应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 09_0928_05

一类非自治系统概周期解的存在唯一性*

冯春华, 黄健民

(广西师范大学, 桂林 541004)

(林宗池推荐)

摘要: 研究高压输电网中出现的概周期振荡现象, 结合运用 Liapunov 函数, 获得了系统产生概周期振荡的先兆性条件, 为避免系统产生概周期振荡提供了参考数据•

关 键 词: 电力系统; 概周期解; 渐近稳定
中图分类号: O175.25 文献标识码: A

高压输电网给电能的生产和消费带来巨大好处• 与此同时, 也给系统注入了一些不稳定因素, 表现为各种形式的振荡并导致系统失稳• 近期内在我国华中、东北等地电网中曾出现过周期性振荡和概周期振荡[1], 危害系统安全和经济运行• 因此, 深入探讨各种形式振荡产生的机理及消除途径, 是很有意义的课题• 在文献[2] 中, 王联证明了高压输电网中的一个二阶非线性微分方程

$$\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = A\cos\omega t, \quad F(x) = \alpha x + \beta x^3$$

在条件 $0 < \beta < \dfrac{\alpha}{3M^2\left[1 + \alpha h + \dfrac{LR}{2} + \dfrac{(1+2LR)(\alpha+L)}{2RL\alpha}\right]}$,

其中 $h = \max\left\{2RL/\alpha, L/\alpha^2\right\}$ 之下存在唯一的以 $2\pi/\omega$ 为周期为渐近稳定周期解(周期振荡)• 事实上, 实际中 $F(x) = \alpha x + \beta x^{2k+1}$($k$ 为正整数) 更切合真实情况• 本文正要研究更一般概周期振荡的问题• 我们考虑系统

$$\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = Ae(t), \quad F(x) = \alpha x + \beta x^{2k+1} \tag{1}$$

其中 $e(t)$ 为概周期函数, k 为正整数, α, β 均大于0, R, L, A 为正常数• 我们证明了在适当条件下, 系统(1) 存在唯一的渐近稳定概周期解(概周期振荡)•

为着证明方便, 我们先叙述有关的定义和结论•

定义 1 设 $f(t, x) \in C(R \times D, R^n)$, 这里 D 是 R^n 中的开集, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 D 中任意紧集 S, 存在正数 $l(\varepsilon, S)$, 使得任一长度为 l 的区间至少含有一个 τ, 使

$$|f(t+\tau, x) - f(t, x)| < \varepsilon$$

对于所有 $t \in R$ 和所有 $x \in S$ 成立, 则称 $f(t, x)$ 是关于 t 对 $x \in D$ 一致概周期的•

---

* 收稿日期: 1997_06_20; 修订日期: 1999_04_15
作者简介: 冯春华(1949~), 男, 博士, 教授, 已发表论文数十篇.

由定义可知，周期函数是概周期函数的特例。因此本文的结论对 $e(t)$ 为周期函数的情形同样成立。

定义 2 对概周期系统

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2}$$

其中 $f(t, x)$ 关于 t 对 $x \in D$ 是一致概周期的。若对某个序列 $\{t_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(t + t_n, x) = g(t, x)$，则称函数 $g(t, x)$ 属于 $f(t, x)$ 的壳，记为 $g \in H(f)$。

定理 A[3] 令 Ω 是一个包含原点在内的有界集，假定系统

$$\dot{x} = P(t, x, y), \quad \dot{y} = Q(t, x, y), \tag{3}$$

在整个定义域 $I \times R^2 (t \geqslant 0)$ 上满足解的存在唯一性条件，如果存在正函数 $V(t, x, y)$，它在补集 $I \times \Omega^c$ 上有定义且极限关系 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} V(t, x, y) = \infty$ 在整个 $t \geqslant 0$ 半轴上一致成立，同时 $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)} \leqslant 0$，则系统(3) 的每个解对所有 $t \geqslant 0$ 有定义且有界。

定理 B[4] 如果对 $g \in H(f)$，系统

$$\dot{x} = g(t, x), \tag{4}$$

在 D 内有唯一解，则此解是概周期的。

我们记 $E(t) = \int_0^t e(s)\mathrm{d}s$，$E_0 = \sup\limits_{t\in R} |E(t)|$，$e_0 = \sup\limits_{t\in R} |e(t)|$。由概周期函数的性质知 e_0 有界。

本文主要结果是

定理 1 若 E_0 存在且有界，α，β，R，L，A 均为正常数，则系统(1) 的所有解有界。

证明 系统(1) 等价于下述系统

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -\frac{1}{L}F(x) - RF'(x)y + Ae(t), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中 $F(x) = \alpha x + \beta x^{2k+1}$，$F'(x) = \alpha + (2k+1)x^{2k}$。因此对任意的 x 有 $F'(x) > 0$。又由 E_0 有界，可取正常数 x_0，使当 $|x| > x_0$ 时有

$$|F(x)| > \frac{AE_0}{R} \quad \text{以及}$$

$$\frac{4}{L}R^2F'(x)\left(F^2(x) - \frac{AE_0}{R}F(x)\right) > A^2e_0^2 \quad \text{即}$$

$$-\frac{R}{L}\left(F^2(x) - \frac{AE_0}{R}F(x)\right) < -\frac{A^2e_0^2}{4RF'(x)}. \tag{6}$$

考虑函数

$$V_1 = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \frac{1}{L}F(u)\mathrm{d}u,$$

则当 $|x| > x_0$ 时

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = {} & y\dot{y} + \frac{1}{L}F(x)\dot{x} = \\ & y\left(-\frac{1}{L}F(x) - RF'(x)y + Ae(t)\right) + \frac{1}{L}F(x)y = \\ & -RF'(x)y^2 + Ae(t)y = \end{aligned}$$

$$- RF'(x)\left(y - \frac{Ae(t)}{2RF'(x)}\right)^2 + \frac{A^2e^2(t)}{4RF'(x)}.$$

注意到 $R > 0$, $F'(x) > 0$, 因此有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} < \frac{A^2e^2(t)}{4RF'(x)}. \tag{7}$$

再考虑函数

$$V_2 = \frac{1}{2}\left\{y + \int_0^x RF'(u)\mathrm{d}u - AE(t)\right\}^2 + \frac{1}{L}\int_0^x F(u)\mathrm{d}u$$

利用(6)式得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} &= (y + RF(x) - AE(t))\left(-\frac{1}{L}F(x)\right) + \frac{1}{2}F(x)y = \\ &- \frac{R}{L}\left(F^2(x) - \frac{AE(t)}{R}F(x)\right) \leqslant \\ &- \frac{A^2e^2(t)}{4RF'(x)}\end{aligned} \tag{8}$$

取 $V = V_1 + V_2$, 则由(7), (8) 两式可知, 当 $|x| > x_0$(只要 x_0 取得适当大) 就有 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} \leqslant 0$.

下面再证明对某个 y_0(y_0 也可以适当大), 当 $|x| \leqslant x_0$, $|y| > y_0$ 时也有 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} \leqslant 0$, 事实上

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} &\leqslant - R(\alpha + (2k+1)\beta x^{2k})y^2 + A|y|e(t) + \frac{AE(t)}{L}|F(x)| \leqslant \\ &- R\alpha y^2 + A|y|e_0 + \frac{AE_0}{L}(\alpha x_0 + \beta x_0^{2k+1})\end{aligned}$$

由假设知 E_0 有界, 因此只要 y_0 取得适当大, 当 $|y| > y_0$ 时有 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} \leqslant 0$. 于是我们得到一个包含原点的有界区域 $\Omega = \{(x, y): |x| < x_0, |y| < y_0\}$, 正函数 $V(t, x, y) = \frac{1}{2}(y + RF(x) - AE(t))^2 + \frac{2}{L}\int_0^x F(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}y^2$ 在 Ω 上有 $V(t, x, y) \to +\infty (x^2 + y^2 \to +\infty)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 一致成立, 而在 $I \times \Omega^c (t \geqslant 0)$ 上有 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} \leqslant 0$, 由定理 A 知系统(5) 亦即方程(1) 的所有解有界, 就是说存在正数 M 使 $|x| < M$, $|y| < M$ 对 $t \in R$ 成立.

定理 2　设 E_0 有界, α, β, R, L, A 均为正常数, 并且 $\frac{1}{L}(\alpha + (2k+1)\beta M^{2k}) < R^2\alpha^2$, 则系统(1) 存在概周期振荡.

证明　系统(1) 也等价于系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - RF(x), \\ \dot{y} &= -\frac{1}{L}F(x) + Ae(t). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由定理 1, 我们知道系统(9) 的所有解有界, 其界为 M. 又由于 $F(x)$ 为多项式函数, 因此可知(1) 的壳中每个方程都具有(9) 的形式, 故根据定理 B, 仅须证明(9) 的解唯一.

假设 $(x(t), y(t), (x_1(t), y_1(t))$ 是(9) 的两个解, 令 $\xi(t) = x_1(t) - x(t)$, $\eta(t) = y_1(t) - y(t)$, 并记

$$B(t)=B(x(t),\xi(t))=\begin{cases}\dfrac{R(F(x+\xi)-F(x))}{\xi} & (\xi\neq 0),\\ RF'(x) & (\xi=0),\end{cases}$$

$$C(t)=C(x(t),\xi(t))=\begin{cases}-\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{F(x+\xi)-F(x)}{\xi}\right) & (\xi\neq 0),\\ -\dfrac{1}{L}F'(x) & (\xi=0),\end{cases}$$

因为对任意的 t 均有 $\alpha\leqslant F'(x)\leqslant\alpha+(2k+1)\beta M^{2k}$, 应用微分中值定理可知 $0<R\alpha\leqslant B(t)\leqslant R\alpha+(2k+1)R\beta M^{2k}$. 文献[5] 引理 2.2 指出, 若 $0<R\alpha\leqslant B(t)\leqslant R\alpha+(2k+1)R\beta M^{2k}$, 则方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=[B(t)-z]z,$$

有对一切 t 满足 $0<R\alpha\leqslant z(t)\leqslant R\alpha+(2k+1)\beta RM^{2k}$ 的解 $z(t)$.

考虑正定函数

$$W(t)=\frac{1}{2}(\eta^2+(\eta-z\xi)^2)$$

易知 $\eta(t)$, $\xi(t)$ 是系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\xi}&=\eta-B(t)\xi\\ \dot{\eta}&=C(t)\xi\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

的解, 并且

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)}&=C(t)\xi\eta+(\eta-z\xi)[C(t)\xi-(B(t)-z)z\xi-z(\eta-B(t)\xi)]=\\&-z(z^2+C(t))\xi^2+2(z^2+C(t))\xi\eta-z\eta^2=\\&-z(z^2+C(t))\left\{\left(\xi-\frac{1}{z}\eta\right)^2-\frac{C(t)\eta^2}{z^2(z^2+C(t))}\right\},\end{aligned}\tag{11}$$

注意到 $z>0$, $C(t)<0$, 并且

$$z^2+C(t)\geqslant R^2\alpha^2-\frac{1}{L}(\alpha+(2k+1)\beta M^{2k})>0.$$

从而由(11)式知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)}<0$, 于是 W 是 t 的单调递减函数. 而 W 正定, 故当 $t_n\to\infty(n\to\infty)$ 时有 $\xi(t_n)\to 0$, $\eta(t_n)\to 0$. 因此系统(9) 的解唯一且渐近稳定. 由定理 B 知系统(9) 亦即系统(1) 存在概周期振荡

例 考虑系统

$$\ddot{x}+RF'(x)\dot{x}+\frac{1}{L}F(x)=Ae(t),\tag{12}$$

其中 $F(x)=\alpha x+\beta x^9$, α, β, R, L, A 均为正常数. $e(t)$ 是概周期函数, 且 $E(t)=\int_0^t e(s)\mathrm{d}s$ 有界, 则当 $\frac{1}{L}(\alpha+9\beta M^8)<R^2\alpha^2$ 亦即 $0<\beta<\dfrac{R^2\alpha^2L-\alpha}{9M^8}$ 时, 系统(12) 存在概周期振荡. 若 $e(t)=\cos\omega t$, 则在 $0<\beta<\dfrac{R^2\alpha^2L-\alpha}{9M^8}$ 的条件下, 系统(12) 存在周期振荡.

[参 考 文 献]

[1] 罗国俊. 对弱联络线上随机功率波动问题的探讨[J]. 电网技术, 1984, (3_4): 12~ 21.

[2] 王联. 高压输电网业务设计中出现的二阶非线性常微分方程 $\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = A\cos\omega t$, $F(x) = \alpha x + \beta x^3$ [J]. 数学的实践与认识, 1978, (1): 50~ 58.

[3] 秦元勋等. 运动稳定性理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1990.

[4] Yoshizawa. 稳定性理论与周期解和概周期解的存在性[M]. 郑祖庥等译. 南宁广西人民出版社, 1985, 167~ 175.

[5] Langenhop C E, Seifert G. Almost periodic solutions of second order nonlinear differential equations with almost periodic forcing[J]. Proc Amer Math Soc, 1959, **10**: 425~ 432.

Existence and Uniqueness of Almost Periodic Solution to a Class of Nonautonomous System

Feng Chunhua, Huang Jianmin

(Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi 541004, P R China)

Abstract: Almost periodic oscillations appearing in high_tension electricity network are considered in this paper. By utilization of Liapunov function, the foreboding conditions that result in almost periodic oscillations are obtained and thus the possibility of making precautions is presented.

Key words: electrical system; almost periodic solution; asymptotic stability