

文章编号: 1000-0887(1999)09-0896-06

非线性热弹耦合椭圆板的混沌运动

韩 强¹, 张年梅², 杨桂通²

(1 华南理工大学 交通学院 力学系, 广州 510641; 2 太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

摘要: 计及几何非线性大挠度效应和温度效应的影响, 导出了椭圆板周期激励作用下热弹耦合的非线性动力方程, 利用 Melnikov 函数法给出了系统发生混沌运动的临界条件, 结合 Poincaré 映射、相平面轨迹和时程曲线进行数值分析, 并对系统通向混沌的道路进行了讨论, 从中得到了一些有益的结论

关键词: 热弹耦合; 混沌; Melnikov 函数法; Poincaré 映射

中图分类号: O343.5 文献标识码: A

引 言

温度效应对板振动影响的问题长期以来在宇航、化学、核能和机械工程等领域一直受到人们的广泛关注, 相应的理论分析在某些情形下需要考虑非线性效应的影响, 这种非线性一般来自三个方面, 1) 物理非线性; 2) 几何非线性; 3) 非线性边界条件 对此类非线性问题, 以往的分析方法, 如摄动法、平均法、KBM 法、多重尺度法等得到了十分广泛的应用 然而, 这些方法只能用来研究当系统的各个参数为确定常数时的周期解 另一方面, 近年来混沌动力学的不断发展和完善极大地丰富了非线性科学的研究领域, 为许多古老的研究课题注入了新的活力, 为力学学科的发展提供了新的动力

在固体力学领域内, 人们对混沌问题的研究大都仅限于屈曲梁的受迫振动或模型分析, 相应的非线性模型大都可以归结为 Duffing 方程, 而对板或壳体的混沌问题则极少涉及

本文考虑几何非线性效应和温度效应的影响, 建立了椭圆板周期激励作用下热弹耦合的非线性动力方程, 利用 Melnikov 函数法给出了系统发生混沌运动的临界条件, 结合 Poincaré 映射、相平面轨迹和时程曲线进行数值分析, 并对系统通向混沌的道路进行了讨论, 揭示出弹性动力系统的极端复杂性

1 基本方程

考虑图 1 所示的周边固支弹性椭圆板, 为简便起见, 我们仅考虑横向惯性而忽略板的转动惯性和剪切效应, 并假定材料性能是与温度无关的常数, 因此可以建立计及几何非线性效应热弹耦合板的动力方程:

收稿日期: 1996_12_16; 修订日期: 1999_04_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672038); 山西省自然科学基金资助项目(1880342)

作者简介: 韩强(1963~), 男, 博士, 教授, 研究方向: 弹塑性力学等, 发表论文 40 余篇.

$$\left. \begin{aligned} D^4 W + h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \rho (1 + \nu) D^2 M_T - h L(\phi, W) + \frac{W}{t} = q(x, y, t), \\ \rho + E \nu^2 N_T = -\frac{1}{2} E L(W, W), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

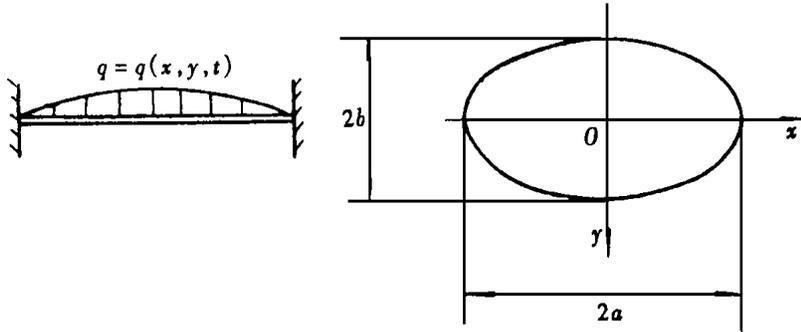


图 1

其中 $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $L(\phi, W) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, E : 弹性模量, ν : 泊松比, ρ : 热膨胀系数, h : 板厚, γ : 阻尼系数, ρ : 材料密度, q : 横向载荷, ϕ : 应力函数, M_T : 温度效应引起的附加热弯矩, N_T : 温度效应引起的附加热薄膜力

$$\left. \begin{aligned} M_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y) z dz = 0, N_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y) dz = T(x, y), \\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

相应的边界条件为:

$$W = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

椭圆板的边界由下述方程给定:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

横向载荷:

$$q = P \cos \omega t, \quad (5)$$

取以下量纲一的参数:

$$\begin{aligned} X = x/a, Y = y/b, W = W/h, \tau = \omega t / \omega_0, \\ \omega_0 = \omega_0 t = t [D / (ha^4)]^{1/2}, N_T = N_T a^2 \rho / h, \\ \phi = \phi / (Eh^2), \psi = \psi a^4 / D, P = Pa^4 / (Dh) \end{aligned}$$

相应的量纲一化方程为:

$$\left. \begin{aligned} D^4 W + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - 12(1-\nu^2) L(\phi, W) + \frac{W}{\tau} = P \cos \tau, \\ D^4 + \frac{1}{2} L(W, W) + N_T = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

边界条件化为:

$$W = \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 (X^2 + Y^2 = 1) \quad (7)$$

设板中温度场呈抛物型分布:

$$T(x, y) = T_0 \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right], \quad (8)$$

其中 T_0 为常数 设板的横向位移模式由下式给定:

$$W = Z(\cdot)(X^2 + Y^2 - 1)^2 \quad (9)$$

显然, 由(9)式给定的位移模式满足边界条件(7), 将(8)、(9)两式代入(6)式第二式有:

$$4 + 16Z^2(\cdot) [(3X^2 + Y^2 - 1)(3Y^2 + X^2 - 1) - 4X^2Y^2] - 4K = 0, \quad (10)$$

其中 $K = a^2 T_0 \cdot / h$, 由上式不难求得应力函数之特解为:

$$= \frac{K}{6} X^4 - 8Z^2(\cdot) \left[\frac{1}{12} X^4 Y^4 + \frac{1}{420} (X^8 + Y^8) - \frac{1}{45} (X^6 + Y^6) + \frac{1}{12} X^4 \right] \quad (11)$$

将(11)式代入(6)式第一式并利用 Galerkin 原理:

$$\int_A \left\{ 64Z(\cdot) + Z(\cdot)(X^2 + Y^2 - 1)^2 - 12(1 - \cdot^2) \left[-32Z^3(\cdot)(3X^2 + Y^2 - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \left(X^4 Y^2 + \frac{14}{105} Y^6 - \frac{2}{3} Y^4 \right) - 32Z^3(\cdot)(3Y^2 + X^2 - 1) \left(X^2 Y^4 + \frac{14}{105} X^6 - \frac{2}{3} X^4 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 8KZX^2(3Y^2 + X^2 - 1) + \frac{512}{3} Z^3(\cdot) X^4 Y^4 \right] + Z(\cdot)(X^2 + Y^2 - 1)^2 - \right. \\ \left. P \cos \cdot \right\} (X^2 + Y^2 - 1)^2 dx dy = 0, \quad (12)$$

积分并整理有:

$$Z + Z - Z^3 = [g \cos \cdot - Z], \quad (13)$$

式中

$$= \frac{64}{15} + 8K(1 - \cdot^2), \quad = \frac{1}{21}(1 - \cdot^2), \quad g = \frac{5P}{3}, \quad = -, \quad (14)$$

为一正的小参量

2 混沌运动分析

非线性动力系统(13)对应的无扰动系统是:

$$Q = Z, \quad Q = -Z + Z^3, \quad (15)$$

其首次积分为:

$$H = \frac{1}{2} Z^2 + \frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{4} Z^4 \quad (16)$$

由此不难判定, 它有三个不动点 $O(0, 0)$ 是中心,

$A \left(-\sqrt{-}, 0 \right)$ 及 $B \left(\sqrt{-}, 0 \right)$ 均为鞍点, 在相平面上其轨迹如图2所示

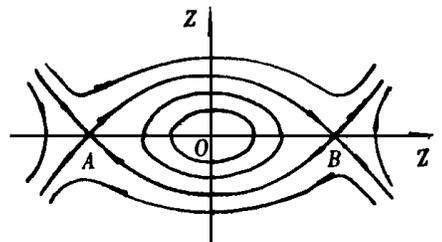


图 2

此时通过 A, B 两点的轨道为异宿轨道, 其方程可由(17)式确定:

$$Z^*(\cdot) = \sqrt{-} \frac{\text{sh} \left[\frac{\sqrt{-}}{2} \right]}{\text{ch} \left[\frac{\sqrt{-}}{2} \right]}, \quad (17)$$

定义 Melnikov 函数为:

$$M(t_0) = - \int_{-}^{+} Z^*{}^2 d + g \int_{-}^{+} Z^* \cos (\ + t_0) d , \tag{18}$$

注意到第一个积分表示异宿轨道围成的面积, $\int_{-}^{+} Z^*{}^2 d = \frac{2}{3} \sqrt{2}$, 第二个积分可以变形为:

$$\int_{-}^{+} Z^* \cos (\ + t_0) d = \frac{\cos t_0}{\sqrt{2}} \int_{-}^{+} \frac{\cos d}{\text{ch}^2(\sqrt{2}/2)} d , \tag{19}$$

结合留数定理计算此积分值, 即得 Melnikov 函数为:

$$M(t_0) = - \frac{2}{3} \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\cos t_0}{\text{sh}[\ / \sqrt{2}]} \tag{20}$$

这个 Melnikov 函数如果有根, 则稳定流形和不稳定流形相交, Poincare 映射有马蹄, 从而存在着奇怪的不变集合, 对我们研究的耗散系统, 就有可能出现混沌, 由 $M(\) = 0$ 我们有:

$$\frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{g} \text{sh} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1, \tag{21}$$

因此发生混沌的临界条件可表为:

$$P = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{g} \text{sh} \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{22}$$

这就是非线性动力系统发生混沌的临界条件

我们固定外激励频率, 讨论阻尼 和 外激励幅值 g 变化时, 非线性动力系统的响应, 采用 Melnikov 函数法, 结合 Poincare 映射、相平面轨迹和时程曲线不难判定图 3 代表着非线性动力系统的的一个定常运动 图中各量单位均为国际单位

特别值得指出的是, 在各组参数下, 我们反复搜索均未能找到混沌解, 这表明系统非常易于过早地发散而得不到混沌解, 从能量观点来看, 就是耗散作用不足以阻止系统越过势能的高峰, 这从图 2 就可以清楚地看出, 只要稍微偏离 A 或 B 点, 系统就将给出发散解

3 通向混沌道路

此时无扰动系统有三个平衡态即 $O(0, 0)$, $A\left[-\sqrt{\frac{1}{N}}, 0\right]$ 及 $B\left[\sqrt{\frac{1}{N}}, 0\right]$, 其中 O 为中心, 而 A, B 为鞍点, 故在此种情形, 该动力系统为单井势

令 $H = - \frac{2k^2}{(1+k^2)}$, 积分(16) 式即得周期轨道:

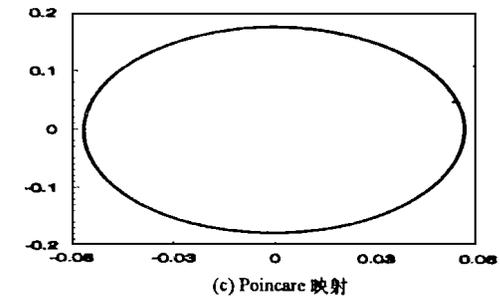
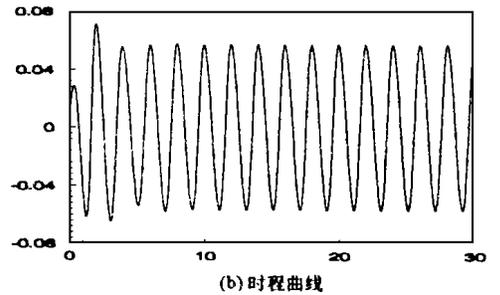
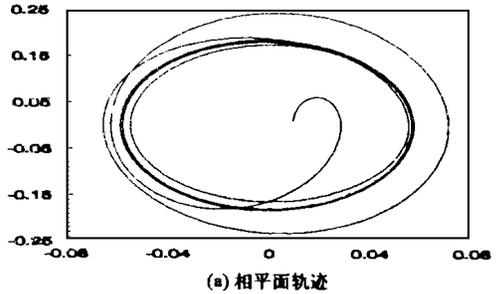


图 3 $\omega = 20, \zeta = 86, \gamma = 1$, $\mu = 1.2, g = 0.8, \delta = 1$

$$\left. \begin{aligned} Z^k(\cdot) &= \sqrt{\frac{2ak^2}{N(1+k^2)}} \operatorname{sn} \left[\sqrt{\frac{2}{N(1+k^2)}} \cdot, k \right], \\ Z^k(\cdot) &= \frac{k}{1+k^2} \sqrt{\frac{2}{N(1+k^2)}} \operatorname{cn} \left[\sqrt{\frac{2}{N(1+k^2)}} \cdot, k \right] \operatorname{dn} \left[\sqrt{\frac{2}{N(1+k^2)}} \cdot, k \right], \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其周期为:

$$T(k) = 4 \sqrt{1+k^2} K(k) \quad (24)$$

当 k 逐渐增大时, 周期轨道的能量也逐渐增大, 周期变长. 上述各式中 $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ 为 Jacobi 椭圆函数, $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分

满足 $T(k) = 4 \sqrt{1+k^2} K(k) = \frac{2m}{n}$ (m, n 为互质整数) 的次谐轨道的 Melnikov 函数为:

$$M^n(t_0) = -2(m, n) + g^{-1}(m, n) \cos t_0, \quad (25)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} 2(m, n) &= \frac{8n}{3} \sqrt{\frac{2}{N(1+k^2)}}^3 [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)], \\ 1(m, n) &= \begin{cases} 0 & (n=1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}), \\ \frac{2m}{K(k)} \sqrt{\frac{2}{N(1+k^2)}} \operatorname{sh} \left(\frac{mK}{2K} \right) & (n=1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}), \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 $E(k)$ 为第二类完全椭圆积分, $K(k) = K(\sqrt{1-k^2})$. 当 $n=1$ 时, $M^n(t_0)$ 有简单零点, 此时系统出现次谐轨道, 即要求:

$$g > \left(\frac{g}{\operatorname{cr}} \right) = R_{21}, \quad (27)$$

$$R_{21} = \frac{4}{3} \frac{1}{1+k^2} \sqrt{\frac{2}{N(1+k^2)}} \frac{K(k)}{m} [(k^2-1)K + (k^2+1)E] \operatorname{sh} \frac{mK}{2K} \quad (28)$$

由上述分析不难看出, 当 $m \rightarrow 1$ 时, $K \rightarrow 1$, R_{21} 将趋向于由(21)式给定的发生混沌运动的门槛值, 即随着 g/cr 的增加, 非线性动力系统(13)经历了无限次奇阶次谐分叉进入马蹄变换意义下的混沌

上述理论和数值分析表明, 非线性热弹耦合椭圆板在横向周期激励下存在着发生混沌运动的可能, 在发生混沌运动前, 系统经历了无限次奇阶次谐分叉, 因此, 为估计受热板未来的振动状态, 必须研究其发生混沌运动的可能, 使其避开发生混沌运动的区域, 否则对受热板动力特性进行的数值计算或实验研究可能将是毫无意义的

[参 考 文 献]

- [1] Holms P, Marsden J. A partial differential equation with infinitely many periodic orbits: chaotic oscillation of a forced beam[J]. Arch Rat Mech and Analysis, 1981, 76(2): 135~ 165.
- [2] Daniela Dinca Baran. Mathematical models used in studying the chaotic vibration of buckled beam [J]. Mechanics Research Communications, 1994, 21(2): 189~ 196.
- [3] Poddar B, Moon F C, Mukherjee S. Chaotic motion of an elastic-plastic beam[J]. JAM, 1988, 55 (1): 185~ 189.
- [4] 张年梅, 杨桂通. 非线性弹性梁的动态次谐分叉与混沌运动[J]. 非线性动力学学报, 1996, 3(2): 265~ 274.

- [5] 韩强, 张善元, 杨桂通. 横向载荷作用下弹性拱的混沌运动[J]. 固体力学学报(增刊), 1997, **18**: 67 ~ 71.
- [6] 韩强. 几种结构的动力屈曲、分叉和混沌运动研究[D]. 博士学位论文. 太原: 太原工业大学, 1996.

Chaotic Motion of a Nonlinear Thermoelastic Elliptic Plate

Han Qiang¹, Zhang Nianmei², Yang Guitong²

(1 Department of Mechanics, Jiaotong Institute, South China

University of Technology, Guangzhou 510641, P R China;

2 Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology,
Taiyuan 030024, P R China)

Abstract: In the paper the nonlinear dynamic equation of a harmonically forced elliptic plate is derived, with the effects of large deflection of plate and thermoelasticity taken into account. The Melnikov function method is used to give the critical condition for chaotic motion. A demonstrative example is discussed through the Poincaré mapping, phase portrait and time history. Finally the path to chaotic motion is also discussed. Through the theoretical analysis and numerical computation some beneficial conclusions are obtained.

Key words: thermoelasticity; chaos; Melnikov function; Poincaré mapping