文章编号: 1000_0887(1999) 09_0977_08

四元数体上的 Vandermonde 重行列式

侯仁民, 赵旭强, 王亮涛

(烟台大学 数学与信息科学系,烟台 264000)

(程昌 钧推 荐)

摘要: 讨论了四元数体上的 Vandermonde 重行列式问题, 给出了 Vandermonde 重行列式不为零的充分必要条件

关 键 词: 四元数体; 重行列式; Vandermonde 行列式
中图分类号: O156 21; O151 2 文献标识码: A

1 引言及记号说明

实 Vandermode 矩阵常用于结构的振动分析、离散 Fourier 变换、控制理论以及大系统的分散镇定性等应用领域的研究[1~3], 也是循环矩阵以及 Hadamard 矩阵等理论研究领域中必不可少的工具[4], 四元数矩阵在刚体力学尤其是多刚体力学系统中的应用也日渐重要和广泛[5~7], 因此研究四元数的 Vandermonde 矩阵问题尤其是四元数 Vandermonde 矩阵的行列式问题具有重要的实用价值 本文将主要讨论四元数 Vandermonde 矩阵的行列式问题并给出完整的结果

本文所用记号说明如下:

$\boldsymbol{Q}$ 表示四元数体

$\boldsymbol{Q}_{n\ n}$ 表示四元数体上 $n\ \ n$ 矩阵的全体

$\boldsymbol{A}^+$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭矩阵

对任意的 $\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{Q}_{n\ n}$, $\boldsymbol{A}$ 的行列式定义为:

$$|\boldsymbol{A}| = \det\boldsymbol{A} = {}_{S_n}(\ )\ \ , \tag{1}$$

其中 S_n 是 n 文字的置换群, 的循环表示应写成如下的正规式:

$$= (n i_2 i_3\ \ i_s)(n_2 j_2 j_3\ \ j_t)\ \ (n_r k_2 k_3\ \ k_l),$$

$$n > i_2, i_3, \ , i_s;\ n_2 > j_2, j_3, \ , j_t;\ \ ;\ n_r > k_2, k_3, \ , k_l,$$

$$n > n_2 > n_3 > \ \ > n_r\ \ 1,$$

$$(\ ) = (-1)^{(s-1)+(t-1)+\ +(l-1)} = (-1)^{n-r},$$

$$= (a_{ni_2} a_{i_2 i_3}\ \ q_{i_s n})(a_{n_2 j_2} a_{j_2 j_3}\ \ a_{j_t n_2})\ \ (a_{n_r k_2} a_{k_2 k_3}\ \ a_{k_l n_r}),$$

$\boldsymbol{A}$ 的重行列式

$$\boldsymbol{A}\ \ = |\boldsymbol{A}^+ \boldsymbol{A}| \tag{2}$$

收稿日期: 1998_02_25; 修订日期: 1999_04_18
作者简介: 侯仁民(1965~) , 男, 副教授, 研究方向: 一般矩阵论, 发表论文十余篇.

众所周知, 根据域上 Vandermonde 行列式不为零的条件, 实数域上的型如$f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \quad + c_nx^{n-1} + x^n$ 的n 次多项式由平面上n 个不同横坐标上的值唯一确定, 但同样的问题在四元数体上就复杂多了, 这主要是由于四元数乘法的不可交换性 对四元数体 $\boldsymbol{Q}$ 上的多项式函数$f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \quad + c_nx^{n-1} + x^n$, $c_i \quad \boldsymbol{Q}(i = 1, 2, \quad, n)$, $x \quad \boldsymbol{Q}$, 现在问怎样给出$f(x)$ 在 n 个点$a_1, a_2, \quad, a_n \quad \boldsymbol{Q}$ 上的值, $f(x)$ 才能唯一确定?实际上这归结为下列方程组是否有唯一解的问题

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2a_1 + c_3a_1^2 + \quad + c_na_1^{n-1} = f(a_1) - a_1^n, \\ c_1 + c_2a_2 + c_3a_2^2 + \quad + c_na_2^{n-1} = f(a_2) - a_2^n, \\ \\ c_1 + c_2a_n + c_3a_n^2 + \quad + c_na_n^{n-1} = f(a_n) - a_n^n, \end{array}\right\} \tag{3}$$

记 $$V_n(a_1, a_2, \quad, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & & a_n^2 \\ & & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

则(3) 式化为矩阵形式:

$$(c_1, c_2, \quad, c_n)V_n(a_1, a_2, \quad, a_n) = (f(a_1) - a_1^n, f(a_2) - a_2^n, \quad, f(a_n) - a_n^n) \tag{5}$$

根据四元数体上的矩阵理论[8, 9]知, (5) 式有唯一解的充分必要条件是 $V_n(a_1, a_2, \quad, a_n) \quad 0$

从形式上看这里的重行列式 $V_n(a_1, a_2, -, a_n)$ 与实数域上的 Vandermonde 行列式是类似的, 因此我们不妨做如下定义:

定义 1 1 称 $V_n(a_1, a_2, \quad, a_n)$ 为由 $a_1, a_2, \quad, a_n$ 构成的n 阶 Vandermonde 重行列式

下面我们讨论的主要问题是 $V_n(a_1, a_2, \quad, a_n)$ 的值与 $a_1, a_2, \quad, a_n$ 的取值之间的关系

2 重行列式的若干性质

重行列式是四元数体上线性代数理论中的一个重要概念, 它在四元数体上几个重要的矩阵问题的解决过程中起着关键的作用 关于重行列式的性质已有很多讨论, 我们把要用到的主要结论说明如下:

设 $P_n(i, j)$ 表示 n 阶单位矩阵E_n 的第i, j 两列互换所得的初等矩阵, $P_n(i, j\ )(i \quad j)$ 表示 E_n 的第j 列右乘 $\boldsymbol{Q}(\quad 0)$ 加到第 i 列所得初等矩阵, $P_n(i\ )$ 表示 E_n 的第i 列右乘 $\boldsymbol{Q}(\quad 0)$ 所得的初等矩阵

参考[8~ 10] 我们知:

对任意的 $A \quad \boldsymbol{Q}_{n \quad n}$, 我们有:

$$P_n(i, j)A = AP_n(i, j) = A , \tag{6}$$

$$P_n(i, j\ )A = AP_n(i, j\ ) = A , \tag{7}$$

$$P_n(i\ )A = AP_n(i\ ) = A = A \tag{8}$$

由以上三式可知, 将 n 阶方阵A 的第i, j 两行(或列) 互换、将A 的第i 行左乘 加到第j 行、

将 A 的第 j 列右乘 加到第 i 列, 都不改变 A 的重行列式的值; 将 A 的第 i 行左乘非零数 或第 i 列右乘 , 其重行列式的值变为原来的 倍

在[10]中我们证明了: 对 A $\boldsymbol{Q}_{n\ n}$, B $\boldsymbol{Q}_{m\ m}$, C $\boldsymbol{Q}_{n\ m}$, 有:

$$\left\|\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\right\| = \quad A \qquad B \tag{9}$$

3 四元数的若干运算性质

设 $a = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{Q}$, 引入表示法 $a = S_a + \boldsymbol{V}_a$, 其中 $S_a = a_0$ 指 a 的数量部分, $\boldsymbol{V}_a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = (a_1, a_2, a_3)$ $\boldsymbol{R}^3$ 指 a 的向量部分, 把三维向量空间中的数量积以 表示, 向量积以 表示 于是我们有: 对 a, b $\boldsymbol{Q}$, 则

$$ab = (S_a + \boldsymbol{V}_a)(S_b + \boldsymbol{V}_b) = S_aS_b - \boldsymbol{V}_a \quad \boldsymbol{V}_b + S_a\boldsymbol{V}_b + S_b\boldsymbol{V}_a + \boldsymbol{V}_a \quad \boldsymbol{V}_b \tag{10}$$

定义 3 1 对任意的 a, b $\boldsymbol{Q}$, 若存在非零的 p $\boldsymbol{Q}$ 使 $pap^{-1} = b$, 则称 a 与 b 是同类的

显然同类关系是一种等价关系, 通过计算可知:

1) a 与 b 同类 $S_a = S_b$ 且 $|\boldsymbol{V}_a| = |\boldsymbol{V}_b|$ (11)

2) 设 a 与 b 同类且 $pap^{-1} = b$, 则 a^k 与 b^k 也同类, 且 $pa^kp^{-1} = b^k$ (k 为任意自然数)

引理 3 1 设 a 与 c 同类且 a c, 则有:

$$(a - c)a(a - c)^{-1} = c \tag{12}$$

证明 要证 $(a - c)a(a - c)^{-1} = c$, 只须证 $(a - c)a = c(a - c)$

由已知有 $S_a = S_c$, 上式变为 $(\boldsymbol{V}_a - \boldsymbol{V}_c)(S_a + \boldsymbol{V}_a) = (S_c - \boldsymbol{V}_c)(\boldsymbol{V}_a - \boldsymbol{V}_c)$, 即证:

$$S_a\boldsymbol{V}_a - S_a\boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{V}_a \quad \boldsymbol{V}_a + \boldsymbol{V}_c \quad \boldsymbol{V}_a - \boldsymbol{V}_c \quad \boldsymbol{V}_a =$$
$$S_c\boldsymbol{V}_a - S_c\boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{V}_c \quad \boldsymbol{V}_a + \boldsymbol{V}_c \quad \boldsymbol{V}_a - \boldsymbol{V}_c \quad \boldsymbol{V}_c,$$

即: $S_a\boldsymbol{V}_a - S_a\boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{V}_a \quad \boldsymbol{V}_a = S_c\boldsymbol{V}_a - S_c\boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{V}_c \quad \boldsymbol{V}_c$,

由已知 $S_a = S_c$ 且 $\boldsymbol{V}_a \quad \boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_c \quad \boldsymbol{V}_c$, 上式显然成立 证毕

引理 3 2 设四元数 a, b, c 各不相等, 若 $(a - c)a(a - c)^{-1} = (b - c)b(b - c)^{-1}$, 则 a, b, c 同类

证明 已知 $(a - c)a(a - c)^{-1} = (b - c)b(b - c)^{-1}$, (13)

显然 a 与 b 是同类的, 只需证 c 与 a 同类 (13) 式变形得:

$$(a - c)(S_a + \boldsymbol{V}_a)(a - c)^{-1} = (b - c)(S_b + \boldsymbol{V}_b)(b - c)^{-1},$$

即

$$S_a + (a - c)\boldsymbol{V}_a(a - c)^{-1} = S_b + (b - c)\boldsymbol{V}_b(b - c)^{-1},$$

得

$$(a - c)\boldsymbol{V}_a(a - c)^{-1} = (b - c)\boldsymbol{V}_b(b - c)^{-1},$$

即

$$(b - c)^{-1}(a - c)\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_b(b - c)^{-1}(a - c), \tag{14}$$

将 $(b - c)^{-1} = \dfrac{1}{(b - c)}(b - c)$ 代入(14)得:

$$(b - c)(a - c)\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_b(b - c)(a - c),$$

即有: $(S_b - S_c + \boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{V}_b)(S_a - S_c + \boldsymbol{V}_a - \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_a =$

$$\boldsymbol{V}_b(S_b - S_c + \boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{V}_b)(S_a - S_c + \boldsymbol{V}_a - \boldsymbol{V}_c),$$

设 $S_b - S_c = S_0$, 则 $S_a - S_c = S_0$, 可得:

$$(S_0+\ \boldsymbol{V}_c-\ \boldsymbol{V}_b)(S_0+\ \boldsymbol{V}_a-\ \boldsymbol{V}_c)\ \boldsymbol{V}_a=\ \boldsymbol{V}_b(S_0+\ \boldsymbol{V}_c-\ \boldsymbol{V}_b)(S_0+\ \boldsymbol{V}_a-\ \boldsymbol{V}_c) \tag{15}$$

利用(10) 式及 $(\quad)=(\quad)-(\quad)$, 此处 , , $\boldsymbol{R}^3$(参见[11]), 我们有:

$$\begin{aligned}(15)\text{ 式左端}=\ & S_0^2\boldsymbol{V}_a-\ S_0\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a+\ S_0\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a-\ S_0\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a+\ S_0\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a-\ S_0\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a-\\ & (\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_c+(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_c+\ \boldsymbol{V}_c\quad (\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)-\ \boldsymbol{V}_c\quad (\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)-\\ & S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a+\ S_0\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b+(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_b-(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_b+\\ & \boldsymbol{V}_c\quad (\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)-\ \boldsymbol{V}_b\quad (\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)=\\ & S_0^2\boldsymbol{V}_a-\ S_0\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a-(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_c+(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_a-\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a+\\ & S_0\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b+(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_b-(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_b-\ \boldsymbol{V}_b\quad (\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_a)+\\ & (\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_c-(\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_a,\end{aligned}$$

同理我们有:

$$\begin{aligned}(15)\text{ 式右端}=\ & S_0^2\boldsymbol{V}_b+\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a-\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a+(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b)\boldsymbol{V}_c-(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_b-\\ & (\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_c)\quad \boldsymbol{V}_a+(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_b-(\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_a+\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b+\\ & (\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b)\boldsymbol{V}_a-(\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b)\boldsymbol{V}_c\end{aligned}$$

比较左右两端结果, 并利用 $\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a=\ \boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b$ 得:

$$\begin{aligned}& S_0\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b-\ S_0\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a+\ S_0^2\boldsymbol{V}_a+(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_a-\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a+(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_b=\\ & \quad S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b-\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a+\ S_0^2\boldsymbol{V}_b+\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a+(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_b+(\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b)\boldsymbol{V}_a\end{aligned} \tag{16}$$

比较(16) 式两端数量部分得:

$$S_0\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b-\ S_0\boldsymbol{V}_a\boldsymbol{V}_a=\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b-\ S_0\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_a,$$

即有

$$S_0(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a-\ \boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b)=\ 0$$

易知在 a, b 同类时 $\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a-\ \boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b=\ 0$ 的充要条件是 $a=\ b$, 由题设知 $\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a-\ \boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_b\quad 0$, 即有 $S_0=\ 0\quad S_a-\ S_c=\ S_0=\ 0$, 即

$$S_c=\ S_a=\ S_b \tag{17}$$

由 $S_0=\ 0$ 两比较(16) 式两端向量部分得:

$$(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_a+(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a)\boldsymbol{V}_b=(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_b+(\boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b)\boldsymbol{V}_a,$$

即

$$(\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c-\ \boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b)\boldsymbol{V}_a+(\boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a-\ \boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c)\boldsymbol{V}_b=\ 0 \tag{18}$$

由假设 a 与 b 不同且 $|\ \boldsymbol{V}_a|=|\ \boldsymbol{V}_b|$, 知 $\boldsymbol{V}_a$ 与 $\boldsymbol{V}_b$ 必线性无关, 由(18) 知

$$\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c-\ \boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b=\ \boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a-\ \boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c=\ 0,$$

即有

$$\boldsymbol{V}_c\quad \boldsymbol{V}_c=\ \boldsymbol{V}_a\quad \boldsymbol{V}_a=\ \boldsymbol{V}_b\quad \boldsymbol{V}_b \tag{19}$$

综合(11), (17), (19) 三式, 结论得证

由引理3 1、3 2 立得:

定理 3 1　设 a, b, c 是各不相同的四元数, 则 $(a-\ c)a(a-\ c)^{-1}=(b-\ c)b(b-\ c)^{-1}$ 成

立的充分必要条件是 a, b, c 同类

4 Vandermonde 重行列式的计算

设

$$V_n(a_1, a_2, \quad , a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & & a_n^2 \\ & & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, a_i \quad \boldsymbol{Q} \text{ 各不相同}, i = 1, 2, \quad , n$$

记 $a_{i0} = a_i, i = 1, 2, \quad , n$; 并设

$$a_{i1} = (a_i - a_1) a_i (a_i - a_1)^{-1} \qquad (i = 1, 2, \quad , n),$$

$$a_{ik} = (a_{i,k-1} - a_{k,k-1}) a_{i,k-1} (a_{i,k-1} - a_{k,k-1})^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{此外假设 } a_{i,k-1} \quad a_{k,k-1}, \\ k = 2, 3, \quad , n-2, \\ i = k+1, k+2, \quad , n, \end{array} \right\} \tag{20}$$

显然若固定 i, 则 a_i 与 a_{ik} 是同类的

定理 4 1　四元数体上的 Vandermonde 重行列式 $V_n(a_1, a_2, \quad , a_n) = 0$ 的充分必要条件是 $a_1, a_2, \quad , a_n$ 中至少有某 3 个数是同类的或 $a_1, a_2, \quad , a_n$ 中有某 2 个数相等, 且当 $V_n(a_1, a_2, \quad , a_n) \quad 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} V_n(a_1, a_2, \quad , a_n) = \quad & a_2 - a_1 \qquad a_3 - a_1 \qquad a_4 - a_1 \qquad a_n - a_1 \\ & a_{31} - a_{21} \qquad a_{41} - a_{21} \qquad a_{n1} - a_{21} \\ & \\ & a_{n-1,n-3} - a_{n-2,n-3} \qquad a_{n,n-3} - a_{n-2,n-3} \\ & a_{n,n-2} - a_{n-1,n-2} \quad , \end{aligned}$$

即 $$V_n(a_1, a_2, \quad , a_n) = \prod_{k=0}^{n-2} \prod_{i=k+2}^{n} a_{ik} - a_{k+1,k} \tag{21}$$

证明　当 $a_1, a_2, \quad , a_n$ 中有某 2 个数相等时, 显然 $V_n(a_1, a_2, \quad , a_n)$ 中有某两列是完全相同的, 所以必有 $V_n(a_1, a_2, \quad , a_n) = 0$, 以下我们假设 $a_1, a_2, \quad , a_n$ 是各不相同的, 在此假设下显然有 $V_2(a_1, a_2) \quad 0$

当 $n = 3$ 时, 我们有:

$$V_3(a_1, a_2, a_3) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & (a_2 - a_1) a_2 & (a_3 - a_1) a_3 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ (a_2 - a_1) a_2 (a_2 - a_1)^{-1} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) a_3 (a_3 - a_1)^{-1} (a_3 - a_1) \end{pmatrix} \right\| =$$

$$a_2 - a_1 \qquad a_3 - a_1 \qquad \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (a_2 - a_1) a_2 (a_2 - a_1)^{-1} & (a_3 - a_1) a_3 (a_3 - a_1)^{-1} \end{pmatrix} \right\| =$$

$a_2 - a_1 \qquad a_3 - a_1 \qquad a_{31} - a_{21} +$

显然当 a_1, a_2, a_3 互不相等时, $+ V_3(a_1, a_2, a_3) + = 0 Z + a_{31} - a_{21} + = 0 Z \; a_{31} - a_{21} = 0 Z \; (a_2 - a_1) a_2(a_2 - a_1)^{-1} = (a_3 - a_1) a_3(a_3 - a_1)^{-1} Z \; a_1, a_2, a_3$ 同类#

故知 $n = 3$ 时定理成立, 设 $n - 1$ 阶 Vandermonde 重行列式满足定理, 下证 n 阶情况下定理也成立#

若 $+ V_n(a_1, a_2, , , a_n) +$ 内 $a_1, a_2, , , a_n$ 中同类的数不少于 3 个, 由(6) 式不妨把同类的数移至最前面, 仍记其为 $+ V_n(a_1, a_2, , , a_n) +$ 于是我们有:

$$+ V_n(a_1, a_2, , , a_n) + = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & , & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & , & a_n \\ s & s & s & w & s \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & , & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & , & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & , & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & , & a_n \\ s & s & s & w & s \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & , & a_n^{n-2} \\ 0 & (a_2 - a_1) a_2^{n-2} & (a_3 - a_1) a_3^{n-2} & , & (a_n - a_1) a_n^{n-2} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & , & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & , & a_n - a_1 \\ 0 & (a_2 - a_1) a_2 & (a_3 - a_1) a_3 & , & (a_n - a_1) a_n \\ s & s & s & w & s \\ 0 & (a_2 - a_1) a_2^{n-3} & (a_3 - a_1) a_3^{n-3} & , & (a_n - a_1) a_n^{n-3} \\ 0 & (a_2 - a_1) a_2^{n-2} & (a_3 - a_1) a_3^{n-2} & , & (a_n - a_1) a_n^{n-2} \end{pmatrix} \right\| \overset{\text{由(8), (9)两式}}{=}$$

$$+ a_2 - a_1 + , + a_n - a_1 + @$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & , & 1 \\ (a_2 - a_1) a_2(a_2 - a_1)^{-1} & (a_3 - a_1) a_3(a_3 - a_1)^{-1} & , & (a_n - a_1) a_n(a_n - a_1)^{-1} \\ ((a_2 - a_1) a_2(a_2 - a_1)^{-1})^2 & ((a_3 - a_1) a_3(a_3 - a_1)^{-1})^2 & , & ((a_n - a_1) a_n(a_n - a_1)^{-1})^2 \\ s & s & w & s \\ ((a_2 - a_1) a_2(a_2 - a_1)^{-1})^{n-2} & ((a_3 - a_1) a_3(a_3 - a_1)^{-1})^{n-2} & , & ((a_n - a_1) a_n(a_n - a_1)^{-1})^{n-2} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$+ a_2 - a_1 + \# + a_3 - a_1 + , + a_n - a_1 + \# \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & , & 1 \\ a_{21} & a_{31} & , & a_{n1} \\ a_{21}^2 & a_{31}^2 & , & a_{n1}^2 \\ s & s & w & s \\ a_{21}^{n-2} & a_{31}^{n-2} & , & a_{n1}^{n-2} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$+ a_2 - a_1 + \# + a_3 - a_1 + , + a_n - a_1 + \# + V_{n-1}(a_{21}, a_{31}, , , a_{n1}) + \#$$

若 a_1, a_2, a_3 同类, 由定理 311 有 $a_{21} = a_{31}$, 则 $+ V_{n-1}(a_{21}, a_{31}, , , a_{n1}) + = 0$, 即知 $+ V_n(a_1, a_2, , , a_n) + = 0$#

若 $a_1, a_2, , , a_n$ 中同类的数少于3个, 则由定理311知 $a_{21}, a_{31}, , , a_{n1}$ 各不相同, 且其中同类的数也少于3个, 于是有 $+ V_{n-1}(a_{21}, a_{31}, , , a_{n1}) + X 0$, 即知 $+ V_n(a_1, a_2, , , a_n) + X 0$, 且有:

$$+ V_n(a_1, a_2, , , a_n) + = + a_2 - a_1 + \# + a_3 - a_1 + , + a_n - a_1 + @$$

$$+ V_{n-1}(a_{21}, a_{31}, , , a_{n1}) + \overset{\text{由假设}}{=}$$

$$+ a_2 - a_1 + \# + a_3 - a_1 + , + a_n - a_1 + \# + a_{31} - a_{21} + \# + a_{41} - a_{21} + ,$$

$$+ a_{n1} - a_{21} + \# + a_{42} - a_{32} + \# + a_{52} - a_{32} + , + a_{n2} - a_{32} + , + a_{n-1, n-3} - a_{n-2, n-3} + @$$

$$+ a_{n, n-3} - a_{n-2, n-3} + \# + a_{n, n-2} - a_{n-1. n-2} + =$$

$$\underset{k=0}{\overset{n-2}{F}} \; \underset{i=k+2}{\overset{n}{F}} + a_{ik} - a_{k+1, k} + ,$$

即 n 阶时定理成立, 证毕#

显然当 $a_1, a_2, , , a_n$ 可交换时, (21) 式的结果与域上 Vandermonde 行列式相一致# 至此, 本文开始提出的问题得到彻底解决#

当本文开始所讨论的多项式函数 $f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + , + c_n x^{n-1} + x^n$ 变为 $f(x) = c_1 + x c_2 + x^2 c_3 + , + x^{n-1} c_n + x^n$ 时, 依同样的讨论方式, 则对应的问题化为以下重行列是否为零的问题:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & , & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & , & a_2^{n-1} \\ s & s & s & w & s \\ 1 & a_n & a_n^2 & , & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & , & 1 \\ a_1 & a_2 & , & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & , & a_n^2 \\ s & s & w & s \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & , & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \right\| = + V_n(a_1, a_2, , , a_n) + \#$$

亦有类似结果#

[参 考 文 献]

[1] Winograd S. On computing the discrete Fourier transform[J]. Proc Nat Acad Sci U S A, 1976, 73(1): 42~ 46.

[2] Wang Shasheng, Tu Fengsheng. Extension of Vandermonde determinant and its applications to theory of control[J]. Acta Mathematica Scientia, 1984, 4(3): 329~ 337.

[3] 金朝永.Vandermonde矩阵的逆模与大系统的分散镇定性[J].高校应用数学学报(Ser.A), 1997, 12(2): 219~ 227.

[4] Davis P J. Circulant Matrices[M]. New York: Wiley, 1979.

[5] 肖尚彬.四元数矩阵的乘法及其可易性[J].力学学报, 1984, 16(2): 159~ 166.

[6] 张光枢.多刚体系统力学的四元数方法[R].北京航空学院科研报告. BH_B2361, 1986, 24~ 31.

[7] 王庆贵.四元数变换及其在空间机构位移分析中的应用[J].力学学报, 1983, 15(1): 54~ 61.

[8] Chen Longxuan. Definition of determinant and cramer solution over quaternion field[J]. Acta Math

Sinica New Series, 1991, 7(2): 171~180.

[9] Chen Longxuan. Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field[J]. Science in China Series A, 1991, 34(5): 528~540.

[10] 侯仁民.四元数体上重行列式与逆矩阵的计算[J].烟台大学学报(自然科学与工程版), 1994, 7(4): 5~9.

[11] 吴光磊,丁石孙.解析几何[M]. 北京:人民教育出版社, 1978, 60~61.

The Double Determinant of Vandermonde's Type Over Quaternion Field

Hou Renmin, Zhao Xuqiang, Wang Liangtao

(Department of Mathematics and Infomation Science,
Yantai University, Yantai, Shandong 264000, P R China)

Abstract: Based on the double determinant theory the problem about the determinant of Vandermonde's type over quaternion field is studied, and a necessary and sufficient condition that this double determinant is not equal to zero is got.

Key words: quaternion field; double determinant; Vandermonde determinant