应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999)08_0863_04

对牛顿迭代法的一个重要修改*

吴新元

(南京大学 数学系, 南京 210093)

(吴启光推荐)

摘要: 对解非线性和超越方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法作了重要的改进· 利用动力系统的李雅普诺夫方法, 构造了新的"牛顿类"方法· 这些新的迭代方法保持了牛顿法的收敛速率和计算效能, 摒弃了强加于 $f(x)$ 的单调性要求 $f'(x)\neq 0$·

关 键 词: 非线性方程; 超越方程; 迭代法; 动力系统; 牛顿法; 数值分析
中图分类号: O241 文献标识码: A

引 言

对于单个方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法, 自从它问世已来已有许多文章对它作了修改· 但是为保持它的收敛速度要求, 在所考虑的含根区间内, $f'(x)\neq 0$ 这一苛刻条件却至今尚未去掉· 是否有可能从另外的途径来考虑问题, 即在保持牛顿法收敛速率和计算效能的前提下, 重新构造出新的"牛顿类"方法来克服牛顿迭代法的这一致命弱点· 本文借助于动力系统方法成功地解决了这一问题·

1 求根问题与动力系统

为求方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

在 $[a,b]$ 内的单重根 x^*, 令

$$g(x)=e^{\alpha x}f(x), \qquad \alpha\neq 0,\ |\alpha|<+\infty, \tag{2}$$

则 x^* 也是方程 $g(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内的单重根· 反之亦然·

为援引动力系统的结果, 令

$$v(x)=e^{\alpha x}|f(x)|=\begin{cases} e^{\alpha x}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ -e^{\alpha x}f(x), & f(x)<0,\end{cases} \tag{3}$$

则当 $x\in[a,b]$ 时 $v(x)\geqslant 0$, 并且等号当且仅当 $x=x^*$ 时成立·

假设在 $[a,b]$ 上有 $\alpha f(x)+f'(x)\neq 0$ 成立, 我们引进一个动力系统

---

* 收稿日期: 1997_04_14; 修订日期: 1999_01_05
作者简介: 吴新元(1953~), 副教授, 硕士研究生导师、美国数学会会员, 美国《Mathematical Reviews》评论员.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{g(x)}{g'(x)} = -\dfrac{f(x)}{\alpha f(x) + f'(x)}, \\ x(0) = x_0, \quad x_0 \in [a, b], \end{cases} \tag{4}$$

则显然方程(1)在$[a, b]$内的根x^*是动力系统(4)的一个平衡点． 反之亦然．

定理 1 设对$\forall x \in [a, b]$有$\alpha f(x) + f'(x) \neq 0$, $f(a)f(b) < 0$, $G(x) = -f(x)/(\alpha(f(x) + f'(x)))$满足L_条件，则初值问题(4)于$(0, +\infty)$上存在唯一的满足

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = x^*, \qquad x_0 \in [a, b] \tag{5}$$

的饱和解或运动

$$x = x(t, x_0), \qquad x_0 \in [a, b], \quad t > 0, \tag{6}$$

并且x^*是方程(1)在$[a, b]$内的唯一解．

证 由对$f(x)$的假设可知，初值问题(4)在$(0, +\infty)$有饱和解或运动(5)存在[1]，此外容易检验，由(3)定义的函数$v(x)$满足

(i) $v(x^*) = 0$且$v(x) > 0$, $x \in [a, b] \setminus x^*$;

(ii) $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} e^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x))\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, & f(x) \geqslant 0 \\ -e^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x))\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, & f(x) < 0 \end{cases} = -e^{\alpha x}|f(x)| = -v(x) < 0, \qquad x \in [a, b] \setminus x^*.$$

由著名的李雅普诺夫定理[2]知$v(x)$是动力系统(4)的平衡点x^*的一个严格李雅普诺夫函数，故x^*是渐近稳定的平衡点，因此(6)式成立．

又由$\alpha f(x) + f'(x) \neq 0$可知方程(1)在$[a, b]$内的解是唯一的． 因为如果方程(1)在$[a, b]$内有异于$x^*$的另一根$\tilde{x}$存在，则$g(x) = 0$在$(a, b)$内也有异于$x^*$的另一根$\tilde{x}$，即$g(x^*) = 0$且$g(\tilde{x}) = 0$，但由罗尔定理知$g'(x) = e^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x))$在$(a, b)$内至少有一个零点$\xi$，即有$e^{\alpha\xi}(\alpha f(\xi) + f'(\xi)) = 0$，这与在$[a, b]$内任一点有$\alpha f(x) + f'(x) \neq 0$的假设相矛盾，从而证明了$x^*$是方程(1)与$[a, b]$内的唯一解． 定理1得证．

定理1指出了在$G(x)$满足L_条件，$f(a)f(b) < 0$及$\alpha f(x) + f'(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$的条件下，取$[a, b]$内任一点x_0为初始点的运动(6)都趋于方程(1)在$[a, b]$内的唯一根． 这实际上导出了一类具有区域收敛性的连续性方法．

特别，如果允许(2)中取$\alpha = 0$，则立刻得到连续牛顿法的结果，但本定理的条件比较宽松．

2 两族新的“牛顿类”方法

显然，当采用不同的数值方法解初值问题(4)时可以得到不同的求根方法，这里我们仅仅考虑用最简单的Euler法和指数法[3]来解初值问题(4)，分别得到

$$x_{n+1} = x_n - h_n f(x_n)/(\alpha f(x_n) + f'(x_n)) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{7}$$

和

$$x_{n+1} = x_n \exp(-h_n f(x_n)/x_n(\alpha f(x_n) + f'(x_n))), \qquad (x_n \neq 0;\ n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

其中h_n为积分步长，它的选取和牛顿下山法一样应满足

$$|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|, \qquad a < x_{n+1} < b, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

由定理1和Euler方法及指数方法的收敛性知，由此生成的迭代序列$\{x_n\}$必有$x_n \to x^*$, $n \to$

∞• 但当 $h_n \neq 1$ 时一般它们只有线性敛速•

取 $h_n \equiv 1$ 时对应的迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/(\alpha f(x_n) + f'(x_n)), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

和

$$x_{n+1} = x_n \exp(- f(x_n)/x_n(\alpha f(x_n) + f'(x_n))), \quad (x_n \neq 0;\ n = 0, 1, 2, \cdots)• \tag{10}$$

定理 2 设 $f''(x)$ 在 x^* 的充分小的邻域内连续, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, $\alpha f(x) + f'(x) \neq 0$, 则迭代公式(9) 和(10) 是平方收敛的, 并且它们和牛顿迭代公式具有相同的计算效能•

证 令

$$\varphi_1(x) = x - f(x)/(\alpha f(x) + f'(x))$$

和

$$\varphi_2(x) = x \exp(- f(x)/x(\alpha f(x) + f'(x))),$$

则容易直接验证 $\varphi_1(x^*) = x^*$, $\varphi_1'(x^*) = 0$; $\varphi_2(x^*) = x^*$, $\varphi_2'(x^*) = 0$• 由单点迭代法收敛的充分必要条件[4] 知迭代公式(9) 和(10) 都是平方收敛的, 并且它们每前进一步需要计算 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 各一次, 故它们的计算效能和牛顿迭代法一样, 都是

$$E[\varphi, f] = 2^{1/(1+\theta_1)},$$

此处设计算 $f(x)$ 的代价是一个单位, 计算 $f'(x)$ 的代价是 θ_1 个单位(见[4])• 定理 2 得证•

特别在(9) 和(10) 中取 $\alpha = 1$ 我们得到族中的两个特殊的平方收敛的迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) + f'(x_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{11}$$

和

$$x_{n+1} = x_n \exp(- f(x_n)/x_n(f(x_n) + f'(x_n))), \quad (x_n \neq 0;\ n = 0, 1, 2, \cdots)• \tag{12}$$

如果允许(9) 和(10) 中的 $\alpha = 0$, 则对应牛顿迭代法

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

和二阶指数迭代法

$$x_{n+1} = x_n \exp(- f(x_n)/x_n f'(x_n)), \quad (x_n \neq 0;\ n = 0, 1, 2, \cdots)• \tag{14}$$

如果使用差商代替导数, 那么由(9) 和(10) 又可派生出两族超线性收敛的"割线类"迭代法•

3 数 值 试 验

例 1 求 $f(x) = x e^{-x} - 0.1 = 0$ 在 $[a, b] = [0, 2]$ 中的根•

取 $x_0 = 1$, 由迭代公式(11) 得

$$x_4 = 0.111\,832\,559\,158\,962\,9, \quad f(x_4) \approx -4.8 \times 10^{-17}•$$

但取同样初值 $x_0 = 1$ 用牛顿迭代法发散•

取 $x_0 = 1.1$, 由迭代公式(11) 得

$$x_4 = 0.111\,832\,559\,158\,962\,2, \quad f(x_4) \approx -6.3 \times 10^{-16}•$$

而由牛顿法得

$$x_{111} = 0.111\,832\,558\,761\,738\,9, \quad f(x_{111}) \approx -3.2 \times 10^{-10}•$$

取 $x_0 = 2$, 由迭代公式(11) 得

$$x_5 = 0.111\,832\,559\,158\,963\,0,\quad f(x_5) \approx -4.09\times 10^{-18}.$$

但牛顿法取 $x_0 = 2$ 不收敛于方程在[0, 2] 中的根.

例 2 求 $f(x) = \arctan x = 0$ 在[−0.4, 5] 中的根.

取 $x_0 = 5$, 由迭代公式(11) 得

$$x_{10} \approx 0.32\times 10^{-13},\quad f(x_{10}) \approx 0.32\times 10^{-13},$$

但牛顿法发散;

取 $x_0 = 3$ 迭代公式(11) 给出

$$x_8 \approx 0.64\times 10^{-14},\quad f(x_8) \approx 0.64\times 10^{-14},$$

但牛顿法发散;

取 $x_0 = 2$ 由迭代公式(11) 得

$$x_7 \approx 0.94\times 10^{-15},\quad f(x_7) \approx 0.94\times 10^{-15},$$

但牛顿法发散.

4 结 论

本文我们已经将牛顿迭代法作了重要的改进, 利用动力系统方法导出了两族新的“牛顿类”迭代公式(9)和(10), 它们保持了牛顿法的一切优点去掉了强加给 $f(x)$ 的单调性即要求 $f'(x)\neq 0$ 的致命弱点.

[参 考 文 献]

[1] Hale J K. Ordinary Differential Equations[M]. Huntington, New York: Robert E Krieger Publishing Company, 1982.

[2] Hirsch M W, Smale S. Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra[M]. New York and London: Academic Press, 1974, 192~193.

[3] 吴新元. 解 Stiff 常微分方程的精确指数拟合法[J]. 南京大学学报(自然科学版), 1997, **31**(1): 1~6.

[4] Traub J F. Solution of transcendental equations[A]. In: A Ralston, H S Wilf Eds. Mathematical Methods for Digital Computers[C]. Vol Ⅱ. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1968.

A Significant Improvement on Newton's Iterative Method

Wu Xinyuan

(Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P R China)

Abstract: For solving nonlinear and transcendental equation $f(x) = 0$, a singnificant improvement on Newton's method is proposed in this paper. New "Newton Like" methods are founded on the basis of Liapunov's methods of dynamic system. These new methods preserve qudratic convergence and computation efficiency of Newton's method, but remove the monotoneity condition imposed on $f(x)$: $f'(x)\neq 0$.

Key words: nonlinear equation; transcendental equation; dynamic system; iterative method; Newton method; numerical analysis