应用数学和力学, 第 20 卷 第 9 期(1999 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 09_0902_11

实噪声参激一类余维 2 分叉系统的最大 Lyapunov 指数(Ⅰ)*

刘先斌[1], 陈大鹏[2], 陈 虬[1]

(1. 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031;
2. 西南交通大学 工程科学研究院, 成都 610031)

摘要: 对于三维中心流形上实噪声参激的一类余维 2 分叉系统, 为使模型更具有一般性, 取系统的参激实噪声为一线性滤波系统的输出_零均值的平稳高斯扩散过程, 并满足细致平衡条件• 并在此基础上首次使用 Arnold 的渐近方法以及 Fokker_Planck 算子的特征谱展式, 求解不变测度以及最大的 Lyapunov 指数的 e_{max} 的渐近展式•

关 键 词: 实噪声; 参数激励; 余维 2 分叉; 细致平衡; FPK 方程; 奇异边界; 最大 Lyapunov 指数; 可解性条件

中图分类号: O211.63 文献标识码: A

目前有关非线性随机系统最大 Lyapunov 指数 e_{max} 的计算成为系统稳定性和随机分叉研究最主要的内容之一• 这是由于最大 Lyapunov 指数 e_{max} 是定义非线性随机系统概率 1 意义上分叉点的重要指标[1]~[5]• 对此, 众多研究者 Khasminskii[6], L. Arnold[7]~[9], Ariaratnam[10]~[12], Kozin[13], Namachchivaya[14]~[17] 以及[18]~[20]等均作了大量工作•

除了 Namachchivaya[17] 和 Ariaratnam[10] 的一些工作以外, 以往的工作主要局限于余维 1 分叉系统• 对于噪声激励的具有一个零特征值和一对纯虚特征值的余维 2 分叉系统, Namachchivaya[17] 使用随机平均法以及 Khasminskii 方法计算了相应系统的最大 Lyapunov 指数 e_{max}• 他对噪声项的系数矩阵作了严格限制, 并要求实噪声激励满足“强混合条件(strong mixing condition)”以保证随机平均法得以实施• Ariaratnam[10] 等对于四维中心流形上具有两对非共振纯虚特征值的余维 2 分叉系统受白噪声参激的情形, 运用直接的 Khasminskii 方法计算了最大 Lyapunov 指数•

为使模型更具有一般性, 本文取系统的参激实噪声为一线性滤波系统的输出_零均值的平稳高斯扩散过程, 并满足细致平衡条件[22]• 此时已不能保证参激实噪声为宽带随机过程, 而随机平均法以及直接的 Khasminskii 方法已不再适用• 对于由此产生的问题的复杂性, 本文及其后继工作, 求解不变测度以及最大 Lyapunov 指数 e_{max} 的渐近展式•

* 收稿日期: 1998_05_29; 修订日期: 1999_04_15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19602016)
作者简介: 刘先斌(1965~), 男, 博士, 副教授, 已发表论文 30 余篇.

1　线性滤波系统 Fokker_Planck 算子的特征谱

考虑一般的线性滤波系统 ——Ito 随机微分系统

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t) + \dot{\boldsymbol{W}}(t), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$ 为一 n 维的向量随机过程· 激励 $\dot{\boldsymbol{W}}(t)$ 为 n 维的零均值高斯白噪声过程且

$$\langle \dot{\boldsymbol{W}}(t+\tau)\dot{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}(t)\rangle = E[\dot{\boldsymbol{W}}(t+\tau)\dot{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}(t)] = \boldsymbol{B}\delta(\tau), \tag{2}$$

$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是 $n\times n$ 的对称非负定的常数矩阵· (1) 中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 $n\times n$ 常数矩阵· $\left\{\alpha_i, e_i, i = 1, 2, \cdots, n\right\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一组完备的特征谱· 为使系统(1) 的解过程满足稳定性条件需设特征值 $\alpha_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 具有负实部, 即 $\mathrm{Re}(\alpha_i) < 0(i = 1, 2, \cdots, n)$·

由以上的假设可知, (1) 的解过程 $\boldsymbol{u}(t)$ 为一零均值平稳的高斯扩散过程, 其相应的概率密度函数为

$$p_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u}) = N\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_u^{-1}\boldsymbol{u}\right], \quad N = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[\det\boldsymbol{K}_u]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

其中 N 为归一化常数, $\boldsymbol{K}_u = \langle\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\rangle$ 是方差矩阵· 记 $\boldsymbol{U} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵, 因此, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$·

由于方程(1) 的解为一 Markov 过程, 其微分生成算子(后向的 Kolmogorov 算子) L_u^* 和 Fokker_Planck 算子 L_u(L_u^* 的伴随算子) 分别为[22]

$$L_u^* = a_{ij}u_j\partial_{u_i} + \frac{1}{2}b_{ij}\partial^2_{u_iu_j}, \quad L_u = -\partial_{u_i}a_{ij}u_j + \frac{1}{2}b_{ij}\partial^2_{u_iu_j}, \tag{4}$$

上式中重复哑标均表示求和·

对应于以上两类算子的特征值问题分别为

$$L_u\varphi_\lambda(\boldsymbol{u}) = \lambda\varphi_\lambda(\boldsymbol{u}), \tag{5}$$

$$L_u^*\varphi^*_{\lambda'}(\boldsymbol{u}) = \lambda'\varphi^*_{\lambda'}(\boldsymbol{u})· \tag{6}$$

易证 L_u, L_u^* 具有相同的特征值[23]、[24]·

设 $\boldsymbol{u}(t)$ 满足细致平衡 (detailed balance) 条件[22], 则

$$p(\boldsymbol{u}', \tau | \boldsymbol{u}, 0)p_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u}) = p(\varepsilon\boldsymbol{u}, \tau | \varepsilon\boldsymbol{u}', 0)p_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u}'), \quad p_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u}) = p_{\mathrm{s}}(\varepsilon\boldsymbol{u})· \tag{7}$$

上式中, $\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, 对于偶(奇) 变量 u_i, $\varepsilon_i = 1(\varepsilon_i = -1)$· 此时, 若 $\phi^*(\boldsymbol{u})$ 是 L_u^* 的对应于特征值 λ 的特征函数, 则 $\phi(\boldsymbol{u}) = p_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u})\phi^*(\varepsilon\boldsymbol{u})$ 是 L_u 的对应于同样的特征值的特征函数[23], 因此只须研究特征值问题(6)·

通过变换 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{v}$, 方程(6) 可化简为

$$\alpha_k v_k\partial_{v_k}\phi^* + \frac{1}{2}b_{kl}\partial^2_{v_kv_l}\phi^* = \lambda\phi^*, \tag{8}$$

其中, b_{kl} 是对称矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^{-\mathrm{T}}$ 的元素·

为求解方程(8), 可引入两类 Hermite 多项式[23]

$$H_{m_1,\cdots,m_n}(\boldsymbol{v}) = (-1)^m\exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}\right]\partial^m_{v_1^{m_1},\cdots,v_n^{m_2}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}\right)\right],$$

$$G_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{v}) = (-1)^m \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}\right]\partial^m_{w_1^{m_1},\dots,w_n^{m_n}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}\right)\right],$$

其中 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{C}$ 为一待定的对称正定的$n \times n$矩阵• $H_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{v})$ 和 $G_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{v})$ 分别是 $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 阶的 Hermite 多项式• 可以证明, 若

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^{\mathrm T}\boldsymbol{K}_u^{-1}\boldsymbol{U}, \tag{9}$$

则 $G_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{v})$ 是方程(8) 的解• 与此同时, $\boldsymbol{C}^{-1}$ 等于 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{u}$ 的方差矩阵$\boldsymbol{K}_v$, 此时易知随机向量 $\boldsymbol{v}$ 的标准概率密度函数为

$$p_{\mathrm s}(\boldsymbol{v}) = \phi_0(\boldsymbol{u}) = N\mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm T}\boldsymbol{K}_u^{-1}\boldsymbol{u}\right]} = N\mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm T}\boldsymbol{K}_v^{-1}\boldsymbol{v}\right]} = N\mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{K}_v^{-1}\boldsymbol{w}\right]}• \tag{10}$$

因此, L_u 的对应于特征值 $\lambda_{m_1,\dots,m_n} = m_1\alpha_1 + \dots + m_n\alpha_n$ 的特征函数为

$$\phi_{m_1,\dots,m_n}(\varepsilon\boldsymbol{u}) = \phi_0(\boldsymbol{u})\phi^*_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{u}) = (-1)^m\partial^m_{w_1^{m_1},\dots,w_n^{m_n}}\phi_0(\boldsymbol{u})• \tag{11}$$

当 $m = 0$ 时, 对应于 $\lambda_0 = 0$ 的特征函数 $\phi_0(\boldsymbol{u})$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的平稳概率密度函数$p_s(\boldsymbol{u})$, 而当 $m = 1$ 时[23] •

$$[\phi_1(\varepsilon\boldsymbol{u}),\ \phi_2(\varepsilon\boldsymbol{u}),\ \dots,\ \phi_n(\varepsilon\boldsymbol{u})]^{\mathrm T} = -\nabla_w[\mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{w}\right]}] =$$
$$\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{w}\phi_0(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{u}\phi_0(\boldsymbol{u})• \tag{12}$$

由于 Hermite 多项式是一完备的函数族, 因此 $\boldsymbol{u}(t)$ 的转移概率密度函数具有展式

$$p(\boldsymbol{u}, \tau \mid \boldsymbol{u}') = \sum_{m_1=0,\dots,m_n=0}^{\omega} c_{m_1,\dots,m_n}\mathrm{e}^{[-\lambda_{m_1,\dots,m_n}\tau]}\phi_{m_1,\dots,m_n}(\varepsilon\boldsymbol{u})\phi^*_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{u}), \qquad (\tau \geqslant 0), \tag{13}$$

其中系数 $c_{m_1,\dots,m_n}$ 可由初值条件$\lim\limits_{\tau\to 0}p(\boldsymbol{u}, \tau \mid \boldsymbol{u}', 0) = \delta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')$, 以及正交化条件确定[23], 即

$$c_{m_1,\dots,m_n} = \left[\int \mathrm{d}\boldsymbol{u}\phi_{m_1,\dots,m_n}(\varepsilon\boldsymbol{u})\phi^*_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{u})\right]^{-1}• \tag{14}$$

由式(13) 可得相关函数矩阵 $\boldsymbol{R}_u(\tau)$, $\tau \geqslant 0$ 为

$$\boldsymbol{R}_u(\tau) = \langle\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{u}^{\mathrm T}(t+\tau)\rangle = \int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}^{\mathrm T}p(\boldsymbol{u}, \tau \mid \boldsymbol{u}', 0)p_{\mathrm s}(\boldsymbol{u}') =$$
$$\sum_{m_1=0,\dots,m_n=0}^{\infty} c_{m_1,\dots,m_n}\boldsymbol{r}_{m_1,\dots,m_n}\boldsymbol{r}^{\mathrm T}_{m_1,\dots,m_n}\mathrm{e}^{[-\lambda_{m_1,\dots,m_n}\tau]},$$

其中向量 $\boldsymbol{r}_{m_1,\dots,m_n}$ 定义为

$$\boldsymbol{r}_{m_1,\dots,m_n} = \int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\phi^*_{m_1,\dots,m_n}\phi_0(\boldsymbol{u})\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\phi_{m_1,\dots,m_n}• \tag{15}$$

2 随机扰动的余维 2 分叉系统

考虑确定性的具有一个零特征值和一对纯虚特征值的余维 2 分叉系统

$$\dot{r} = \mu_1 r + arz + (cr^3 + \mathrm{d}r^2 z),$$
$$\dot{z} = \mu_2 z + br^2 - z^2 + (er^2 z + fz^3),$$
$$\dot{\theta} = \omega + o(|r, z|^2),$$

在平衡点 $(r, z, \theta) = (0, 0, 0)$ 处的线性化系统受参数随机扰动的模型

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \xi(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3), \tag{16}$$

其中

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mu_1 & \omega & 0\\ -\omega & \mu_1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{3\times3}\qquad (i,j=1,2,3)\cdot \tag{17}
$$

$f(t)$ 为平稳的零均值的扩散过程． $\boldsymbol{u}(t)=(u_1=f(t),u_2,\cdots,u_n)$ 是满足方程(1) 的 n 维向量随机过程．

对参数 μ_1、μ_2 和 η 重新标度

$$
\mu_1=-\varepsilon\delta_1,\quad \mu_2=-\varepsilon\delta_2,\quad \eta=\varepsilon^{\frac{1}{2}},
$$

于是可得

$$
\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \tag{18}
$$

$$
\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}0 & \omega & 0\\ -\omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\delta_1 & 0 & 0\\ 0 & \delta_1 & 0\\ 0 & 0 & \delta_2\end{bmatrix}\cdot \tag{19}
$$

通过变换

$$
x_1=r\sin\Phi,\quad x_2=r\cos\Phi,\quad x_3=z,\quad \Phi=\omega t+\varphi(t),\quad \varphi\in[0,2\pi],
$$

可将(18) 变换为柱坐标的形式

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{r}&=-\varepsilon r\delta_1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(t)F_r,\\
\dot{\varphi}&=\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(t)\boldsymbol{F}_\varphi,\\
\dot{z}&=-\varepsilon z\delta_2+\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(t)F_z,
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&F_r=rF_{r1}+zF_{r2},\\
&F_{r1}=\frac{1}{2}[J_1+J_2\cos2\Phi+H_1\sin2\Phi],\\
&F_{r2}=b_{13}\sin\Phi+b_{23}\cos\Phi,\\
&F_\varphi=F_{\varphi1}+\frac{z}{r}F_{\varphi2},\\
&F_{\varphi1}=\frac{1}{2}[H_2+H_1\cos2\Phi-J_2\sin2\Phi],\\
&F_{r2}=b_{13}\cos\Phi-b_{23}\sin\Phi,\\
&F_z=rF_{z1}+zF_{z2},\\
&F_{z1}=b_{31}\sin\Phi+b_{32}\cos\Phi,\quad F_{z2}=b_{33},\\
&H_1=b_{12}+b_{21},\quad H_2=b_{12}-b_{21},\\
&J_1=b_{22}+b_{11},\quad J_2=b_{22}-b_{11}\cdot
\end{aligned}
$$

考虑变量 r 与 z 之间的耦合效应, 引入变换

$$
r=R\cos\theta,\quad z=R\sin\theta,\quad \rho=\ln R\qquad (\theta\in[0,\pi])\cdot
$$

可得

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\rho}&=-\varepsilon\rho_1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(t)\rho_{\frac{1}{2}},\\
\dot{\theta}&=-\varepsilon\theta_1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(t)\theta_{\frac{1}{2}},\\
\dot{\Phi}&=\omega+\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(t)F_\varphi\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\rho_1 &= \delta_1\cos^2\theta + \delta_2\sin^2\theta,\\
\rho_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(F_{r2} + F_{z1})\sin 2\theta + F_{r1}\cos^2\theta + F_{z2}\sin^2\theta,\\
\theta_1 &= \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)\sin 2\theta,\\
\theta_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(b_{33} - F_{r1})\sin 2\theta + (F_{z1}\cos^2\theta - F_{r2}\sin^2\theta),\\
F_\varphi &= \frac{1}{2}(H_2 + H_1\cos 2\Phi - J_2\sin 2\Phi) + \tan\theta(b_{13}\cos\Phi - b_{23}\sin\Phi)\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

在Namachchivaya的研究中[17],为降低非线性随机系统的维数并使得随机平均法得以实施,他假设噪声激励为一宽带平稳随机过程,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为一对称矩阵且 $b_{33} = 0$• 进一步为得到Lyapunov指数的解析显式,假设 $\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{I}_{3\times 3}$,其中,$\alpha$ 为一常数,$\boldsymbol{I}$ 为一单位阵•

本文将考虑更具有一般性的模型• 此时实噪声激励 $f(t)$ 不再要求是一宽带随机过程,因而随机平均法不再适用• 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不再为对称矩阵,但要求 $b_{13} = b_{31}$, $b_{23} = b_{32}$, $b_{33} = 0$•

3 随机分叉系统的FPK方程

根据Khasminskii的极限定理[6],可以证明,相过程 θ, Φ 以及由(1)定义的向量扩散过程 $\boldsymbol{u}(t)$ 在"弱意义(in the weak sense)"上组成一向量扩散过程• 由此可得以下的Fokker_Planck算子

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} L_{\frac{1}{2}} + \varepsilon L_1, \tag{23}$$

其中

$$L_0 = -\omega\frac{\partial}{\partial\Phi} + L_u,\quad L_{\frac{1}{2}} = -u_1\frac{\partial}{\partial\theta}\theta_{\frac{1}{2}} - u_1\frac{\partial}{\partial\Phi}F_\varphi,\quad L_1 = -\frac{\partial}{\partial\theta}\theta_1, \tag{24}$$

L_u 是对应于扩散向量过程 $\boldsymbol{u}(t)$ 的并由(4)定义的Fokker_Planck算子•

对应于扩散过程 $(\theta, \Phi, \boldsymbol{u})$,有以下的PFK方程

$$(L_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} L_{\frac{1}{2}} + \varepsilon L_1)p_\varepsilon(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) = 0, \tag{25}$$

其中 $p_\varepsilon(\theta, \Phi, \boldsymbol{u})$ 为 $(\theta, \Phi, \boldsymbol{u})$ 的平稳的联合概率密度函数•

在本文中设 $\varepsilon \ll 1$ 为一微小量,于是可知 $p_\varepsilon(\theta, \Phi, \boldsymbol{u})$ 具有以下的摄动展式

$$p_\varepsilon(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) = p_0(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}}(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) + \varepsilon p_1(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) + \cdots \tag{26}$$

将(26)代入PFK方程(25),可得以下各阶递归方程

$$\varepsilon^0:\quad L_0 p_0 = 0, \tag{27}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}:\quad L_0 p_{\frac{1}{2}} = -L_{\frac{1}{2}} p_0, \tag{28}$$

$$\varepsilon:\quad L_0 p_1 = -L_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} - L_1 p_0\cdot \tag{29}$$

在(26)中,所有函数 $p_\varepsilon(\theta, \Phi, \boldsymbol{u})$, $p_0(\theta, \Phi, \boldsymbol{u})$, …均是变量 Φ 的 2π 周期函数,即

$$\left.\begin{aligned}
p_\varepsilon(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) &= p_\varepsilon(\theta, \Phi + 2\pi, \boldsymbol{u}),\\
p_0(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) &= p_0(\theta, \Phi + 2\pi, \boldsymbol{u}),\\
p_{\frac{1}{2}}(\theta, \Phi, \boldsymbol{u}) &= p_{\frac{1}{2}}(\theta, \Phi + 2\pi, \boldsymbol{u}), \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

根据概率密度函数 $p_\varepsilon(\theta, \Phi, \boldsymbol{u})$ 的归一化条件可得

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,p_0(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=1,\\&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,p_{\frac{1}{2}}(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=0,\\&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,p_1(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

一般地, 形如 $L_0p=q$ 的方程均须满足可解性条件(solvability condition)[23]: q 必须垂直于 L_0 的伴随算子(adjoint operator) L_0^* 的核空间 $\mathrm{Ker}L_0^*=\left\{q^*\mid L_0^{**}=0\right\}$ 中的任一元素, 即

$$\langle q,q^*\rangle=0\qquad(\forall q\in\mathrm{Ker}L_0^*),\tag{32}$$

其中 $\langle *,*\rangle$ 是函数空间的内积, L_0^* 由下式定义

$$L_0^*=\omega\frac{\partial}{\partial\phi}+L_u^*,\tag{33}$$

L_u^* 是 L_u 的伴随算子, 由(4) 并考虑内积 $\langle *,*\rangle$ 的具体形式可将可解性条件记为

$$\begin{aligned}\langle q,q^*\rangle&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,q^*q=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,q^*L_0p=\\&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,qL_0^*q^*=0\qquad(\forall q^*\in\mathrm{Ker}L_0^*).\end{aligned}\tag{34}$$

由于算子 L_0^* 是单独作用于变量 ϕ 和 $\boldsymbol{u}$ 的算子的和, 因此任一 $q^*\in\mathrm{Ker}(L_0^*)$ 均可对 L_0^* 的特征函数族 $\psi^*_{m_1,\cdots,m_n}(\boldsymbol{u})$ 展开并有展式

$$q^*(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=\sum_{m_1=0,\cdots,m_n=0}^{\infty}q^*_{m_1,\cdots,m_n}(\theta,\phi)\,\psi^*_{m_1,\cdots,m_n}(\boldsymbol{u}).\tag{35}$$

由 L_0^* 的核空间 $\mathrm{Ker}(L_n^*)$ 的定义可知

$$\left[\omega\frac{\partial}{\partial\phi}+\lambda_{m_1,\cdots,m_n}\right]q^*_{m_1,\cdots,m_n}=0.\tag{36}$$

由于除 $\lambda_0=0$(对应于特征函数 $\psi_0^*(\boldsymbol{u})=1$) 之外的所有特征值的实部 $\mathrm{Re}(\lambda_{m_1,\cdots,m_n})<0$ 且由于 $\omega>0$, 于是可知, (35) 中只存在唯一的非零周期系数

$$q_0^*(\theta,\phi)=q_0^*(\theta),\tag{37}$$

即 $\mathrm{Ker}(L_0^*)$ 中的元素只由 ϕ 的任意可积函数构成. 因此可解性条件(34) 具有形式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,q(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=0.\tag{38}$$

为得到FPK 方程(25) 的摄动形式解(26), 下面将研究递归方程(27) ~ (29) 的解.

3.1　ε^0 阶 FPK 方程

考虑 ε^0 阶方程(27), 设其解 $p_0(\theta,\phi,\boldsymbol{u})$ 对于 Fokker_Planck 算子 L_u 的特征函数族 $\psi_{m_1,\cdots,m_n}(\boldsymbol{u})$ 具有展式

$$\begin{aligned}p_0(\theta,\phi,\boldsymbol{u})&=\sum_{m_1=0,\cdots,m_n=0}^{\infty}p^{(0)}_{m_1,\cdots,m_n}(\theta,\phi)\,\psi_{m_1,\cdots,m_n}(\boldsymbol{u})=\\&p_0^{(0)}(\theta,\phi)\,\psi_0(\boldsymbol{u})+\sum_{k=1}^{n}p_k^{(0)}(\theta,\phi)\,\psi_k(\boldsymbol{u})+\\&\sum_{k,l=1}^{n}p_{kl}^{(0)}(\theta,\phi)\,\psi_{kl}(\boldsymbol{u})+\cdots\end{aligned}\tag{39}$$

将上式代入(27),可知$p^{(0)}_{m_1,\dots,m_n}(\theta,\phi)$满足方程

$$\left[-\omega\frac{\partial}{\partial\phi}+\lambda_{m_1,\dots,m_n}\right]p^{(0)}_{m_1,\dots,m_n}=0. \tag{40}$$

根据可解性条件(38),在将上式对变量ϕ平均后可知,唯一存在非零周期解即为特征函数$\psi_0(\boldsymbol{u})$(对应于特征值$\lambda_0=0$)的系数$p_0^{(0)}(\theta,\phi)=p_0^{(0)}(\theta)$. 因此方程(27)的解具有形式

$$p_0(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=p_0^{(0)}(\theta)\psi_0(\boldsymbol{u}), \tag{41}$$

根据$p_0(\theta,\phi,\boldsymbol{u})$的归一化条件,可将(41)记为

$$p_0(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=\frac{1}{2\pi}F(\theta)\psi_0(\boldsymbol{u}), \tag{42}$$

其中,$F(\theta)$是待确定的θ的函数.

3.2 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$阶FPK方程

考虑$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$阶的方程(28),将(42)代入(28)的右边可得

$$L_{\frac{1}{2}}p_0=-\frac{1}{2\pi}u_1\psi_0(\boldsymbol{u})\left[\frac{\partial[\theta_{\frac{1}{2}}F]}{\partial\theta}+\frac{\partial[F\varphi F]}{\partial\phi}\right]. \tag{43}$$

方程(28)等价于

$$L_0p_{\frac{1}{2}}(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=\frac{1}{2\pi}u_1\psi_0(\boldsymbol{u})\left\{\theta_{\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial\theta}+\left[\frac{\partial\theta_{\frac{1}{2}}}{\partial\theta}+\frac{\partial F_\varphi}{\partial\phi}\right]F\right\}=$$
$$\frac{1}{2\pi}u_1\psi_0(\boldsymbol{u})[M_0+M_1\cos2\phi+M_2\sin2\phi+M_3\cos\phi+M_4\sin\phi], \tag{44}$$

其中

$$M_0=\frac{1}{2}\left(b_{33}-\frac{J_1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}[\sin2\theta F]}{\mathrm{d}\theta}, \tag{45}$$

$$M_1=-J_2F-\frac{J_2}{4}\frac{\mathrm{d}[\sin2\theta F]}{\mathrm{d}\theta},\quad M_2=-H_1F-\frac{H_1}{4}\frac{\mathrm{d}[\sin2\theta F]}{\mathrm{d}\theta}, \tag{46}$$

$$M_3=\frac{\mathrm{d}[b_{23}\cos2\theta F]}{\mathrm{d}\theta}-b_{23}\tan\theta F,\quad M_3=\frac{\mathrm{d}[b_{13}\cos2\theta F]}{\mathrm{d}\theta}-b_{13}\tan\theta F. \tag{47}$$

根据式(12)的结果,有

$$u_1\psi_0(\boldsymbol{u})=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\psi_k(\boldsymbol{u}), \tag{48}$$

其中γ_k是由(14)、(15)式定义的向量$\boldsymbol{r}_k/c_k$的分量.

设(28)的解$p_{\frac{1}{2}}(\theta,\phi,\boldsymbol{u})$对特征函数族$\psi_{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{u})$具有展式

$$p_{\frac{1}{2}}(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=\sum_{m_1=0,\dots,m_n=0}^{\infty}p^{(\frac{1}{2})}_{m_1,\dots,m_n}(\theta,\phi)\psi_{m_1,\dots,m_n}\boldsymbol{u})=$$
$$p_0^{(\frac{1}{2})}(\theta,\phi)\psi_0(\boldsymbol{u})+\sum_{k=1}^{n}p_k^{(\frac{1}{2})}(\theta,\phi)\psi_k(\boldsymbol{u})+$$
$$\sum_{k,l=1}^{n}p_{kl}^{(\frac{1}{2})}(\theta,\phi)\psi_{kl}(\boldsymbol{u})+\cdots \tag{49}$$

将(45)~(49)代入(44)可知,当$\sum_{i=1}^{n}m_i=1$时,$p^{(\frac{1}{2})}_{m_1,\dots,m_n}(\theta,\phi)=p_k^{(\frac{1}{2})}(\theta,\phi)(k=1,2,\dots,n)$满足方程

$$\left[-\omega\frac{\partial}{\partial\phi}+\lambda_k\right]p_k^{(\frac{1}{2})}=\frac{\gamma_k}{2\pi}[M_0+M_1\cos2\phi+M_2\sin2\phi+$$
$$M_3\cos\phi+M_4\sin\phi], \tag{50}$$

对于其他情况，即当 $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 1$ 时，有

$$\left[-\omega\frac{\partial}{\partial\phi}+\lambda_{m_1,\cdots,m_n}\right]p^{(\frac{1}{2})}_{m_1,\cdots,m_n}=0. \tag{51}$$

在以上的方程中，特别当 $\lambda_0=0$ 时，有

$$p_0^{(\frac{1}{2})}(\theta,\phi,\boldsymbol{u})=\frac{1}{2\pi}p_0^{(\frac{1}{2})}(\theta)\psi_0(\boldsymbol{u}). \tag{52}$$

其中 $p_0^{(\frac{1}{2})}(\theta)$ 为待定函数且满足归一化条件(31)，即

$$\int_0^{\pi}p_0^{(\frac{1}{2})}(\theta)\mathrm{d}\theta=0. \tag{53}$$

此外在方程(51)中，对应于所有的特征值 $\lambda_{m_1,\cdots,m_n}(m_1+m_2+\cdots+m_n=j, j\geqslant 2)$，有

$$p^{(\frac{1}{2})}_{m_1,\cdots,m_n}(\theta,\phi)=0.$$

易证，方程(50)的对应于特征值 $\lambda_k=\alpha_k$ 且满足可解性条件(38)的解为

$$\begin{aligned}p_k^{(\frac{1}{2})}(\theta,\phi)=\frac{\gamma_k}{2\pi}\Big\{&\frac{1}{\alpha_k}M_0+\frac{1}{(2\omega)^2+\alpha_k^2}\Big\{[\alpha_k M_1+2\omega M_2]\cos 2\phi+\\&[\alpha_k M_2-2\omega M_2]\sin 2\phi\Big\}+\frac{1}{(\omega)^2+\alpha_k^2}\times\\&\Big\{[\alpha_k M_3+\omega M_4]\cos\phi+[\alpha_k M_4-\omega M_3]\sin\phi\Big\}\Big\}.\end{aligned} \tag{54}$$

4　可解性条件与 $F(\theta)$ 的 FPK 方程

在式(49)中，$p_0^{(\frac{1}{2})}(\theta)$ 和 $F(\theta)$ 均是待定函数．下面将根据方程(29)的可解性条件确定函数 $F(\theta)$．对于应于方程(29)，其可解性条件为

$$-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}[L_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}}+L_1 p_0]=0. \tag{55}$$

由于

$$\begin{aligned}-L_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}}=\;&u_1\left\{\frac{\partial[\theta_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}}]}{\partial\theta}+\frac{\partial[F_\varphi p_{\frac{1}{2}}]}{\partial\phi}\right\}=\\&u_1\psi_0(\boldsymbol{u})\left\{\frac{\partial[\theta_{\frac{1}{2}}p_0^{\frac{1}{2}}]}{\partial\theta}+\frac{\partial[F_\varphi p_0^{\frac{1}{2}}]}{\partial\phi}\right\}+\\&u_1\psi_k(\boldsymbol{u})\left\{\frac{\partial[\theta_{\frac{1}{2}}p_k^{\frac{1}{2}}]}{\partial\theta}+\frac{\partial[F_\varphi p_k^{\frac{1}{2}}]}{\partial\phi}\right\},\end{aligned} \tag{56}$$

因此

$$-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\int L_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\phi=I_1I_2+\sum_{k=1}^{n}I_3^{(k)}I_4^{(k)}, \tag{57}$$

在上式中

$$I_1=\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}[u_1\psi_0(\boldsymbol{u})]=\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}[u_1p_s(\boldsymbol{u})]=\langle u_1(t)\rangle=0,$$

$$I_3^{(k)}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}[u_1\psi_k(\boldsymbol{u}]=\xi_k\qquad(k=1,2,\cdots,n),$$

$$I_4^{(k)}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\int_0^{2\pi}\theta_{\frac{1}{2}}p_k^{(\frac{1}{2})}\mathrm{d}\phi\right]+F_\varphi p_k^{(\frac{1}{2})}\Big|_0^{2\pi},$$

其中

$$F_\varphi p_k^{(\frac{1}{2})}\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\theta_{\frac{1}{2}}p_k^{(\frac{1}{2})}\mathrm{d}\theta=$$
$$\left\{\frac{\gamma_k J_1^2}{8\alpha_k}\frac{\mathrm{d}(\sin2\theta F)}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\gamma_k\alpha_k}{4[(2\omega)^2+\alpha_k^2]}[H_1^2+J_2^2]\times\right.$$
$$\left.\left[F+\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}(\sin2\theta F)}{\mathrm{d}\theta}\right]\right\}\sin2\theta+\frac{\gamma_k\alpha_k}{\omega^2+\alpha_k^2}[b_{13}^2+b_{23}^2]\times$$
$$\left[-\tan\theta F+\frac{\mathrm{d}(\cos2\theta F)}{\mathrm{d}\theta}\right]\cos2\theta\cdot \tag{58}$$

对于平稳的随机向量过程 $\boldsymbol{u}(t)$, 根据谱密度函数的定义可得[23]

$$S(\omega)=S_u(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_u(\tau)e^{-\omega t}\mathrm{d}\tau=-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+\omega^2}, \tag{59}$$

因此综合式(56)~(57), 可得

$$-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\int L_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\phi=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\left[\beta_0\frac{\mathrm{d}(\sin2\theta F)}{\mathrm{d}\theta}+\beta_1\left[F+\frac{\mathrm{d}(\sin2\alpha F)}{4d\theta}\right]\right]\sin2\theta+\right.$$
$$\left.\beta_2\cos2\theta\left[-\tan\theta F+\frac{\mathrm{d}(\cos2\theta F)}{\mathrm{d}\theta}\right]\right\}, \tag{60}$$

其中

$$\beta_0=\frac{J_1^2}{16}S(0),\quad \beta_1=\frac{1}{8}S(2\omega)(H_1^2+J_2^2),\quad \beta_2=\frac{1}{2}S(\omega)(b_{13}^2+b_{23}^2)\cdot \tag{61}$$

考察方程(55)右端的第二项, 有

$$-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}[L_1p_0]=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\left[\frac{\partial(\theta_1p_0)}{\partial\theta}\right]=$$
$$-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\mathrm{d}\boldsymbol{u}\left[\frac{1}{2\pi}\psi_0(\boldsymbol{u})\frac{\partial(\theta_1F)}{\partial\theta}\right]=\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin2\theta F)\cdot \tag{62}$$

综合(60)、(62)可知, 可解性条件(55)等价于以下的标准FPK方程

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}[\psi^2(\theta)F(\theta)]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\varphi(\theta)F(\theta)]=0\qquad(\theta\in[0,\pi]), \tag{63}$$

相应地, 扩散系数和漂移系数分别为

$$\psi^2(\theta)=\left(2\beta_0+\frac{1}{2}\beta_1\right)\sin^22\theta+2\beta_2\cos^22\theta \tag{64}$$

$$\varphi(\theta)=\left[\left(\beta_0+\frac{1}{4}\beta_1\right)-\beta_2\right]\sin4\theta-\left[\frac{\delta_2-\delta_1}{2}+\beta_1\right]\sin2\theta+\beta_2\cos2\theta\tan\theta \tag{65}$$

5 总　　结

本文及其后继工作考查了小参数实噪声激励对于余维2分叉系统行为的影响• 为使模型更具有一般性, 取系统的参激实噪声为一线性滤波系统的输出_零均值的平稳高斯扩散过程并满足细致平衡条件, 因而随机平均法不再适用•

本文使用L.Arnold的渐近方法以及Fokker_Planck算子的特征谱展式建立了随机分叉系统的FPK方程, 并进一步建立 ε^0 阶、$\varepsilon^{(1/2)}$ 阶、ε^1 阶FPK方程及其相应的解• 为确定解函数中的未知函数 $F(\theta)$, 本文考查了 ε^1 阶FPK方程的可解性条件并根据此建立了 $F(\theta)$ 满足的FPK方程•

[参 考 文 献]

[1] Arnold L, Wihstutz V. Lyapunov Exponents[M]. Lecture Notes in Mathematics, **1186**. Berlin: Springer_Verlag, 1986.

[2] Arnold L, Crauel H, Eckmann J P. Lyapunov Exponents[M], Lecture Notes in Mathematis, **1486**. Berlin: Springer_Verlag, 1991.

[3] 刘先斌. 随机力学系统的分叉行为与变分方法研究[D]. 博士学位论文. 成都: 西南交通大学, 1995.

[4] 刘先斌, 陈虬, 陈大鹏. 非线性随机动力学系统的稳定性和分岔研究[J]. 力学进展, 1996, **26**(4): 437 ~ 453.

[5] 陈虬, 刘先斌. 随机稳定性和随机分岔研究进展[R]. 第七届现代数学和力学大会邀请报告. 1997 年 11 月, 上海.

[6] Khasminskii R Z. Stochastic Stability of Differential Equations[M]. Alphen aan den Rijin, the Netherlands: Sijthoff and Noordhoff, 1980.

[7] Arnold L, Papanicolaou G, Wihstutz V. Asympototic analysis of the Lyapunov exponents and rotation numbers of the random oscilltor and applications[J]. SIAM J Appl Math, 1986, **46**(3): 427~ 450.

[8] Arnold L. Lyapunov exponents of nonlinear stochastic systems[A]. In: F Ziegler, G I Schueller eds. Nonlinear Stochastic Dynamic Engrg Systems, Berlin, New York: Springer_Verlag, 1987, 181~ 203.

[9] Arnold L, Boxler P. Eigenvalues, bifurcation and center manifolds in the presence of noise[A]. In: C M Dafermos, G Ladas, G. Papannicolaou eds. Differential Equations [M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1990, 33~ 50.

[10] Ariaratnan S T, Xie W C. Sensitivity of pitchfork bifurcation to stochastic perturbation[J]. Dyna & Stab Sys, 1992, **7**(3): 139~ 150.

[11] Ariaratnam S T, Xie W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled linear systems under real noise excitation[J]. ASME J Appl Mech, 1992, **59**(3): 664~ 673.

[12] Ariaratnam S T, Xie W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of two_dimensional parametrically excited random systems[J]. ASME J Appl Mech, 1993, **60**(5): 677~ 682.

[13] Kozin F. Stability of the Linear Stochaxtic Systems[M]. Lecture Notes in Math, **294**. New York: Springer_Verlag, 1972, 186~ 229.

[14] Namachchivaya Sri N, Ariaratnam S T. Stochastically perturbed Hoph bifurcation[J]. Int J Nonlinear Mech, 1987, **22**(5): 363~ 373.

[15] Namachchivaya Sri N. Stochastic stability of a gyropendulum under random vertical support excitation[J]. J Sound & Vib, 1987, **119**(2): 363~ 373.

[16] Namachchivaya Sri N. Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitation[J]. ASME J Appl Mech, 1998, **55**(4): 923~ 930.

[17] Namachahivaya Sri N, Talwar S. Maximal Lyapunov exponent and rotation number for stochastically peturbed co_dimension two bifurcation[J]. J Sound & Vib, 1993, **169**(3): 349~ 372.

[18] 刘先斌, 陈虬, 陈大鹏. 白噪声参激 Hopf 分岔系统的两次分岔研究[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(9): 779~ 788.

[19] 刘先斌, 陈虬. 实噪声参激 Hopf 分岔系统研究[J]. 力学学报, 1997, **29**(2): 158~ 166.

[20] 刘先斌, 陈虬, 孙训方. 白噪声参激一类余维 2 分岔系统研究[J]. 力学学报, 1997, **29**(5): 563~ 572.

[21] Pardoux E, Wihstutz V. Lyapunov exponent and rotation number of two_dimensional linear stochastic systems with small diffusion[J]. SIAM J Appl Math, 1988, **48**(2): 442~ 457.

[22] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

[23] Roy R V. Stochastic averaging of oscillators excited by coloured Gaussian processes[J]. Int J Nonlinear Mech, 1994, **29**(4): 461~ 475.

[24] Dygas M M K, Matkowsky B J, Schuss Z. Stochastic stability of nonlinear oscillators[J]. SIAM J Appl Math, 1988, **48**(5): 1115~ 1127.

On the Maximal Lyapunov Exponent for a Real Noise Parametrically Excited Co_Dimension Two Bifurcation System(Ⅰ)

Liu Xianbin[1], Chen Dapeng[2], Chen Qiu[1]

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China;

2. Institute of Engineering Science, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China)

Abstract: For a real noise parametrically excited co_dimension two bifurcation systems on a three_dimensional central manifold, a model of enhanced generality is developed in the present paper by assuming the real noise to be an output of a linear filter system, namely, a zero_mean stationary Gaussian diffusion process that satisfies the detailed balance condition. On such basis, asymptotic expansions of invariant measure and maximal Lyapunov exponent for the relevant system are established by use of Arnold asymptotic analysis approach in parallel with the eigenvalue spectrum of Fokker_Planck operator.

Key words: real noise; paramatric excitation; co_dimension two bifurcation; detailed balance condition; FPK equation; singular boundary; maximal Lyapunov exponent; solvability condition