2(\alpha k^2-1)a_k^2 + 2(1-\alpha)a_1^2 - 4(1-\alpha)\sum_{j=1}^{\infty}a_ja_{j+2} = -\left\{8(2-8\alpha)(1-\alpha)a_2 + 16(1-\alpha)^2a_4\right\}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2 + (1-\alpha)a_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty}k^2(\alpha k^2-1)a_k^2 - 4(1-\alpha)a_1a_3 - 4(1-\alpha)\sum_{j=2}^{\infty}a_ja_{j+2} = -\left\{16(1-4\alpha)(1-\alpha)a_2 + 16(1-\alpha)^2a_4\right\}. \tag{17}$$

据柯西不等式

$$4(1-\alpha)a_1a_3 \leqslant \frac{1-\alpha}{2}a_1^2 + 8(1-\alpha)a_3^2,$$

$$4(1-\alpha)\sum_{j=2}^{\infty}a_ja_{j+2} \leqslant (1-\alpha)\sum_{j=2}^{\infty}a_j^2 + 4(1-\alpha)\sum_{j=4}^{\infty}a_j^2 = (1-\alpha)(a_2^2+a_3^2) + 5(1-\alpha)\sum_{j=4}^{\infty}a_j^2.$$

所以据(17)得

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2 + \frac{1-\alpha}{2}a_1^2 + (17\alpha-5)a_2^2 + 18(5\alpha-1)a_3^2 + (261\alpha-21)\sum_{j=4}^{\infty}a_j^2 \leqslant 16(4\alpha-1)(1-\alpha)|a_2| + 16(1-\alpha)^2|a_4|,$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2 + (1-\alpha)a_1^2 + (17\alpha-5)a_2^2 + 36(5\alpha-1)a_3^2 + (261\alpha-21)\sum_{j=4}^{\infty}a_j^2 \leqslant 16^2(1-\alpha)^2\left\{\frac{(4\alpha-1)^2}{17\alpha-5} + \frac{(1-\alpha)^2}{261\alpha-21}\right\}. \tag{18}$$

令

$$\beta_1 = \min\left\{1-\alpha, 17\alpha-5, 36(5\alpha-1), 261\alpha-21\right\}. \tag{19}$$

显然, $\beta_1 > 0$ 只要 $\alpha\in(5/17,1)$, 现据(18)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2 + \beta_1\|v\|^2 \leqslant \pi 16^2(1-\alpha)^2\left[\frac{(4\alpha-1)^2}{17\alpha-5} + \frac{(1-\alpha)^2}{261\alpha-21}\right]. \tag{20}$$

据Gronwall 不等式, 存在 $t_1^*(r) > 0$ 使得

$$\|v\| \leqslant 16(1-\alpha)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta_1}}\mathrm{SQR}\left\{\frac{(4\alpha-1)^2}{17\alpha-5} + \frac{(1-\alpha)^2}{261\alpha-21}\right\}\quad(\text{当 } t\geqslant t_1^*), \tag{21}$$

另一方面, 根据 $\varphi(x)$ 的选择有

$$\|\varphi\| = 4\sqrt{\pi}(1-\alpha). \tag{22}$$

结合(21)(22)(13), 引理1证毕.

类似地, 通过 $\varphi(x)$ 的不同选取和更复杂的运算, 可得不同参数区间上的其他四个引理(引理2_5), 为简洁起见, 略去证明细节.

引理2　令(3)中的 $u_0(x)$ 满足 $\|u_0\| \leqslant r$, 相应的(1) ~ (4) 的解为 $u(x,t)$, 则存在

$t_2^*(r) > 0$ 使得

$$\|u\| \leqslant \rho_{02} \qquad (\text{当 } t \geqslant t_2^* \text{ 和 } \alpha \in (0.1717, 1)),$$

其中

$$\rho_{02} = 2\sqrt{5\pi}(1-\alpha) + 8(1-\alpha)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta_2}\mathrm{SQR}\left\{(7\alpha-1)^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{2418\alpha-66} + \frac{36(7\alpha-1)(11\alpha-1)^2}{1791\alpha^2-360\alpha+9} + \frac{9(7\alpha-1)(1-\alpha)^2}{9127\alpha^2-1604\alpha+37}\right\}}, \tag{23}$$

$$\beta_2 = \min_{\alpha\in(0.1717,1)}\left\{1-\alpha, 7\alpha-1, 4(41\alpha-5), \frac{1791\alpha^2-360\alpha+9}{7\alpha-1}, 2(642\alpha-42), \frac{9127\alpha^2-1604\alpha+37}{7\alpha-1}, 2418\alpha-66\right\}. \tag{24}$$

证明　如果取 $\varphi(x) = -4(1-\alpha)\sin 2x - 2(1-\alpha)\sin 4x$ 则可得(23). (Q.E.D)

引理3　令(3)中的 $u_0(x)$ 满足 $\|u_0\| \leqslant r$, 相应的(1)～(4)的解为 $u(x,t)$, 则存在 $t_3^*(r) > 0$ 使得

$$\|u\| \leqslant \rho_{03} \qquad (\text{当 } t \geqslant t_3^* \text{ 和 } \alpha \in (0.2529, 1)),$$

其中

$$\rho_{03} = 2\sqrt{\pi} + 8(4\alpha-1)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta_3}\mathrm{SQR}\left\{\frac{124\alpha-7}{1984\alpha^2-608\alpha+27}\right\}}, \tag{25}$$

$$\beta_3 = \min_{\alpha\in(0.2529,1)}\left\{\alpha, 8\alpha-2, \frac{2(73\alpha^2-7\alpha-2)}{\alpha}, \frac{1984\alpha^2-608\alpha+2}{8\alpha-2}\right\}. \tag{26}$$

证明　如果取 $\varphi(x) = -2\sin 2x$ 则可得(25). (Q.E.D)

注2.1　引理1和引理2中的 $\varphi(x)$ 都只含有一项, 但它们导致不同的结果. 我们这样做, 是为了使 $L^2_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ 中的吸收集半径尽可能的小(见(31)). 类似情况也出现在引理3和引理4中. 但是, 要想在所有可能的 $\varphi(x)$ 的选取中取得一致估计的最小值, 是不可能的. 事实上, 这样的最小估计的存在性是未知的. 也许这里获得的估计不是最优的, 但却是令人满意的(见(31)).

引理4　令(3)中的 $u_0(x)$ 满足 $\|u_0\| \leqslant r$, 相应的(1)～(4)的解为 $u(x,t)$, 则存在 $t_4^*(r) > 0$ 使得

$$\|u\| \leqslant \rho_{04} \qquad (\text{当 } t \geqslant t_4^* \text{ 和 } \alpha \in (0.1434, 1)),$$

其中

$$\rho_{04} = 3\sqrt{5\pi} + \mathrm{SQR}\left\{\frac{2\pi}{\beta_4}\left[72(16\alpha-1)^2 + \frac{288(7-64\alpha)^2(16\alpha-1)}{6896\alpha^2-799\alpha-49} + \frac{2(16\alpha-1)(9\alpha-1)54^2}{36158\alpha^3-7184\alpha^2+3310\alpha+17} + \frac{648(9\alpha-1)}{42489\alpha^2-5522\alpha+73}\right]\right\}, \tag{27}$$

$$\beta_4 = \min_{\alpha\in(0.1434,1)}\left\{\alpha+2, \frac{16\alpha-1}{2}, 9(9\alpha-1), \frac{6896\alpha^2-799\alpha-49}{32\alpha-2}, \frac{10521\alpha^3+19342\alpha^2-3205\alpha+116}{(\alpha+2)(9\alpha-1)}, \frac{42489\alpha^2-5522\alpha+73}{18\alpha-2}, \frac{361584\alpha^2-71847\alpha^2+3310\alpha+17}{2(16\alpha-1)(9\alpha-1)}\right\}. \tag{28}$$

证明　若取 $\varphi(x) = -6\sin 2x - 3\sin 4x$ 则可得(27). (Q.E.D)

引理5　令(3)中的 $u_0(x)$ 满足 $\|u_0\| \leqslant r$, 相应的(1)～(4)的解为 $u(x,t)$, 则存在 $t_5^*(r) > 0$ 使得

$$\|u\| \leqslant \rho_{05} \quad (当\ t \geqslant t_5^* \ 和\ \alpha \in [0.088, 1)),$$

其中

$$\rho_{05} = 20\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{16}+\sqrt{\frac{2\pi}{\beta_5}}\mathrm{SQR}\left\{\frac{\phi_2^2}{\eta_2}+\frac{\phi_4^2}{\eta_4}+\frac{\phi_6^2}{\eta_6}+\frac{\phi_8^2}{\eta_8}+\frac{\phi_{10}^2+\phi_{12}^2}{\eta_{10}}\right\}}, \tag{29}$$

$$\beta_5 = \min_{\alpha \in (0.088, 1)}\{2\eta_1, \eta_2, 2\eta_3, \eta_4, 2\eta_5, \eta_6, 2\eta_7, \eta_8, 2\eta_9, \eta_{10}\}, \tag{30}$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha+4}{2}, \quad \eta_2 = \frac{16\alpha+1}{2}, \quad \eta_3 = \frac{81\alpha-4}{2},$$

$$\eta_4 = 8(16\alpha-1), \quad \eta_5 = 497\alpha-17-\frac{250}{3(81\alpha-4)},$$

$$\eta_6 = 1168\alpha-28-\frac{75}{16\alpha+1}-\frac{125}{24(16\alpha-1)},$$

$$\eta_7 = 2273\alpha-41-\frac{50}{\alpha+4}-\frac{125}{48(16\alpha-1)},$$

$$\eta_8 = 3968\alpha-56-\frac{150}{16\alpha+1}-\frac{625}{48(16\alpha-1)},$$

$$\eta_9 = 6433\alpha-73-\frac{250}{81\alpha-4}-\frac{625}{48(16\alpha-1)},$$

$$\eta_{10} = 9872\alpha-92-\frac{1375}{48(16\alpha-1)},$$

$$\phi_2 = \frac{80}{3}(1+6\alpha), \quad \phi_4 = \frac{20}{3}(17-192\alpha),$$

$$\phi_6 = 270(16\alpha-1), \quad \phi_8 = \frac{550}{3}, \quad \phi_{10} = \frac{250}{3}, \quad \phi_{12} = \frac{100}{3}.$$

证明　若取 $\varphi(x) = -10\sin 2x - 5\sin 4x - \frac{10}{3}\sin 6x$ 则可得(29)•（Q.E.D）

综上引理, 若在各公共参数区间上取 $\rho_{0i}(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 的最小值为 ρ_0, 即

$$\rho_0(\alpha) = \begin{cases} \min(\rho_{01}, \rho_{03}) & \left(\alpha \in \left(\frac{5}{17}, 1\right)\right), \\ \min(\rho_{02}, \rho_{03}) & \left(\alpha \in \left[0.2529, \frac{5}{17}\right]\right), \\ \min(\rho_{02}, \rho_{04}) & (\alpha \in (0.1717, 0.2529)), \\ \rho_{04} & (\alpha \in [0.1434, 0.1717]), \\ \rho_{05} & (\alpha \in [0.088, 0.1434]). \end{cases}$$

则借助计算机运算, 可得

$$\rho_0(\alpha) < 50\sqrt{2}(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}\alpha^{-\frac{3}{4}} \quad (当\ \alpha \in [0.088, 1]\ 和\ t \geqslant t_0^*), \tag{31}$$

其中　$t_0^* = \max\{t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*\}$•　这样, 证明了定理的前半部分•

注 2.2　(31) 中的因子 $(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ 是保证对不靠近零的 α, 相应的 $\rho_0(\alpha)$ 较小的关键•　它还保证, 当 $\alpha \to 1\_$ 时, $\rho_0(\alpha) \to 0$•

定理第二部分的证明分两步, 即引理 6 和引理 7•　事实上, 它们是两种不同方法获得的不同结果•　为优化估计, 取它们的最小值•　首先给出如下要用的命题•

命题 1　设 $u \in \dot{H}^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$, 则 $\|u\|_{L^\infty} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}}\|u_x\|$•　进一步, 若 $u(x, t) = -u(-x,$

$t)$ (或 $u(x,t)=u(-x,t)$)

则

$$\|u\|_{L^\infty}\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{6}}\|u_x\|. \tag{32}$$

证明 将 $u(x,t)$ 展开成付立叶级数形式

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(t)\sin kx+b_k(t)\cos kx).$$

据 Minkowskin 不等式

$$\|u\|_{L^\infty}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)\leqslant\left\{\pi\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|^2k^2\right\}^{\frac12}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\right\}^{\frac12}\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left\{2\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)k^2\right\}^{\frac12}=\sqrt{\frac{\pi}{3}}\|u_x\|.$$

如 $u(x,t)=-u(-x,t)$ 则 $b_k=0$, 故(32) 成立. 命题得证. (Q.E.D)

引理 6 设 $u_0(x)\in\left\{u:\|u\|\leqslant\rho_0\right\}\subset L^2_{\rm per}(0,2\pi)$, 其相应的(1) ~ (4) 的解为 $u(x,t)$, 则存在 $t_6^*(\rho_0)>0$ 使得

$$\|u_x\|\leqslant\rho_1=8\left(\frac{1+\sqrt{\frac{\pi}{6}}\rho_0}{3\alpha}\right)^{\frac32}\rho_0\qquad(\text{当 } t\geqslant t_6^*). \tag{33}$$

证明 上述引理说明$\left\{\|u\|\leqslant\rho_0\right\}\subset L^2_{\rm per}(0,2\pi)$ 是不变集. 也就是说, 如果 $\|u_0\|\leqslant\rho_0$ 则 $\|u(t)\|\leqslant\rho_0$, $t\geqslant0$. 以 u_{x^2} 与(1) 式作内积并考虑到边界条件, 可得

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|u_x\|^2+\alpha\|u_{x^3}\|^2\leqslant\|u_{x^2}\|^2+\left|\int_0^{2\pi}uu_xu_{x^2}\mathrm dx\right|\leqslant$$

$$\|u_{x^2}\|^2+|u|_{L^\infty}\|u_x\|\|u_{x^2}\|\leqslant(\text{按}(33))\leqslant$$

$$\|u_{x^2}\|^2+\sqrt{\frac{\pi}{6}}\|u_x\|^2\|u_{x^2}\|. \tag{34}$$

据内插不等式

$$\|u_x\|^2\leqslant\|u\|\|u_{x^2}\|,\ \|u_{x^2}\|^2\leqslant\|u_x\|\|u_{x^3}\|,$$

有

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|u_x\|^2+\alpha\|u_{x^3}\|^2\leqslant\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{6}}\|u\|\right)\|u\|^{\frac23}\|u_{x^3}\|^{\frac43}. \tag{35}$$

据 Cauchy 不等式

$$\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{6}}\|u\|\right)\|u\|^{\frac23}\|u_{x^3}\|^{\frac43}\leqslant\frac{\alpha}{2}\|u_{x^5}\|^2+\frac{16}{27\alpha^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{6}}\|u\|\right)^3\|u\|^2, \tag{36}$$

将(36) 带入(35) 并注意到 $\|u\|\leqslant\rho_0$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|u_x\|^2+\alpha\|u_{x^3}\|^2\leqslant\frac{32}{27\alpha^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{6}}\rho_0\right)^3\rho_0^2,$$

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|u_x\|^2+\alpha\|u_x\|^2\leqslant\frac{32}{27\alpha^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{6}}\rho_0\right)^3\rho_0^2, \tag{37}$$

这里用到了 $\|u_x\|\leqslant\|u_{x^3}\|$. 对(37) 式使用 Gronwall 不等式, 则引理得证. (Q.E.D)

引理 7 设 $u_0(x)\in\left\{u:\|u\|\leqslant\rho_0\right\}\subset L^2_{\rm per}(0,2\pi)$, 其相应的(1) ~ (4) 的解为 $u(x,t)$.

则

$$\| u_x \| \leqslant \rho_{12} \equiv \max\left\{\left(\frac{7}{\alpha}\right)^{\frac{2}{5}} \rho_0^{\frac{7}{5}}, \left(\frac{2}{\alpha^3}\right)^{\frac{1}{6}} \rho_0\right\}. \tag{38}$$

证明　不失一般性, 设 $\| u \| > 0$. 事实上, 若有时刻 $t > 0$ 使 $\| u \| = 0$ 则 u 是 K_S 方程的平凡解. 由(34) 我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x \|^2 + \alpha \| u_{x^3} \|^2 \leqslant \| u_{x^2} \|^2 + | u |_{L^\infty} \| u_x \| \| u_{x^2} \|. \tag{39}$$

现在对(39) 使用如下一维 Agmog 不等式而不是命题 1,

$$| u |_{L^\infty} \leqslant \| u \|^{\frac{1}{2}} \| u_x \|^{\frac{1}{2}}, \tag{40}$$

则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x \|^2 + \alpha \| u_{x^3} \|^2 \leqslant \| u_{x^2} \|^2 + \| u \|^{\frac{1}{2}} \| u_x \|^{\frac{3}{2}} \| u_{x^2} \|. \tag{41}$$

据内插不等式有

$$\| u_x \| \leqslant \| u \|^{\frac{1}{2}} \| u_{x^2} \|^{\frac{1}{2}} \leqslant \| u \|^{\frac{1}{2}} \| u_x \|^{\frac{1}{4}} \| u_{x^3} \|^{\frac{1}{4}},$$

$$\| u_x \| \leqslant \| u \|^{\frac{2}{3}} \| u_{x^2} \|^{\frac{1}{3}}, \tag{42}$$

$$\| u_{x^2} \| \leqslant \| u \|^{\frac{1}{3}} \| u_{x^3} \|^{\frac{2}{3}}. \tag{43}$$

将(42) (43) 代入(41) 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x \|^2 + \alpha \| u_{x^3} \|^2 \leqslant \| u \|^{2/3} \| u_{x^3} \|^{4/3} + \| u \|^{11/6} \| u_{x^3} \|^{7/6}. \tag{44}$$

再次使用 Cauchy 不等式得

$$\| u \|^{\frac{2}{3}} \| u_{x^3} \|^{\frac{4}{3}} \leqslant \frac{2}{3}\alpha \| u_{x^3} \|^2 + \frac{1}{3\alpha^2} \| u \|^2, \tag{45}$$

故

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x \|^2 + \frac{\alpha}{3} \| u_{x^3} \|^2 - \frac{1}{3\alpha^2} \| u \|^2 - \| u \|^{11/6} \| u_{x^5} \|^{7/6} \leqslant 0. \tag{46}$$

现令

$$f(y) = \frac{\alpha}{3} y - \frac{1}{3\alpha^2} \| u \|^2 - \| u \|^{11/6} y^{7/12}, \tag{47}$$

则易见, 若

$$y \geqslant y_0 \equiv \left(\frac{7}{4\alpha}\right)^{12/5} \| u \|^{22/6}. \tag{48}$$

则 $f(y)$ 递增. 令一方面, 由于

$$\| u_x \|^6 \leqslant \| u \|^3 \| u_{x^2} \|^3 \leqslant \| u \|^3 \| u_x \|^{\frac{3}{2}} \| u_{x^3} \|^{3/2}.$$

所以

$$\| u_{x^3} \|^2 \geqslant \frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4}, \tag{49}$$

亦即, 只要

$$\| u_x \| \geqslant \left(\frac{7}{4\alpha}\right)^{\frac{2}{5}} \| u^{\frac{7}{5}} \|. \tag{50}$$

则

$$\| u_{x^3} \|^2 \geqslant \frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4} \geqslant y_0. \tag{51}$$

显然，若

$$\| u_x \| \geqslant \left(\frac{7}{\alpha}\right)^{\frac{2}{5}} \| u \|^{\frac{7}{5}} . \tag{52}$$

则(50)仍然成立. 这样若(52)成立，则

$$f\left(\frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4}\right) = \frac{\alpha}{3} \frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4} - \frac{1}{3\alpha^2} \| u \|^2 - \| u \|^{11/6} \frac{\| u_x \|^{7/2}}{\| u \|^{7/3}} =$$

$$\frac{\alpha}{3} \frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4} - \frac{1}{3\alpha^2} \| u \|^2 - \frac{\| u_x \|^{7/2}}{\| u \|^{1/2}} \geqslant$$

$$\frac{\alpha}{3} \frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4} - \frac{1}{3\alpha^2} \| u \|^2 - \frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^{1/2}} \frac{\alpha}{7 \| u \|^{7/2}},$$

即

$$f\left(\frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4}\right) \geqslant \frac{4\alpha}{21} \frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4} - \frac{\| u \|^2}{3\alpha^2} . \tag{53}$$

若(52)之外，u 还满足

$$\| u_x \|^2 \geqslant \left(\frac{2}{\alpha^3}\right)^{1/6} \| u \|, \tag{54}$$

则

$$f\left(\frac{\| u_x \|^6}{\| u \|^4}\right) \geqslant \frac{1}{42\alpha} \| u_x \|^2 . \tag{55}$$

据$f(y)$ 的单调性和(46)，只要(52) 和(54) 成立，则

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_x \|^2 + \frac{1}{42\alpha} \| u_x \|^2 \leqslant 0 . \tag{56}$$

(56)表明，只要(52)和(54)成立，则 $\| u_x \|$ 将指数衰减. 如此引理得证. (Q. E. D)

注 2.3　引理 6 和引理 7 表明$\left\{ u : \| u_x \| \leqslant \min(\rho_{11}, \rho_{12}) \right\}$是$H^2_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ 中的吸收集.

据引理6~7，若令$t^* = t_0^* + t_6^*$ 则(33)(38) 证明了定理的后半部分.

注 2.4　在上述一致估计基础之上，K_S 方程惯性流形的维数将比以前的结果低得多. 文[9]已证，存在 N_0，对任意 $N \geqslant N_0$，K_S 方程存在唯一的 N 维惯性流形，其中，N_0 满足

$$\frac{4\rho_1 \mathrm{e}^{-1/2}}{\alpha(N+1)^2} + \frac{16}{3} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{\rho_1^2 \mathrm{e}^{-1/4}}{\alpha(N+1)^3} \leqslant b,$$

$$\frac{\alpha}{2(1+l)}[(N+1)^4 - N^4] - \left[(1+2L)N^2 + 4(1+L)\sqrt{\frac{\pi}{6}}\rho_1 N\right] -$$

$$\left[(1+2L)(N+1)^2 + 4(1+L)\sqrt{\frac{\pi}{6}}(N+1)\right] > 0 .$$

其中　$b, l \in (0, 1], L > 1$ 已知.

致谢　作者深切感谢姜礼尚教授的鼓励和指导!

[参　考　文　献]

[1]　Kuramoto Y, Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction_diffusion systems[J]. Prog Theor Phy, 1975, **54**(3): 687~699.

[2]　Sivashinsky G I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames——Ⅰ: derivation of basic equations[J]. Acta Astronautica, 1977, **4**(3): 1177~1206.

[3] Sivashinsky G I, Michelson D M. On irregular flow of a liquid film down a vertical flame[J]. Prog Theor Phys, 1980, **63**(6): 2112~ 2114.
[4] Michelson D M, Sivashinsky G I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames——Ⅱ: numerical experiments[J]. Acta Astronautica, 1977, **4**(3): 1206~ 1221.
[5] Kevredidis I G, Nicolaenko B, Scovel J C. Back in sablle again: a computer assisted study of the Kuramoto_Sivashinsky equation[J]. SIAM J Appl Math, 1990, **50**(3): 760~ 790.
[6] Licolaenko B, Scheurer B, Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto_Sivashinsky equation: Nonlinear stability and attractors[J]. Physica D, 1985, **16**(3): 155~ 183.
[7] collet P, Eckmann J P, Epstein H, Stubbe J. A global attracting set for the Kuramoto_Sivashinsky equation[J]. Commu Math Phy, 1993, **152**(1): 203~ 214.
[8] Goodman J. Stability of the Kuramoto_Sivashinsky and related systems[J]. Commu Pure Appl Math, 1994, **97**(5): 293~ 306.
[9] 刘曾荣, 王冠香. Improved estimate on dimension of inertial manifold of Kuramoto_Sivashinsky equation[J]. 数学进展, 1998, **27**(3): 281~ 283.

On Radii of Absorbing Sets for Kuramoto_Sivashinsky Equation

Wang Guanxiang[1], Liu Zengrong[2]

(1. Department of Mathematics, Peking University, Beijing 100871, P R China;
2 Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 201800, P R China)

Abstract: In this article sharper estimates on the radii of absorbing sets for the Kuramoto_sivashinsky equation are given. It is proved that radii of absorbing sets will decay to zero as the coefficient of viscosity tends to a certain critical value, which is more reasonable in the physical sence compared with classical results.

Key words: K_S equation; uniform estimate; absorbing set