应用数学和力学, 第 20 卷 第 8 期(1999 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 08_0851_05

一类时滞神经网络模型的稳定性*

曹进德[1], 林怡平[2]

(1. 云南大学 成人教育学院, 昆明 650091; 2. 昆明理工大学 基础部, 昆明 650093)

(李继彬推荐)

摘要: 利用 Lyapunov 泛函, 讨论了一类时滞神经网络模型

$$u_i'(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f_j(\mu_j u_j(t-\tau_j)) + c_i \qquad \tau_j \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

平衡态的稳定性, 获得了几个充分条件•

关 键 词: 时滞; 神经网络; 稳定性
中图分类号: TN911.23; O332 文献标识码: A

引 言

对神经网络模型的理论和应用研究, 近年来已成为国际研究的新热点, 众所周知, 神经网络模型的定性性质对具体综合过程具有启发和指导作用, 其严格分析显得十分重要• 神经网络的两个主要应用是联想记忆和最优化计算, 这就需要我们视其应用的不同作不同类型的稳定性分析•

本文考虑如下一类时滞神经网络模型

$$u_i'(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f_j(\mu_j u_j(t-\tau_j)) + c_i \qquad \tau_j \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

平衡态的全局渐近稳定性• 其中 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \cdots, u_n(t))$ 表该网络的状态, 滞量 $\tau_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 与参数 $\mu_j (j = 1, 2, \cdots, n)$, $b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, $T_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 的意义, 在文[1] 中有详细的解释• 文[2] 对系统(1) 的特殊情形进行了讨论, 获得了其平衡态全局渐近稳定的一个充分判据; 文[3] 通过构造不同的 Lyapunov 泛函对系统(1) 进行了细致研究, 给出了平衡态全局渐近稳定的一系列与参数 b_i、μ_j、$T_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 有关的充分条件; 本文对系统(1) 进行再分析, 通过构造不同的 Lyapunov 泛函, 又获得了确保系统(1) 平衡态全局渐近稳定的几个充分条件, 从而进一步完善了文[3] 的主要结果•

1 主要结果及其证明

众所周知, 系统(1) 这个时滞微分方程通常取初值为

---

* 收稿日期: 1996_12_16; 修订日期: 1999_02_04
基金项目: 云南省教委科研基金资助课题(9542054); 云南省自然科学基金资助课题(97A012G)
作者简介: 曹进德(1963~), 男, 教授, 博士, 云南省确定的跨世纪学术技术带头人, 已发表论文 50 余篇.

$$u_i(s)=\varphi_i(s),\quad s\in[-\tau,0],\quad \tau=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\tau_j, \tag{2}$$

其中 $\varphi_i:[-\tau,0]\to R$ 是连续函数•

兹设每一个输出响应 $f_j(j=1,2,\cdots,n)$ 具有以下性质：

(H_1) $f_j: R\to R$ 是连续可微的;

(H_2) f_j 在 R 上有界;

(H_3) $0<\mathrm{d}f_j(u)/\mathrm{d}u\leqslant\sigma_j,\ j=1,2,\cdots,n,\ u\in(-\infty,\infty)$•

引理 1 设响应函数 $f_j, j=1,2,\cdots,n$ 满足 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$，则系统(1) 必存在平衡点•

证 假设 $\boldsymbol{u}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$ 是系统(1) 的平衡点，则 $\boldsymbol{u}^*$ 一定满足非线性方程：

$$\begin{aligned}u_i^*&=\frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_j(\mu_j u_j^*)+\frac{c_i}{b_i}=\\&\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(\mu_j u_j^*)+q_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)\text{•}\end{aligned} \tag{3}$$

记 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}=\left(T_{ij}/b_i\right)_{n\times n}$, $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}}$, $q_i=c_i/b_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 于是(3) 可以表为如下向量_矩阵形式

$$\boldsymbol{u}^*=F(\boldsymbol{u}^*)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{q}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^*)=(f_1(\mu_1u_1^*),f_2(\mu_2u_2^*),\cdots,f_n(\mu_nu_n^*))^{\mathrm{T}}$，这样 $\boldsymbol{u}^*$ 就是 $F: R^n\to R^n$ 的不动点，我们利用众所周知的 Brouwer 不动点定理可以说明 F 的不动点的存在性• 事实上，定义超立方体

$$\Omega=\left\{\boldsymbol{u}\in R^n \mid \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{B}\|_\infty M\right\}, \tag{5}$$

其中 $M=\max\limits_i\sup\limits_s|f_i(s)|$•

由(4)、(5) 可知

$$\|F(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{q}\|_\infty=\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{B}\|_\infty\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{B}\|_\infty M, \tag{6}$$

又由(4)～(6) 可见映射 F 是连续的，且 F 将一个有闭凸集 Ω 映成自身，于是由 Brouwer 不动点定理知，F 至少有一个不动点，即系统(1) 至少有一个平衡点，兹记该平衡点为 $\boldsymbol{u}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$，证毕•

注意 Brouwer 定理并不能确保不动点的唯一性，然而，在本文中获得的有关参数的充分条件，不仅可以确保平衡点的唯一性，而且可以保证平衡态的全局渐近稳定性• 平衡点的唯一性可由全局渐近稳定性导出来•

引理 2 设 $f_j(j=1,2,\cdots,n)$ 满足 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$，则系统(1) 的所有解有 $[0,+\infty)$ 上均有界•

证 不难知系统(1) 的任意解都满足微分不等式

$$-b_iu_i(t)-\alpha_i\leqslant u_i'(t)\leqslant-b_iu_i(t)+\alpha_i,$$

其中 $$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|\sup_{s\in R}|f_j(s)|+|c_i|\text{•}$$

由上面的不等式即知，系统(1) 的任一解在 $[0,\infty)$ 上均有界• 证毕•

定理 设响应函数 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$，且参数 b_i、T_{ij}、μ_j、$\sigma_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 满足下列条件之一：

(ⅰ) $\beta_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{1}{2b_i}\sum\limits_{j=1}^{n}(\sigma_j\mu_j^2|T_{ij}|+\sigma_i|T_{ji}|)<1,\quad b_i>0$;

$$(\text{ii})\quad \beta_2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{2b_i} \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j^2 |\mu_j| |T_{ij}| + |\mu_i| |T_{ji}|) < 1, \quad b_i > 0;$$

$$(\text{iii})\quad \beta_3 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{2b_i} \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j^2 \mu_j^2 + T_{ji}^2) < 1, \quad b_i > 0;$$

$$(\text{iv})\quad \beta_4 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{2b_i} \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j \mu_j^2 + \sigma_i T_{ji}^2) < 1, \quad b_i > 0,$$

则平衡点 $\boldsymbol{u}^*$ 是全局渐近稳定的, 且与滞量无关, 此时对于形式(2) 的初始条件的任一解满足收敛关系:

$$\lim_{t \to \infty} u_i(t) = u_i^*, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \cdot$$

证　如果这个网络动力系统收敛于一个平衡点, 则相应任意允许初值的(1) 的解必满足关系:

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{n} | u_i(t) - u_i^* | = 0 \cdot$$

令 $y_i(t) = u_i(t) - u_i^*$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 由(1) 易知 $y_i(t)$ 的导数满足方程

$$y_i'(t) = -b_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \mu_j f_j'(\theta_j(t)) y_j(t - \tau_j), \tag{7}$$

其中 $\theta_j(t)$ 介于 $u_j(t - \tau_j)$ 与 u_j^* 之间, $j = 1, 2, \cdots, n$• 方程(1) 与(7) 解的局部存在性可通过分步法来确定, 而解在$[0, +\infty)$ 上的存在性可由以下分析得到•

1) 设条件(ⅰ) 成立, 我们考虑 Lyapunov 泛函 $V_1(t) = V_1(y)(t)$:

$$V_1(y)(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| \int_{t-\tau_j}^{t} y_j^2(s) \mathrm{d}s \right) \cdot \tag{8}$$

沿(7) 的解计算 V_1 的变化率, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = & \sum_{i=1}^{n} \Big[y_i(t) \Big(-b_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \mu_j f_j'(\theta_j(t)) y_j(t - \tau_j) \Big) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t - \tau_j) \Big] \cdot \end{aligned} \tag{9}$$

利用不等式 $2ab \leqslant a^2 + b^2$ 与 $0 < f_j'(u) \leqslant \sigma_j$ 来估计上式(9) 的右端, 得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} \leqslant & \sum_{i=1}^{n} \Big[-b_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |\mu_j| |T_{ij}| |y_i(t)| \cdot |y_j(t - \tau_j)| + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t - \tau_j) \Big] = \\ & \sum_{i=1}^{n} \Big[-b_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| (|\mu_j| |y_i(t)|) \cdot (|y_j(t - \tau_j)|) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t - \tau_j) \Big] \leqslant \\ & \sum_{i=1}^{n} \Big[-b_i y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| (\mu_j^2 y_i^2(t) + y_j^2(t - \tau_j)) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t - \tau_j) \Big] = \\ & \sum_{i=1}^{n} \Big[-b_i y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \mu_j^2 |T_{ij}| y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |T_{ij}| y_j^2(t) \Big] = \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[b_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j\mu_j^2|T_{ij}|+\sigma_i|T_{ji}|)\right]y_i^2(t)\leqslant$$

$$-\gamma_1\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t),\tag{10}$$

其中 $\gamma_1=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}b_i(1-\beta_1)>0$.

由(10)式可得

$$V_1(y)(t)+\gamma_1\int_0^t\sum_{i=1}^{n}y_i^2(s)\mathrm{d}s\leqslant V_1(y)(0),\tag{11}$$

从而 $$\int_0^\infty\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t)\mathrm{d}t<\infty.\tag{12}$$

由引理 2 知 $u_i(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上有界,于是可推出 $y_i(t)$、$y_i'(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上有界,故 $y_i(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上一致连续,从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上也一致连续,从而由 Barbalat 引理[4]知

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t)=0.\tag{13}$$

由(13)知,定理的结论成立.

2) 设条件(ii)成立,考虑 Lyapunov 泛函

$$V_2(t)=V_2(y)(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\mu_j||T_{ij}|\int_{t-\tau_j}^{t}y_j^2(s)\mathrm{d}s\right).\tag{14}$$

沿(7)的解计算(14)式 V_2 的变化率,用完全类似于 1) 的分析、估计方法进行简化整理,可得

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\left[b_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j^2|\mu_j||T_{ij}|+|\mu_i||T_{ji}|)\right]y_i^2(t)\leqslant-\gamma_2\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t),\tag{15}$$

其中 $\gamma_2=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}b_i(1-\beta_2)>0$.

由(14)、(15)仿 1) 可说明本定理的结论成立.

3) 设条件(iii)或(iv)成立,这时我们可分别考虑 Lyapunov 泛函:

$$V_3(t)=V_3(y)(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}^2\int_{t-\tau_j}^{t}y_j^2(s)\mathrm{d}s\right],\tag{16}$$

$$V_4(t)=V_4(y)(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_jT_{ij}^2\int_{t-\tau_j}^{t}y_j^2(s)\mathrm{d}s\right).\tag{17}$$

沿(7)的解计算 V_3、V_4 的变化率,同理用类似于 1) 的分析、估计方法进行化简整理,得

$$\frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}t}\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\left[b_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j^2\mu_j^2+T_{ji}^2)\right]y_i^2(t)\leqslant-\gamma_3\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t),\tag{18}$$

其中 $\gamma_3=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}b_i(1-\beta_3)>0$;

$$\frac{\mathrm{d}V_4}{\mathrm{d}t}\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\left[b_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\mu_j^2\sigma_j+\sigma_iT_{ji}^2)\right]y_i^2(t)\leqslant-\gamma_4\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t),\tag{19}$$

其中 $\gamma_4=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}b_i(1-\beta_4)>0$.

利用(16)、(18)与(17)、(19)仿 1) 可证本定理结论成立. 证毕.

注意:若将定理中的条件(iv)换为

$$\beta_5=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{2b_i}\sum_{j=1}^{n}(|\mu_j|\sigma_j^2+|\mu_i|T_{ji}^2)<1,\ b_i>0,$$

定理的结论亦是成立的, 这时我们只需考虑 Lyapunov 泛函:

$$V_5(t) = V_5(y)(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}y_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\mu_j| T_{ij}^2\int_{t-\tau_j}^{t} y_j^2(s)\mathrm{d}s\right)$$

即可•

[参 考 文 献]

[1] Gopalsamy K, He X Z. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays[J]. Physica D, 1994, **76**: 344~358.

[2] Cao Jinde, Li Qiong. Convergence in continuous Hopfield neural network with delay[J]. J Biomath, 1996, **11**(4): 12~15.

[3] 曹进德, 万世栋. 具时滞的 Hopfield 型神经网络的全局渐近稳定性[J]. 生物数学学报, 1997, **12**(1): 60~63.

[4] Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

Stability of a Class of Neural Network Models with Delay

Cao Jinde[1], Lin Yiping[2]

(1. Adult Education College, Yunnan University, Kunming 650091, P R China;

2. Department of Basic Course, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P R China)

Abstract: In this paper, by using Lyapunov functional, some sufficient conditions are obtained for the stability of the equilibrium of a neural network model with delay of the type

$$u_i'(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f_j(\mu_j u_j(t-\tau_j)) + c_i \qquad \tau_j \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n \bullet$$

Key words: delay; neural network; stability