文章编号: 1000_0887(1999)08_0847_04

具有时滞的高维周期系统的周期解*

黄先开[1]，　董勤喜[2]

(1. 北京商学院 基础部, 北京 100037; 2. 北京理工大学 应用力学系, 北京 100081)

(樊大钧推荐)

摘要:　本文研究具有时滞的高维周期系统 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau))$ 与 $\boldsymbol{x}'(t) = \mathrm{grad}G(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau))$ 的周期解, 利用重合度理论, 得到保证其存在周期解的充分条件•作为应用, 建立了一类对数种群模型周期正解的存在性•

关　键　词:　时滞;　周期解;　存在性;　重合度
中图分类号:　O175.8　　　文献标识码:　A

考虑下列具有时滞的高维周期系统

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau)), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}'(t) = \mathrm{grad}G(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau)), \tag{2}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是 n 维连续向量, $\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})$ 是 $n \times n$ 连续矩阵, $G(\boldsymbol{x})$ 为连续可微函数, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 是 n 维连续向量, $\tau > 0$ 为常数, $\boldsymbol{A}(t + T, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{f}(t + T, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, $T > 0$•

为了研究(1)、(2)的周期解的存在性, 先介绍一个引理•

令 $X = \left\{\boldsymbol{x}(t) \in C(R, R^n) \mid \boldsymbol{x}(t + T) = \boldsymbol{x}(t)\right\}$, 记 $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{[0, T]} |\boldsymbol{x}(t)|$, 则 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下为 Banach 空间•　考虑算子方程

$$\mathrm{L}\boldsymbol{x} = \lambda \mathrm{N}\boldsymbol{x} \qquad \lambda \in [0, 1],$$

这里 $\mathrm{L}: \mathrm{Dom}\,\mathrm{L} \cap X \to X$ 是线性算子, 定义投影算子 P、Q 分别为

$$\mathrm{P}: X \cap \mathrm{Dom}\,\mathrm{L} \to \mathrm{Ker}\,\mathrm{L}, \quad \mathrm{Q}: X \to X/\mathrm{Im}\,\mathrm{L},$$

$$\mathrm{P}\boldsymbol{x} = \mathrm{Q}\boldsymbol{x} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t, \qquad \boldsymbol{x} \in X\,•$$

利用重合度理论, Mawhin[1]得到如下结果:

引理　设 X 是 Banach 空间, L 是指标为零的 Fredholm 算子, $\mathrm{N}: \Omega \to X$ 是 L 紧的, 其中 Ω 是 X 中的有界开集, 且满足

(i) $\mathrm{L}\boldsymbol{x} \neq \lambda \mathrm{N}\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Dom}\,\mathrm{L}$, $\lambda \in (0, 1)$;

(ii) $\mathrm{QN}\boldsymbol{x} \neq 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{L}$;

(iii) $\deg\left\{\mathrm{QN}\boldsymbol{x}, \Omega \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{L}, 0\right\} \neq 0$,

---

* 收稿日期:　1998_04_23;　修订日期:　1999_02_07
作者简介:　黄先开(1964~), 男, 副教授, 博士.

则方程 $Lx = Nx$ 在 Ω 中至少存在一个 T 周期解。

记 $\lambda_m(t, x)$ 为矩阵 $(A(t, x) + A^T(t, x))/2$ 的最小特征值, $\mu_m(t, x)$ 为矩阵 $(-A(t, x) - A^T(t, x))/2$ 的最小特征值。

定理 1 假设存在常数 a、b、c、d、e, 对 $\forall(t, x) \in [0, T] \times R^n$ 满足

1) $|f(t, x)| \leqslant a|x| + b$;

2) $\lambda_m(t, x) \geqslant c > a$ 或 $\mu_m(t, x) \geqslant c > a$;

3) $\|A(t, x)\| \leqslant d|x| + e$;

则方程(1)至少存在一个 T 周期解。

证明 令 $Lx = x'$, $Nx = A(t, x(t))x(t) + f(t, x(t-\tau))$。

考虑算子方程

$$Lx = \lambda Nx \qquad \lambda \in (0, 1)$$

即
$$x'(t) = \lambda A(t, x)x + \lambda f(t, x(t-\tau)). \tag{3}$$

设 $x(t)$ 是(3)的任一 T 周期解, 下证 $x(t)$ 关于 λ 一致有界。(3)式两边同乘以 $x(t)$ 并从 0 到 T 积分得

$$\int_0^T \lambda x^T A(t, x)x\,dt + \int_0^T \lambda x^T f(t, x(t-\tau))\,dt = 0,$$

也即有
$$\int_0^T x^T \frac{A(t, x) + A^T(t, x)}{2} x\,dt + \int_0^T x^T f(t, x(t-\tau))\,dt = 0.$$

不妨设 $\lambda_m(t, x) \geqslant c > a$ 成立($\mu_m(t, x) \geqslant c > a$ 成立类似证明), 则有

$$\begin{aligned}
c\int_0^T |x|^2 dt &\leqslant \int_0^T |x||f(t, x(t-\tau))|\,dt \leqslant \\
& a\int_0^T |x||x(t-\tau)|\,dt + b\int_0^T |x|\,dt \leqslant \\
& a\left(\int_0^T |x|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |x(t-\tau)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + b\int_0^T |x|\,dt.
\end{aligned}$$

因为 $x(t)$ 为周期函数, 所以 $\int_0^T |x(t-\tau)|^2 dt = \int_0^T |x(t)|^2 dt$,

故
$$c\int_0^T |x|^2 dt \leqslant a\int_0^T |x|^2 dt + b\sqrt{T}\left(\int_0^T |x|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

即
$$\int_0^T |x|^2 dt \leqslant \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 T = R_1. \tag{4}$$

又由(3)得

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x'|\,dt &\leqslant \int_0^T |A(t, x)x|\,dt + \int_0^T |f(t, x(t-\tau))|\,dt \leqslant \\
& d\int_0^T |x|^2 dt + e\int_0^T |x|\,dt + \int_0^T a|x(t-\tau)|\,dt + bT \leqslant \\
& dR_1 + bT + (a+e)\int_0^T |x(t)|\,dt \leqslant \\
& dR_1 + bT + (a+e)\sqrt{T}\left(\int_0^T |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
& dR_1 + bT + (a+e)\sqrt{TR_1} = R_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

进一步, 由(4)、(5)易证存在 $R_3 > 0$, 使得

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant R_3 \cdot \tag{6}$$

令 $\Omega = \left\{\boldsymbol{x}(t) \in X \mid \|\boldsymbol{x}\| < R_3\right\}$, 则易验证在 Ω 上引理的条件均成立, 故由引理知(1)至少存在一个 T 周期解·

定理 2　假设存在常数 a、b、c、d, $a > c > 0$, $cT < 1$, 对 $\forall (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times R^n$ 满足

1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\ G(\boldsymbol{x}) \geqslant a|\boldsymbol{x}|^2 - b$;

2) $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant c|\boldsymbol{x}| + d$,

则方程(2)至少存在一个 T 周期解·

证明　令 $\mathrm{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$, $\mathrm{N}\boldsymbol{x} = \mathrm{grad}\ G(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau))$, 考虑算子方程

$$\mathrm{L}\boldsymbol{x} = \lambda \mathrm{N}\boldsymbol{x} \qquad \lambda \in (0, 1) \tag{7}$$

即
$$\boldsymbol{x}'(t) = \lambda \mathrm{grad}\ G(\boldsymbol{x}) + \lambda \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau)) \qquad \lambda \in (0, 1) \cdot \tag{8}$$

设 $\boldsymbol{x}(t)$ 为(8)的任一 T 周期解, 下证 $\boldsymbol{x}(t)$ 关于 λ 一致有界· (8)式两边同乘以 $\boldsymbol{x}(t)$ 并从 0 到 T 积分得

$$0 = \lambda\int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\ G(\boldsymbol{x})\mathrm{d}t + \lambda\int_0^T \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}t,$$

$$a\int_0^T |\boldsymbol{x}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} - bT \leqslant \int_0^T |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau))|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$c\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)||\boldsymbol{x}(t-\tau)|\,\mathrm{d}t + d\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$c\left(\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |\boldsymbol{x}(t-\tau)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + d\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|\,\mathrm{d}t =$$

$$c\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|^2\mathrm{d}t + d\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|\,\mathrm{d}t,$$

故有
$$(a-c)\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant d\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant d\sqrt{T}\left(\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

于是有
$$\int_0^T |\boldsymbol{x}(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{d}{a-c}\right)^2 T = R_1 \cdot \tag{9}$$

由(9)式知, 存在 $t_0 \in [0, T]$, 使得 $|\boldsymbol{x}(t_0)| \leqslant \sqrt{R_1/T}$· 从而

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{x}'(s)\mathrm{d}s \qquad t \in [0, T],$$

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant \sqrt{\frac{R_1}{T}} + \int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t \cdot \tag{10}$$

又(8)式两边同乘以 $\boldsymbol{x}'(t)$, 并从 0 到 T 积分得

$$\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|^2\mathrm{d}t = \lambda\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t) \cdot \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t-\tau))|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$c\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)| \cdot |\boldsymbol{x}(t-\tau)|\,\mathrm{d}t + d\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$c\sqrt{\frac{R_1}{T}}\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t + c\left(\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 + d\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$cT\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|^2\mathrm{d}t + \left(c\sqrt{\frac{R_1}{T}} + d\right)\int_0^T |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

于是

$$(1-cT)\int_0^T |x'(t)|^2 dt \leqslant \left(c\sqrt{\frac{R_1}{T}}+d\right)\sqrt{T}\left(\int_0^T |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^T |x'(t)|^2 dt \leqslant \left(\frac{2\sqrt{(R_1/T)}+d}{1-cT}\right)^2 T = R_2. \tag{11}$$

根据(10)、(11)得

$$|x(t)| \leqslant \sqrt{\frac{R_1}{T}}+\sqrt{T}\left(\int_0^T |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{R_1}{T}}+\sqrt{TR_2} = R_3. \tag{12}$$

令 $\Omega = \left\{x(t) \in X \mid \|x(t)\| \subset R_3\right\}$, 则易验证在 Ω 上引理的条件均满足, 故方程(2) 至少存在一个 T 周期解.

作为应用, 考虑如下单种群对数模型[2]

$$dN(t)/dt = N(t)\left\{r(t)-a_1(t)\ln N(t)-a_2(t)\ln N(t-\tau)\right\}, \tag{13}$$

其中 $r(t)$、$a_1(t)$、$a_2(t)$ 均为正的 T 周期函数.

作变换 $x(t) = \ln N(t)$, 则(13) 变为

$$x'(t) = -a_1(t)x(t)-a_2(t)x(t-\tau)+r(t). \tag{14}$$

记 $a_1 = \min_{[0,T]} a_1(t),\quad a_2 = \max_{[0,T]} a_2(t).$

利用定理 1 得:

定理 3 假设方程(14) 满足 $a_1 > a_2$, 则(14) 至少存在一个 T 周期解. 从而(13) 至少存在一个 T 周期正解.

[参 考 文 献]

[1] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[A]. Lecture Notes in Math[C], **567**, Berlin: Springer_Verlag, 1977.

[2] Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics[M]. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1992,

On the Existence of Periodic Solutions to Higher Dimensional Periodic System with Delay

Huang Xiankai[1], Dong Qinxi[2]

(1. Department of Mathematics, Beijing Institute of Business, Beijing 100037, P R China;
2. Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China)

Abstract: In this paper, higher dimensional periodic systems with delay of the form

$$x'(t) = A(t, x(t))x(t) + f(t, x(t-\tau)),$$
$$x'(t) = \text{grad}\, G(x(t)) + f(t, x(t-\tau))$$

are considered. Using the coincidence degree method, some sufficient conditions to guarantee the existence of periodic solution for these systems are obtained. As an application of the results, the existence of a positive periodic solution for a logarithmic population model is proved.

Key words: delay; periodic solution; existence; coincidence degree