

文章编号: 1000_0887(1999)08_0856_07

小波建模和预测及其在中国货币 乘数中的应用*

刘 斌¹, 董勤喜²

(1. 中国科学院 系统科学研究所, 北京 100080; 2. 北京理工大学 应用力学系, 北京 100081)

(钱伟长推荐)

摘要: 利用双正交小波变换的向量空间算法结合逐步回归分析, 对我国的狭义货币乘数建立了时变的 AR 模型, 在此基础上对我国 1997 年第一季度狭义货币乘数进行模拟和预测

关键词: 货币乘数; 小波变换; 时变 AR 模型

中图分类号: F822.2 文献标识码: A

引 言

随着我国金融改革的逐步深化, 金融机构日益增多, 金融市场逐步完善, 融资渠道不断拓宽。中央银行货币政策已从依赖贷款规模管理的直接调控转向以实现货币存量为目标的间接调控。为了实现货币存量有效调控, 就必须了解货币乘数的变化规律, 并对货币乘数作出准确的预测。关于中国货币乘数的预测问题的研究已经比较深入, 但目前研究的方向仅局限于常系数的乘数模型。其基本假设是: 结构模型存在且系数至少在短期内是固定不变的。而我国正处于经济体制转轨时期, 货币乘数很不稳定, 这就需要从动态的角度连续地跟踪货币乘数的微小变化, 进而准确地进行预测。本文运用双正交小波变换的向量空间算法, 对时变 AR 模型进行非线性参数估计, 建立了我国货币乘数的动态预测模型。在此基础上对我国狭义货币乘数进行了实证研究。

1 双正交小波变换向量空间算法

1.1 双正交小波变换

小波是由一个基函数 $\phi(t)$ 通过平移和伸缩而得到的一族函数 $\psi_{j,k}(t)$, 其中

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - k\right),$$

并且这族函数构成 $L^2(R)$ 空间中的一个标准正交基, 基函数 $\phi(t)$ 被称为小波函数。正交小波尽管有广泛的应用, 但同时也存在明显的不足之处。而 I. Daubechies 已经证明: 除了 Haar 小波之外, 紧支集正交小波不可能具有任何对称性, 此时对应的 FIR 滤波器 H 和 G 不可能具有线性相位, 这样会产生相位失真。为了弥补这一缺点, 于是出现了双正交小波的理论。

* 收稿日期: 1998_04_23; 修订日期: 1999_01_30

作者简介: 刘斌(1971~), 男, 中国科学院系统科学研究所所在读博士。

在双正交小波的情形下,小波基 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此之间并不正交,但存在对偶的小波基 $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$, 使得 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 与 $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 之间相互正交。此时相应的尺度函数 $\{\phi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此之间也不正交,同样也存在对偶尺度函数 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$, 使得 $\{\phi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 与 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 之间相互正交。

对固定的 j , 记由 $\{\phi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 张成的线性空间为 V_j , 由 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 张成的线性对偶空间为 \tilde{V}_j , 又记由 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 张成的线性空间为 W_j , 由 $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 张成的线性对偶空间为 \tilde{W}_j , 则有如下关系:

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots,$$

$$\dots \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \dots,$$

且有:

$$\overline{\bigcup_{j \in Z} V_j} = L^2(R), \quad \overline{\bigcup_{j \in Z} \tilde{V}_j} = L^2(R),$$

V_j 中 $\{\phi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此互不正交, \tilde{V}_j 中 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此也不正交, 但 $\{\phi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 与 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此正交。

W_j 是 V_j 在 V_{j-1} 中的补空间, 但不是正交补, \tilde{W}_j 是 \tilde{V}_j 在 \tilde{V}_{j-1} 中的补空间, 也不是正交补。

• 但有 $V_j \perp \tilde{W}_j$, $\tilde{V}_j \perp W_j$ 。

W_j 中 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此不正交, \tilde{W}_j 中 $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此也不正交, $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 与 $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 彼此正交。

因此有:

$$\langle \phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}, \quad \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}, \quad \langle \phi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k'} \rangle = \langle \tilde{\phi}_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = 0$$

实际上, $\{h_l\}$ 恰好为一低通滤波器 H 的脉冲响应, $\{g_l\}$ 恰好为一高通滤波器 G 的脉冲响应。小波变换就是利用 $\{h_l\}$ 和 $\{g_l\}$ 的组合将信号分解到不同的频带中去, 并且对每一个频带都有不同的分辨率, 在高频带中, 有较高的时间分辨率; 在低频带中, 有较高的频率分辨率, 这对非平稳信号是合适的。同时存在滤波器组 $(\{h_l\}, \{g_l\})$ 和 $(\{\tilde{h}_l\}, \{\tilde{g}_l\})$ 使

$$\phi_{n+1,m}(t) = \sum_l h_l \phi_{n,2m+l}(t), \quad \tilde{\phi}_{n+1,m}(t) = \sum_l \tilde{g}_l \tilde{\phi}_{n,2m+l}(t);$$

$$\psi_{n+1,m}(t) = \sum_l h_{-l} \psi_{n,2m+l}(t), \quad \tilde{\psi}_{n+1,m}(t) = \sum_l \tilde{g}_{-l} \tilde{\psi}_{n,2m+l}(t)。$$

与正交小波不同的是双正交小波仅要求:

$$h_l = (-1)^{l+1} g_{l+1}, \quad g_l = (-1)^l h_{l+1}。$$

完全重构的充分必要条件是:

$$H(\omega)H^*(\omega) + H(\omega + \pi)H^*(\omega + \pi) = 1,$$

$$\text{其中 } H(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\omega}, \quad H^*(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\omega},$$

* 表示取共轭。此时信号的分解和重构算法与正交变换相同。

1.2 向量空间算法原理

本文选用的是紧支集小波, 这时对应的 H 和 G 就是一对 FIR 滤波器, 即 $\{h_l\}$ 和 $\{g_l\}$ 均为有限长度序列, 支撑均为 $-M+1 \leq l \leq M$, 由此可知 $\{h_l\}$ 和 $\{g_l\}$ 的支撑均为 $-M \leq l \leq M$

- 1• 实际应用中信号 $\{s_k\}$ ($0 \leq k \leq N-1$) 长度是有限的, 这就容易造成小波变换边界处的截断, 为了进行周期延拓, 这里采用了文献中的向量空间算法•

设信号的采样值为 $\{s_k\}$ ($0 \leq k \leq N-1$), N 为 2 的幂次, 此时信号 $\{s_k\}$ ($0 \leq k \leq N-1$) 的小波分解算法为:

$$\begin{cases} s_k^j = \sum_{l=-M}^{M-1} h_l s_{2k-l}^{j-1} \\ d_k^j = \sum_{l=-M}^{M-1} g_l s_{2k-l}^{j-1} \end{cases} \quad \left(0 \leq k \leq \frac{N}{2^j} - 1 \right),$$

其中 $\{s_k^0\} = \{s_k\}$ ($0 \leq k \leq N-1$), 其重构算法为:

$$s_k^{j-1} = \sum_{l=0}^{N/2^j-1} h_{k-2l} s_l^j + \sum_{l=0}^{N/2^j-1} g_{k-2l} d_l^j.$$

记 s 为 N 维向量, s^j, d^j 为 $N/2^j$ 维向量:

$$s = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \end{pmatrix}, \quad s^j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ s_1^j \\ \vdots \\ s_{N/2^j-1}^j \end{pmatrix}, \quad d^j = \begin{pmatrix} d_0^j \\ d_1^j \\ \vdots \\ d_{N/2^j-1}^j \end{pmatrix},$$

再记 H_j, G_j 为 $(N/2^j) \times (N/2^{j-1})$ 矩阵:

$$H_j = (h_{2n-m})_{n,m}, \quad G_j = (g_{2n-m})_{n,m} \quad \left(0 \leq n \leq \frac{N}{2^j} - 1, 0 \leq m \leq \frac{N}{2^{j-1}} - 1 \right),$$

此时除边界外, 分解公式可改写为:

$$s^j = H_j s^{j-1}, \quad d^j = G_j s^{j-1}.$$

记 H_j, G_j 为 $(N/2^{j-1}) \times (N/2^j)$ 矩阵:

$$H_j = (h_{n-2m})_{n,m}, \quad G_j = (g_{n-2m})_{n,m} \quad \left(0 \leq n \leq \frac{N}{2^{j-1}} - 1, 0 \leq m \leq \frac{N}{2^j} - 1 \right),$$

此时除边界外, 重构公式可改写为:

$$s^{j-1} = H_j s^j + G_j d^j.$$

由于边界问题, 在进行小波分解和重构时, 完全恢复原信号的充分必要条件是:

$$(H_j, G_j) \times \begin{pmatrix} H_j \\ G_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_j \\ G_j \end{pmatrix} \times (H_j, G_j) = I.$$

为了满足上述充要条件, 必须对矩阵 H_j, G_j, H_j, G_j 在边界处进行双正交化处理• 通过双正交化处理后有:

$$\begin{aligned} s &= (H_1, G_1) \begin{pmatrix} s^1 \\ d^1 \end{pmatrix} = H_1 s^1 + G_1 d^1 = \\ &H_1 H_2 s^2 + H_1 G_2 d^2 + G_1 d^1 = \\ &\dots \dots = \\ &H_1 H_2 \dots H_1 s^L + H_1 H_2 \dots H_{L-1} G_L d^L + \dots + H_1 G_2 d^2 + G_1 d^1. \end{aligned}$$

记 E_m^j ($0 \leq m \leq N/2^j - 1$) 为 $N/2^j$ 维向量, 定义其第 $m+1$ 个元为 1, 其余都为零, 即 $(0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, 有

$$s = \sum_{k=0}^{N/2^L-1} s_k^L H_1 H_2 \cdots H_L E_k^L + \sum_{k=0}^{N/2^L-1} d_k^L H_1 H_2 \cdots H_{L-1} G_L E_k^L + \cdots + \sum_{k=0}^{N/4-1} d_k^2 H_1 G_2 E_k^2 + \sum_{k=0}^{N/2-1} d_k^1 G_1 E_k^1.$$

记 P_m^j 、 Q_m^j 和 \tilde{Q}_m^j 、 \tilde{Q}_m^j ($0 \leq m \leq N/2^j - 1$) 为 N 维向量, 定义为:

$$P_m^j = H_1 H_2 \cdots H_j E_m^j, \quad Q_m^j = H_1 H_2 \cdots H_{j-1} G_j E_m^j, \\ \tilde{P}_m^j = H_1 H_2 \cdots H_j E_m^j, \quad \tilde{Q}_m^j = H_1 H_2 \cdots H_{j-1} G_j E_m^j.$$

因此信号 s 可表示为:

$$s = \sum_{k=0}^{N/2^L-1} s_k^L P_k^L + \sum_{l=1}^L \sum_{k=0}^{N/2^l-1} d_k^l Q_k^l,$$

式中: $s_k^L = \langle s, P_k^L \rangle$, $d_k^l = \langle s, Q_k^l \rangle$, N 个向量 $\{P_k^L\}$, $\{Q_k^L\}$, \dots , $\{Q_k^2\}$, $\{Q_k^1\}$ 即是在 N 维空间中由小波重构滤波产生的一组基, 它们的对偶基就是由小波分解滤波产生的 N 个向量 $\{P_k^L\}$, $\{Q_k^L\}$, \dots , $\{Q_k^2\}$, $\{Q_k^1\}$.

2 时变 AR 系统的小波建模

考虑观测序列是具有自回归形式的 p 阶时变 AR 过程:

$$y(n) = \sum_{k=1}^p A(n, k) y(n-k) + \varepsilon(n).$$

在上述模型中, $A(n, k)$ ($1 \leq k \leq p$) 都是依赖于时间 n 的时变系数. 这里假定模型的阶次 p 已知; $\varepsilon(n)$ 满足古典高斯假设.

设 $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ 是来自序列 $y(n)$, N 为 2 的幂次. 记

$$Y \triangleq (y(0), y(1), \dots, y(N-1))^T, \\ \varepsilon \triangleq (\varepsilon(0), \varepsilon(1), \dots, \varepsilon(N-1))^T, \\ A_k \triangleq (A(0, k), A(1, k), \dots, A(N-1, k))^T \quad (1 \leq k \leq p), \\ Y^k \triangleq \text{diag}(y(0-k), y(1-k), \dots, y(N-1-k)).$$

由模型可得:

$$Y = \sum_{k=1}^p Y^k A_k + \varepsilon.$$

利用小波变换的向量空间算法原理, 有:

$$A_k = \sum_{j=0}^{N/2^L-1} \xi_{j,L}^k P_j^L + \sum_{l=1}^L \sum_{j=0}^{N/2^l-1} \eta_{j,l}^k Q_j^l,$$

将上式代入模型得:

$$Y = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{N/2^L-1} \xi_{j,L}^k Y^k P_j^L + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^L \sum_{j=0}^{N/2^l-1} \eta_{j,l}^k Y^k Q_j^l + \varepsilon$$

不难看出, 上式方程描述的是一个不定系统, 为了能够估计上述模型中的参数, 我们可利用小波中 H 和 G 的低通和高通特性, 从而可以假定 $\eta_{j,l}^k = 0$ ($1 \leq l \leq L-1, 1 \leq k \leq p$), 同时还要求小波的分解层数 $L \leq \log_2 p$. 这样等式可改写成:

$$A_k = \sum_{j=0}^{N/2^L-1} \xi_{j,L}^k P_j^L + \sum_{j=0}^{N/2^L-1} \eta_{j,L}^k Q_j^L,$$

$$Y = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{N/2^L-1} \xi_{j,L}^k Y^k P_j^L + \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{N/2^L-1} \eta_{j,L}^k Y^k Q_j^L + \varepsilon$$

对方程应用 OLS 估计得到系数的估计值分别为 $\hat{\xi}_{j,L}^k$, $\hat{\eta}_{j,L}^k$, 根据信号的小波重构公式有:

$$\hat{\xi}_{n,L-1}^k = \sum_{j=0}^{N/2^{L-1}} h_{n-2j} \hat{\xi}_{j,L}^k + \sum_{j=0}^{N/2^{L-1}} g_{n-2j} \hat{\eta}_{j,L}^k,$$

$$\hat{\xi}_{n,l-1}^k = \sum_{j=0}^{N/2^{l-1}} h_{n-2j} \hat{\xi}_{j,l}^k,$$

$$A(n, k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} h_{n-2j} \hat{\xi}_{j,1}^k \quad (n = 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N+M-2),$$

由此得到 $y(n)$ 的拟合值为:

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=1}^p A(n, k) y(n-k) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1),$$

预报值 $\hat{y}_{N-1}(n)$ 的方程为:

$$\hat{y}_{N-1}(n) = \sum_{k=1}^p A(N-1+n, k) \hat{y}_{N-1}(n-k) \quad (n = 1, 2, \dots, M-1),$$

其中当 $l \leq 0$ 时, $\hat{y}_{N-1}(l) = y(N-1+l)$.

3 我国货币乘数的小波建模与预测

通过对我国货币乘数 1985~1996 的月度样本数据进行时间序列分析,发现我国的狭义和广义货币乘数在短期内波动较大且与其滞后相关性较强。鉴此,本文利用双正交小波变换对我国的货币乘数进行实证分析。

3.1 双正交紧支集小波的选取

这里选用 $M = 2$ 的双正交小波,得到的滤波器组如下:

$$\begin{aligned} \{h_l\} &= \left\{ h_{-1}, h_0, h_1, h_2 \right\} = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\}, \\ \{g_l\} &= \left\{ g_{-1}, g_0, g_1, g_2 \right\} = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{4} \right\}, \\ \{h_l\} &= \left\{ h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1 \right\} = \sqrt{2} \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{-1}{4} \right\}, \\ \{g_l\} &= \left\{ g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1 \right\} = \sqrt{2} \left\{ \frac{-1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{-3}{8}, \frac{1}{8} \right\}. \end{aligned}$$

3.2 双正交化处理

根据小波的向量空间算法原理,我们对矩阵 H_j, G_j, H_j, G_j 的第一行(列)和最后一行(列)实行双正交化归一化处理。

H_j, G_j, H_j, G_j 双正交化归一化后的第一行(列)分别为:

$$\begin{aligned} \left\{ h_0, h_{-1}, h_{-2}, h_{-3}, \dots \right\} &= \sqrt{2} \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, 0, \dots, 0 \right\}^T, \\ \left\{ g_0, g_{-1}, g_{-2}, g_{-3}, \dots \right\} &= \sqrt{2} \left\{ \frac{14}{40}, \frac{-21}{40}, \frac{7}{40}, 0, \dots, 0 \right\}^T, \\ \left\{ h_0, h_1, h_2, h_3, \dots \right\} &= \sqrt{2} \left\{ \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, 0, \dots, 0 \right\}^T, \end{aligned}$$

$$\{g^0, g^1, g^2, g^3, \dots\} = \sqrt{2} \left\{ \frac{20}{28}, \frac{-15}{28}, \frac{-5}{28}, 0, \dots, 0 \right\}^T \cdot$$

H_j, G_j, H_j, G_j 的双正交归一化后最后一行(列) 分别为:

$$\{\dots, h_2, h_1, h_0, h_{-1}\} = \sqrt{2} \left\{ 0, \dots, 0, \frac{-1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4} \right\}^T,$$

$$\{\dots, g_2, g_1, g_0, g_{-1}\} = \sqrt{2} \left\{ 0, \dots, 0, \frac{7}{40}, \frac{-21}{40}, \frac{14}{40} \right\}^T,$$

$$\{\dots, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1\} = \sqrt{2} \left\{ 0, \dots, 0, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} \right\}^T,$$

$$\{\dots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1\} = \sqrt{2} \left\{ 0, \dots, 0, \frac{-5}{28}, \frac{-15}{28}, \frac{20}{28} \right\}^T.$$

3.3 建模与预测

利用我国狭义货币乘数和广义货币乘数 1986_05~ 1996_12 的 128 个月度数据, 选取分解层数 $L = 4$, 滞后阶数 $p = 4$ 运用上述方法对我国货币乘数进行估计和建模, 得到的时变参数和拟合值如图 1、2 所示。

利用上述时变模型对我国狭义货币乘数 1997 年一季度进行预测, 结果如表 1 所示。

表 1 中国狭义货币乘数预测

时 间	m_1	m_{1f}	$ m_1 - m_{1f} $
1997_01	1.142 853	1.152 392	0.009 539
1997_02	1.106 341	1.126 353	0.020 012
1997_03	1.101 676	1.120 982	0.009 306

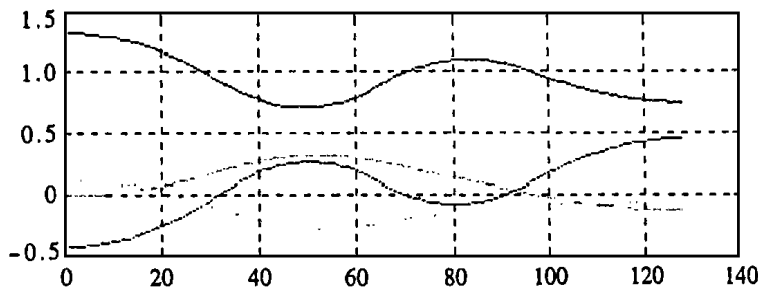


图 1 时变系数

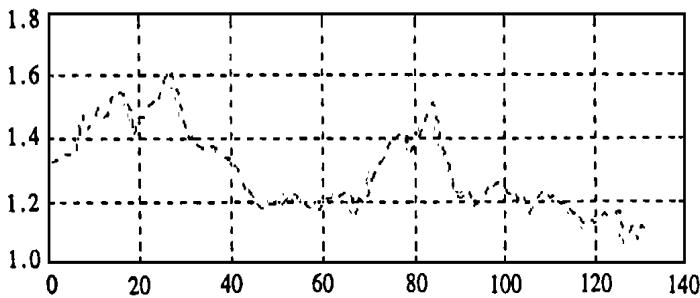


图 2 狭义货币乘数拟合曲线

4 结 论

通过实证分析,利用双正交小波变换的向量空间算法,结合逐步回归分析,对我国的货币乘数进行非线性建模和动态预测,不仅对采样数据限制较少,而且对时变系统的轨道的缓慢变化部分能够很好地逼近,同时还能跟踪快速变化及其局部的细节,得到了良好的结果。这对我国货币乘数预测以及货币政策调控提供了有力的工具,而且可以推广到对其他非平稳的经济数据的分析与预测。

[参 考 文 献]

- [1] Daubechies I. Orthogonal base of compactly support wavelet[J]. Comm Pure Appl Math, 1988, **41**(7):909~ 996.
- [2] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelet[J]. Comm Pure Appl Math, 1992, **45**(6): 485~ 560.
- [3] 贾沛璋. 正交小波变换的向量空间算法[J]. 系统科学与数学, 1995, **15**(1): 75~ 82.
- [4] 詹凯. 小波变换及其在时变系统建模中的应用[D]. 硕士论文. 北京: 中国科学院系统科学研究所, 1997.

Wavelet Modeling and Forecasting and Its Application in the Chinese Monetary Multiplier

Liu Bin¹, Dong Qinxi²

(1. Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080, P R China;

2. Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China)

Abstract: In this paper, a time_varying AR model is constructed by using the vector_space algorithm of compactly_supported biorthonormal wavelets transform, and a time_varying AR model for forecasting narrow monetary multipliers in China is developed.

Key words: wavelets transform; time_varied AR model; monetary multiplier