

文章编号: 1000_0887(1999) 09_0913_06

小 Bond 数条件下圆柱贮箱中液体晃动的模部分析

苟兴宇¹, 王本利², 马兴瑞³, 黄怀德⁴, 李铁寿¹

(1 北京控制工程研究所, 北京 100080; 2 哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001;
3 中国空间技术研究院, 北京 100081; 4 中国运载火箭技术研究院, 北京 100076)

摘要: 运用模部分析方法考察了小 Bond 数条件下圆柱贮箱中弯曲静液面对液体晃动模态的重构作用。研究表明, 圆柱贮箱中的液体作小幅晃动时, 参与晃动的各阶基本模态的正交性若仅由 Bessel 模部来给出, 则弯曲静液面将使各阶模态加权耦合, 形成新的特征模态; 参与晃动的各阶基本模态的正交性若由三角函数模部来给出, 则弯曲静液面将独立改变各阶模态的固有频率, 各阶模态之间不耦合。运用新的重构模态来研究圆柱贮箱中液体的横向受迫晃动, 给出了其模态选择特征。

关键词: 晃动; Bond 数; 模部; 模部分析
中图分类号: V415.4 文献标识码: A

引言

半径为 a 的圆柱贮箱中无粘、无旋、不可压缩流体的运动由下列方程描述:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 && \text{(在 } V \text{ 内),} && (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 0 && \text{(当 } r = a \text{),} && (2) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{(当 } z = -h \text{),} && (3) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 + g\phi &= 0 && \text{(当 } z = h \text{),} && (4) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 + g\phi &= 0 && \text{(当 } z = -h \text{),} && (5) \end{aligned}$$

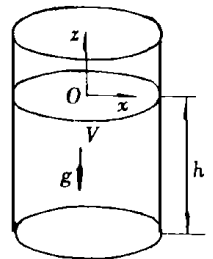


图 1 圆柱贮箱中液体的晃动

其中, (ϕ, r, z, t) 为速度势函数, (η, r, t) 为液高函数, g 为纵向加速度或(微)重力加速度。第(4)、(5)式为自由液面运动学与动力学条件。为了获得自由及受迫晃动解, 通常令^[1]

$$(\phi, \eta, z, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\cosh[k_n(z+h)]}{\cosh k_n h} \phi_n(r, t) \eta_n(t), \quad (6)$$

收稿日期: 1998_06_29; 修订日期: 1999_04_10
基金项目: 国防 95 重点预研项目资助项目(A966000_50)
作者简介: 苟兴宇(1970~), 男, 博士, 研究方向: 航天器动力学与控制。

$$(r, z, t) = f(r) + \sum_{n=1}^N n(r, z) q_n(t), \tag{7}$$

上二式中 $n(r, z)$ 称为内模态, $n(r, z)$ 称为表面模态 根据[2]文, 它们均由反映沿径向变化规律的 Bessel 模部及反映沿环向变化规律的三角函数模部构成 $f(r)$ 为弯曲自由静液面函数^[2,3], 它取决于两个关键参数: Bond 数 B_0 及液体在贮箱壁上的接触角 θ_c Bond 数大于 100 时, 自由液面静弯曲一般可以忽略不计 这时用(6), (7)式处理自由液面条件(4), (5)易得圆柱贮箱中液体作无阻尼小幅自由晃动的动力学方程组:

$$i + \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \tag{8}$$

或

$$q_i + \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{9}$$

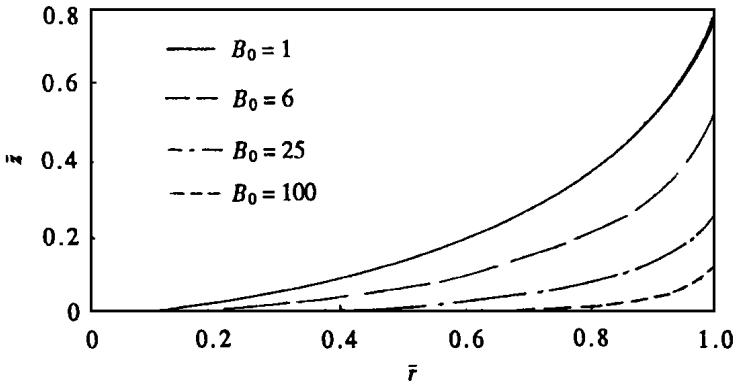


图 2 不同 Bond 数情况下圆柱箱中水的静液面形状

当 Bond 数较小且接触角 θ_c 远小于或远大于 90 时, 自由静液面会发生明显弯曲^[3] 我们称这种情况为小 Bond 数条件 图 2 给出了 $\theta_c = 5$ 时不同 Bond 数情况下圆柱贮箱中水的静液面形状 其中贮箱径向坐标及液高均已对贮箱半径作归一化处理

本文运用[2]文所提出的模部及模部分析的概念深入考察小 Bond 数条件下, 弯曲静液面对液体晃动模态的作用

1 弯曲静液面对自由晃动模态的重构

在考虑液面静弯曲的小幅晃动情况下, 自由液面边界条件(4)及(5)式分别改写为:

$$\frac{\partial}{\partial t} + f'(r) \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{当 } z = f(r)), \tag{10}$$

$$\frac{2H}{r} - g - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{当 } z = f(r)), \tag{11}$$

式中 $f(r)$ 为由 $f(r)$ 计起的波高函数, $2H$ 是自由液面平均曲率 $2H$ 中关于 r 的一阶小量部分:

$$2H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{\sqrt{1+f_r^2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{r}{\sqrt{1+f_r^2}} \right], \tag{12}$$

上式中下标 r 、分别表示函数对它们的偏导

取前述单个内模态及相应的表面模态代入(10)及(11)式, 发现不再得到象(8)及(9)那样简单的方程式, 因此有理由推测弯曲静液面已对前述模态进行了重构 为推导简单起见, 假定液体小幅自由晃动只含有两种内模态 M 及 N , 相应的表面模态为 M 及 N , 为与后面区别起

见, 称它们为基本模态 考虑到重构作用应有:

$$(r, \theta, z, t) = \sum_{n=M, N} C_n \frac{\text{ch} k_n(z+h)}{\text{ch} k_n h} \cos t, \quad (13)$$

式中 C_m 为待定系数

由(11)不难看出波高函数与速度势函数时间因子的相差为 90° , 故应令波高函数为:

$$(r, \theta, z, t) = \sum_{n=M, N} D_n \sin t, \quad (14)$$

式中 D_n 亦为待定系数

将(13)及(14)式代入(10)及(11)式中, 分别用 M 及 N 遍乘所得二式, 并在贮箱截面积 $S = a^2$ 上积分可得:

$$\sum_{m=M, N} n D_n = \sum_{m=M, N} m C_m \quad (m, n = M, N), \quad (15)$$

$$\sum_{m=M, N} m n C_m = \sum_{m=M, N} n D_n + \sum_{m=M, N} m n D_m \quad (m, n = M, N), \quad (16)$$

式中,

$$n = \int_S \frac{2}{S} n^2 dS = S, \quad (17)$$

$$m n = \frac{1}{\text{ch} k_m h} \int_S \left\{ k_m \text{sh} k_m [f(r) + h] - f(r) \frac{m}{r} \text{ch} k_m [f(r) + h] \right\} n dS, \quad (18)$$

$$m n = \frac{1}{\text{ch} k_m h} \int_S m \text{ch} [f(r) + h] n dS, \quad (19)$$

$$n = g_n, \quad (20)$$

$$m n = - \int_S \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left[\frac{r - \frac{m}{r}}{\sqrt{1 + f'^2(r)}} \right] + \frac{1}{r^2} \left[\frac{-m}{\sqrt{1 + f'^2(r)}} \right] \right\} n dS, \quad (21)$$

均为模态积分所得系数 当模态正交性由不同类型的模部正交性来给出时, 这些系数的取值是不一样的, 最终则体现为重构特征的不同

1 模态正交性仅由径向模部给定的情况

根据内模态、表面模态的模部构成特征知, 当模态正交性仅由径向模部给定时, 两种基本模态的环向模部必然相同 这时(17)~(21)式每个二重积分均可分离变量为单重积分, 并将环向模部积分结果 作为公因子提到径向 Bessel 模部积分外

由(15)及(16)式可得广义特征值问题:

$$(\lambda^2 [a_{mn}] - [b_{mn}])_{2 \times 2} \{C_n\}_{2 \times 1} = 0, \quad (22)$$

式中,

$$a_{mn} = m n, \quad (23)$$

$$b_{mn} = g_{mn} + \sum_{i=M, N} \frac{m_i - i n_i}{S} \quad (24)$$

分别为不同的两个 2×2 方阵的元素 另外

$$\{C_n\} = \begin{Bmatrix} C_M \\ C_N \end{Bmatrix} \quad (25)$$

由(22)可确定出固有频率 ω_1 、 ω_2 及相应的特征向量 $\{C_n\}_1$ 、 $\{C_n\}_2$; 再从(15)式解出 $\{D_n\}_1$ 及 $\{D_n\}_2$ 最终可得势函数 (r, θ, z, t) 的本征函数为 ϕ_1 及 ϕ_2 , 波高函数 (r, θ, z, t) 的本征函数为 H_1 及 H_2 它们均由基本模态按不同的权重叠加而得, 可称之为重构模态, 重构模态仍然

正交独立 显然, 不计表面张力及弯曲静液面时, 重构模态 H_1 退化为 $M \frac{ch_{kM}(z+h)}{ch_{kM}h}$, H_1 退化为 M , 等等

上述推导过程不难推广到多模态无阻尼自由晃动情形 因此我们可以得到以下一般性结论:

圆柱贮箱中的液体作小幅晃动时, 参与晃动的各阶基本模态的正交性若仅由 Bessel 模部来给出, 则弯曲静液面将使各阶模态加权耦合, 形成新的特征模态

2 模态正交性由环向模部给定的情况

根据基本模态的模部构成特征来考察(18)、(19)及(21)式不难看到, 在模态正交性由环向模部给定的情况下应有:

$$m_m = m_m \quad m_m, \tag{26}$$

$$m_n = m_n \quad m_n, \tag{27}$$

$$m_n = m_n \quad m_n \tag{28}$$

这时(22)式中方阵 $[a_{mn}]$ 及 $[b_{mn}]$ 均为对角阵, 故有:

$$\frac{2}{1} = \frac{b_{MM}}{a_{MM}}, \tag{29}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{b_{NN}}{a_{NN}}, \tag{30}$$

相应的特征向量为 $\{1, 0\}^T$ 及 $\{0, 1\}^T$ 于是类似地可得到以下一般性结论:

圆柱贮箱中液体作小幅晃动时, 参与晃动的各阶基本模态的正交性若由三角函数模部来给出, 则弯曲静液面将独立改变各阶模态的固有频率, 各阶模态之间不耦合

从物理本质上讲, 导致静液面弯曲的表面张力增加了基本模态的模态刚度, 因此弯曲静液面总是使基本模态的固有频率升高

2 贮箱中液体的横向受迫晃动

虽然贮箱中液体晃动阻尼通常比较小, 但自由晃动终究会被衰减掉 贮箱中液体的小幅稳态晃动实际上是外激励对模态进行选择的结果 研究表明^[3], 在小幅晃动情况下外激励不能激发对称晃动模态, 因此以偶数阶 Bessel 函数为径向模部的模态均不被选择 那么是否所有以奇数阶 Bessel 函数为径向模部的反对称模态均被选择呢?

当圆柱贮箱中液体受到如图 3 所示横向简谐加速度激励时, 自由液面动力学边界条件(11)改写为^[4]:

$$\frac{2H}{t} - g - \frac{1}{t} = 0 \quad (\text{当 } = f(r)), \tag{31}$$

式中

$$= X_0 \sin t \quad r \cos , \tag{32}$$

是质量力在圆柱截平面 S 内的投影力势函数, 其径向及环向等势线如图 4 所示 其中, 实线为径向势部的等势线, 虚线为环向势部的等势线

不考虑由模部正交性给出模态正交性的具体情况, 仍然可以统一假定参与晃动的重构模态为 b_1, b_2, \dots, b_N 及 H_1, H_2, \dots, H_N 于是可令强迫解为:

$$(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^N E_n b_n(r, \theta, z) \cos t, \tag{33}$$

$$(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^N F_n H_n(r, \theta) \sin \Omega t, \quad (34)$$

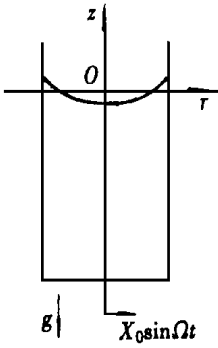


图3 圆柱贮箱中液体的横向受迫晃动

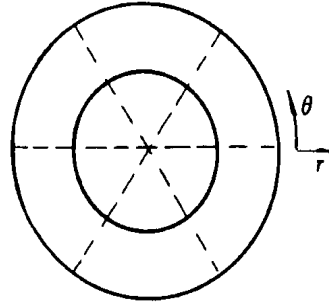


图4 横向激励力势函数在圆柱贮箱截平面内的等势线

将它们代入(10)及(31)式,并考虑到重构模态自然满足自由晃动时的液面边界条件可得:

$$E_m - F_m = 0, \quad (35)$$

$$\sum_{n=1}^N (E_n - F_n) \cos n\theta = X_0 r \cos \theta \quad (36)$$

对 $r \cos \theta$ 关于 m 作广义 Fourier 展开,其广义 Fourier 系数为:

$$G_m = \frac{\int_V r \cos \theta \cos m\theta \, dV}{\int_V \cos^2 m\theta \, dV} \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (37)$$

其中

$$G_m = \sum_{i=1}^N C_i^{(m)} \frac{\text{ch} k_i(z+h)}{\text{ch} k_i h}, \quad (38)$$

$C_i^{(m)}$ 为特征向量 $\{C_n\}_i$ 第 m 个元素 将 $r \cos \theta$ 的展开式代入(36), 联立(35) 式容易解出 E_m, F_m

根据基本模态 i 的模部构成特征知, 只有模部为 $\cos \theta$ 的基本模态才对系数 G_m 有贡献 换言之, 外激励势场 只与环向模部为 $\cos \theta$ 的基本模态耦合(这时径向模部必为一阶 Bessel 函数), 或者说液体受迫晃动模态选择性的实质是只选择那些相应模部与外激励势场分布不正交的模态 因此, 圆柱贮箱中液体的受迫晃动将不选择以 J_3, J_5, \dots 等为模部的反对称模态 显然, 模态选择性本质上应该是对内模态而言的

[参 考 文 献]

[1] Peterson Lee D, Crawley Edward F, Hansman John R. The nonlinear dynamics of a spacecraft coupled to the vibration of a contained fluid[R]. AIAA Paper, 88-2470, 1988.
 [2] 苟兴宇, 王本利, 马兴瑞, 黄怀德. 圆柱贮箱中液体晃动的模态分析[J]. 宇航学报, 1998, 19(1): 72~76.
 [3] 苟兴宇. 航天工程中的贮箱类液固耦合动力学研究[D]. 博士学位论文, 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1998, 42~56.
 [4] 黄圳圭, 赵志建. 大型航天器动力学与控制[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1990.

Modal Part Analysis of Slosh of the Liquid in a Cylindrical Container in the Case of Small Bond Number

Gou Xingyu¹, Wang Benli², Ma Xingrui³, Huang Huaide⁴, Li Tieshou¹

(1 Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100080, P R China ;

2 Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China ;

3 Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100081, P R China ;

4 Chinese Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, P R China)

Abstract: Reconstruction of liquid free slosh modes by curved quiet free surface was investigated in the case of small bond number by means of modal part analysis method in this paper. It is shown that the curved liquid quiet free surface would couple the modes to form new eigen_modes while the orthogonality of the modes which participate the liquid slosh are given only by their Bessel modal parts and it would change their eigen_frequencies respectively while the orthogonality are given by their triangle function modal parts. By studying the laterally forced slosh of the liquid in a cylindrical container based on the new eigen_modes, a characteristic of modes_choosing was found.

Key words: slosh; Bond number; modal part; modal part analysis