应用数学和力学,第 20 卷 第 9 期(1999 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 09_0943_04

关于波动方程 Cauchy 问题解爆破的一个条件*

曹镇潮[1], 王碧祥[2]

(1. 厦门大学 数学系, 厦门 361005; 2. 清华大学 应用数学系, 北京 100084)

(许政范推荐)

摘要: 在 $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^+$ $(N\geqslant 2)$ 中考虑非线性波动方程: $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}u\right)=|u|^{p-1}\cdot u$, 1980 年 Kato 证明当 $1<p\leqslant\dfrac{N+1}{N-1}$ 时, Cauchy 问题的解可能在有限时刻爆破• 在本文中, 使用不同的估计方法, 把 Kato 的结果改进为 $1<p\leqslant\dfrac{N+3}{N-1}$•

关 键 词: 爆破条件; 波动方程; Cauchy 问题
中图分类号: O175.27 文献标识码: A

在 $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^+$ $(N\geqslant 2)$ 中考虑非线性波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}u\right)=|u|^{p-1}\cdot u & (x,t)\in\mathbf{R}^N\times(0,T)),\\ u(x,0)=g(x) \quad (x\in\mathbf{R}^N),\\ u_t(x,0)=h(x) \quad (x\in\mathbf{R}^N),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $u(x,t)$ 是具有有限扩散速度的非平凡解, 并且它的紧支集含在一个前推锥里 $\{(x,t)\cdot t\geqslant 0,\ |x|\leqslant t+d\}$• 1980 年 Kato[1] 通过估计 $\int_{\mathbf{R}^N}u(x,t)\mathrm{d}x$, 证明了当 $1<p\leqslant\dfrac{N+1}{N-1}$ 时解可能爆破, 他的附加假设是 $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^N}u(x,t)\mathrm{d}x\right)\Big|_{t=0}>0$ 或 $\left(\int_{\mathbf{R}^N}u(x,t)\mathrm{d}x\right)\Big|_{t=0}\neq 0$• 本文则通过估计 $\int_{\mathbf{R}^N}u^2(x,t)\mathrm{d}x$, 可将 Kato 的结果改进为 $1<p<\dfrac{N+3}{N-1}$•

定理 假设

H1) $1<p<\dfrac{N+3}{N-1}$,

H2) $a_{ij}(x)\in C^2(\mathbf{R}^N)$ 且满足椭圆条件,

H3) $g(x),h(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\mathrm{supp}\{g(x),h(x)\}\subseteq\{|x|\leqslant d\}$,

* 收稿日期: 1998_02_24; 修订日期: 1999_05_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771069)
作者简介: 曹镇潮(1946~), 男, 副教授, 主攻方向, 偏微分方程, 已发表论文 18 篇.

H4) $\int_{\mathbf{R}^N} g(x)h(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ 且 $g(x) \neq 0$, 此条件蕴含了:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^N} u^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\Big|_{t=0} \geqslant 0 \text{ 和} \left(\int_{\mathbf{R}^N} u^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\Big|_{t=0} > 0,$$

H5) $I \triangleq \frac{2}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |g(x)|^{p+1}\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} a_{ij}D_igD_jg\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} |h(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant 0$•

那么问题(1)的解 $u(x,t)$ 将在有限时刻爆破•

证明 H2)~H4) 蕴含了问题(1)存在唯一的古典解 $u(x,t)$, 我们将使用类似[2]文的方法来估计

$$w(t) \triangleq \int_{\mathbf{R}^N} u^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

首先, 在(1)中方程两边乘以 $u(x,t)$ 并在 $\mathbf{R}^N$ 上积分, 可得:

$$\frac{1}{2}w''(t) = \frac{p-1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1}\mathrm{d}x + \frac{2}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1}\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} |u_t|^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} a_{ij}D_iuD_ju\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

然后, 在(1)中方程两边乘以 u_t, 并在 $\mathbf{R}^N\times[0,t]$ 上积分, 可得: $\left(\text{注意 } a_{ij}D_iuD_ju_t = \frac{1}{2}(a_{ij}D_iuD_ju)_t\right)$

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u_t|^2\mathrm{d}x = \frac{2}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1}\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} a_{ij}D_iuD_ju\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} a_{ij}D_igD_jg\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} h^2\mathrm{d}x - \frac{2}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |g|^{p+1}\mathrm{d}x,$$

结合 H5) 得: $$\int_{\mathbf{R}^N} |u_t|^2\mathrm{d}x = \frac{2}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1}\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} a_{ij}D_iuD_ju\,\mathrm{d}x - I• \tag{3}$$

由(2)和(3)可得

$$\frac{1}{2}w''(t) = \frac{p-1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1}\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} |u_t|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^N} |u_t|^2\mathrm{d}x + I•$$

根据 H5) 即得:

$$\frac{1}{2}w''(t) \geqslant \frac{p-1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1}\mathrm{d}x, \tag{4}$$

从而 $w''(t) \geqslant 0$, $w'(t)$ 是递增的• 由H4), $w'(t) \geqslant w'(0) \geqslant 0$, 即 $w(t)$ 也是递增的• 由 H4) 可知:

$$w(t) \geqslant w(0) > 0• \tag{5}$$

另一方面, $u(x,t)$ 具有限扩散速度, 由(H3) 有:

$$w(t) = \int_{\mathbf{R}^N} |u|^2\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant t+d} |u|^2\mathrm{d}x \leqslant \left\{\int_{|x|\leqslant t+d} |u|^{p+1}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{2}{p+1}}\cdot\left\{\int_{|x|\leqslant t+d} 1\cdot\mathrm{d}x\right\}^{\frac{p-1}{p+1}},$$

即 $$w(t)^{\frac{p+1}{2}} \leqslant c_1(t+d)^{N(p-1)/2}\cdot\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1}\mathrm{d}x•$$

结合(4)可得

$$w''(t) \geqslant c_2(t+d)^{-N(p-1)/2}\cdot w(t)^{\frac{p+1}{2}}•$$

改写为:

$$w''(t) \geqslant c_0 \frac{p+3}{p-1}(t+d)^{-N(p-1)/2} \cdot w(t)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{6}$$

由(5)知 当 $t \geqslant 0$ 时, $w''(t) > 0$, 因此存在正常数 ν 使得 $w''(t) > \nu$, 从而

$$w(t) \geqslant \frac{1}{2}\nu t^2 + w'(0)t + w(0),$$

由此有:

$$w(t) \geqslant \mu(t+d). \tag{7}$$

其中 μ 是适当小的正常数.

现在在(6)式乘以 $2w'$, 易得

$$2w'\left[w'' - c_0\frac{p+3}{p-1}(t+d)^{-N(p-1)/2} \cdot w^{\frac{p+1}{2}}\right] +$$

$$\frac{4c_0}{p+1} \cdot \frac{N(p-1)}{2} \cdot (t+d)^{\frac{-N(p-1)}{2}-1} \cdot w^{\frac{p+3}{2}} > 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{(w'(t))^2 - \frac{4c_0}{p+1}(t+d)^{-N(p-1)/2} \cdot w(t)^{\frac{p+3}{2}}\right\} > 0. \tag{8}$$

由于对 $\forall t_0 > 0$ 有 $w'(t_0) > 0$, 因此我们可在(6)中取充分小的正常数 c_0 使得

$$[w'(t_0)]^2 - \frac{4c_0}{p+1}(t_0+d)^{-N(p-1)/2} \cdot w(t_0)^{\frac{p+3}{2}} > 0.$$

这样由(8)可得

$$[w'(t)]^2 - \frac{4c_0}{p+1}(t+d)^{-N(p-1)/2} \cdot w(t)^{\frac{p+3}{2}} > 0 \qquad (当\ t \geqslant t_0).$$

即

$$w'(t) \geqslant c_3(t+d)^{-N(p-1)/4} \cdot w(t)^{\frac{p+3}{4}} =$$

$$c_3(t+d)^{-N(p-1)/4} \cdot w(t)^{\frac{p-1}{4}(1-\theta)} \cdot w(t)^{\frac{p-1}{4}\theta+1}, \tag{9}$$

其中 $\theta \in (0,1)$ 是充分小的正常数使得 $0 < [N-(1-\theta)] \cdot \dfrac{p-1}{4} < 1$. $\left(注意由 H1) 有 0 < p-1 < \dfrac{4}{N-1}\right)$. 这样, 由(7)和(9)可得

$$w'(t) \geqslant c_5(t+d)^{\frac{-N(p-1)}{4}+\frac{p-1}{4}(1-\theta)} \cdot w(t)^{\frac{p-1}{4}\theta+1}.$$

记 $\alpha = \dfrac{N(p-1)}{4} - \dfrac{p-1}{4}(1-\theta)$, $\beta = \dfrac{p-1}{4}\theta + 1$, 有 $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$,
于是

$$w'(t) \geqslant c_5(t+d)^{-\alpha} \cdot w(t)^{\beta} \qquad (当\ t \geqslant t_0).$$

这一微分不等式蕴含了对某个时刻 $T_0 < +\infty$:

$$w(t) = \int_{\mathbf{R}^N} u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \to +\infty \qquad (当\ t \to T_0^-),$$

换句话说, 就是: 问题(1)的解将在有限时刻爆破.

[参 考 文 献]

[1] Kato T. Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1980, **33**(4): 501~505.

[2] Cao Zhenchao, Wang Bixiang, Guo Boling. Global existence theory for the two dimensional derivative G_L equation[J]. Chinese Science Bulletin, 1998, **43**(5): 393~395.

About a Conditon for Blow up of Solutions of Cauchy Problem for a Wave Equation

Cao Zhenchao[1], Wang Bixiang[2]

(1. Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, P R China;

2. Department of Appl1ed Mathematics, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China)

Abstract: For the nonlinear wave equation in $\mathbf{R}^N \times \boldsymbol{R}^+$ $(N \geqslant 2)$: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) = |u|^{p-1}\cdot u$, in 1980 Kato proved the solution of Cauchy problem may blow up in finite time if $1 < p \leqslant \frac{N+1}{N-1}$. In the present work his result allowing $1 < p \leqslant \frac{N+3}{N-1}$ is improved by using different estimates.

Key words: condition for blow up; wave equation; Cauchy problem