应用数学和力学, 第 20 卷 第 10 期(1999 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 10_1051_06

弹性力学问题解唯一的边界积分方程*

周慎杰[1], 曹志远[2], 孙树勋[3]

(1. 山东工业大学 化学工程系, 济南 250061; 2. 同济大学 工程力学与技术系, 上海 200092;
3. 山东工业大学 工程力学研究所, 济南 250061)

(汤任基推荐)

摘要: 从积分方程式出发, 应用基本解的特性分析, 说明在力边值问题中, 位移边界积分方程和面力边界积分方程的位移解不唯一· 提出了位移解唯一的条件, 建立了唯一解的位移边界积分方程和面力边界积分方程· 实例计算结果表明唯一解的边界积分方程是有效的·

关 键 词: 边界积分方程; 边界元法; 弹性力学
中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

边界元法是继有限元法之后发展起来的一种有效的数值分析方法, 因其计算工作量少, 特别适用于奇异场和无限边界问题而受到人们的重视· 边界元法的理论基础是边界积分方程, 以往的边界元法研究工作大都基于 Rizzo 型位移边界积分方程· 最近, 胡海昌院士发现这种类型的边界积分方程对于二维问题有时面力解不唯一, 提出了超定问题有解的充要条件, 建立了与弹性力学边值问题等价的位移边界边界积分方程[1]· 对于有限弹性体的力边值问题, 两个相差任意刚体位移的位移解满足同一力的边界条件, 即位移解不唯一· 用边界元法求这类问题的近似解时, 位移解不唯一表现为离散代数方程的奇异, 不能直接求解, 需要对方程修正, 消除奇异· 常用的处理方法是引入约束点, 消除刚体位移· 但是, 实践证明, 附加的约束条件有时会影响计算精度[2, 3]·

本文从积分方程式出发, 讨论边界积分方程解的唯一性, 提出力边值问题位移解唯一的条件, 依此建立位移约束, 得到位移解也唯一的边界积分方程·

1 边界积分方程解的不唯一性

弹性力学问题的基本解 U_{ij} 满足方程

$$C_{ijml}U_{kl,mj}(p,q)+\delta_{ki}\Delta(p,q)=0, \tag{1}$$

这里, p 是源点, q 是场点, C_{ijlm} 是弹性常数张量, δ_{ki} 是 Kronecker 符号, $\Delta(p,q)$ 是 Dirac 函数·

---

* 收稿日期: 1998_10_26; 修订日期: 1998_11_15
基金项目: 山东省自然科学基金资助课题
作者简介: 周慎杰(1958~) , 男, 副教授, 现为同济大学固体力学专业在读博士生, 研究方向为固体力学数值分析方法.

对于域内点,基本解面力 T_{ik} 与单位集中力之间满足自平衡条件

$$\int_{\partial B} T_{ik}(p,q)\, m_i^s(q)\,\mathrm{d}S(q) + \int_{\Omega} \delta_{ik}\,\Delta(p,q)\, m_i^s(q)\,\mathrm{d}V(q) = 0, \tag{2}$$

式中 m_i^s 是刚体位移基本矢量, $s = 1, \cdots, n_{\mathrm{d}}$, 三维问题, $n_{\mathrm{d}} = 6$, 二维问题, $n_{\mathrm{d}} = 3$, 且有

$$\boldsymbol{m}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}^3 = \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

当 p 位于边界上时, 由 Dirac 函数的积分性质得到

$$c_{ik} m_i^s(p) + -\!\!\!\!\!\!\int_{\partial B} T_{ik}(p,q)\, m_i^s(q)\,\mathrm{d}S(q) = 0, \tag{4}$$

其中 c_{ik} 为自由项系数,“$-\!\!\!\!\!\!\int$” 表示 Cauchy 积分.

上式相对于 p 点求导, 代入 Hooke 定律, 得到

$$\int_{\partial B} S_{ijk}(p,q)\, m_k^s(q)\,\mathrm{d}S(q) = 0, \tag{5}$$

式中

$$S_{ijk}(p,q) = C_{jkml} T_{im,L}(p,q). \tag{6}$$

位移边界积分方程为[4]

$$c_{ik} u_i(p) = -\!\!\!\!\!\!\int_{\partial B} [U_{ik}(p,q)\, t_i(q) - T_{ik}(p,q)\, u_i(q)]\,\mathrm{d}S(q). \tag{7}$$

对二维问题, 胡海昌院士发现方程(7)有时面力解不唯一[1]. 对三维问题, 方程(7)的面力解是唯一的[5]. 对于力边值问题, 由(4)式知, 方程(7)的齐次式

$$c_{ik} u_i(p) + -\!\!\!\!\!\!\int_{\partial B} T_{ik}(p,q)\, u_i(q)\,\mathrm{d}S = 0 \tag{8}$$

有非零的特征解, 因而, 方程(7)的位移解是不唯一的.

当 p 位于光滑边界上时, 面力边界积分方程为[6]

$$0.5 t_i(p) = n_j(p) \left\{ -\!\!\!\!\!\!\int_{\partial B} D_{ijk}(p,q)\, t_k(q)\,\mathrm{d}S(q) - =\!\!\!\!\!\!\!\int_{\partial B} S_{ijk}(p,q)\, u_k(q)\,\mathrm{d}S(q) \right\}, \tag{9}$$

式中 “$=\!\!\!\!\!\!\!\int$” 表示 Hadamard 有限部积分.

对位移边值问题, 方程(9)的面力解唯一确定[5]. 对于力边值问题, 方程的齐次式为

$$\int_{\partial B} S_{ijk}(p,q)\, u_k(q)\,\mathrm{d}S(q) = 0. \tag{10}$$

由(5)式知, 上式有非零解, 因而, 方程(9)的位移解也不唯一.

在对边界积分方程进行离散化求数值解时, 解的不唯一意味着离散后的代数方程是奇异的. 对于位移边界积分方程, 人们习惯于增设约束点, 即预先规定几个点的位移为零来消除刚体位移, 在代数方程中人为去掉几列和几行, 使代数方程成为非奇异的. 当求得的数值解不能保证去掉的方程成立时, 会引起计算误差. 对面力边界积分方程, 这种方法不再适用. 因而有必要建立对力边值问题具有唯一解的边界积分方程.

2 位移解唯一的条件

定理 对边界为 ∂B 的有限域 Ω, 在给定的力边界条件下, 满足 Navier 方程同时满足条件

$$\int_{\partial B} u_i m_i^s\,\mathrm{d}S = 0 \tag{11}$$

的位移在与变形位移(对应力有贡献的位移)相差一有限刚体位移的意义下是唯一的.

证 根据弹性理论, 在满足自平衡条件的力系作用下, 变形位移 $\boldsymbol{u}^t$ 是唯一的. 独立的刚体位移 $\boldsymbol{m}^s$ 与变形位移是线性独立的, 它们构成了位移空间, 任一相对位移都可由它们的线性组合表示, 即

$$u_i = c_s m_i^s + u_i^t \cdot \tag{12}$$

容易说明，由独立的刚体位移与变形位移组成的位移空间属于 Hilbert 空间• 取内积

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \int_{\partial B} a_i b_i \mathrm{d}S, \tag{13}$$

则有范数

$$\|\boldsymbol{a}\| = \left(\int_{\partial B} a_i a_i \mathrm{d}S\right)^{1/2} \cdot \tag{14}$$

由泛函理论知[7]，一个线性独立系可化成标准正交系$\{\boldsymbol{e}\}$• 下面以二维问题为例，通过标准正交系的演化过程，证明定理成立•

令 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{m}^1}{\|\boldsymbol{m}^1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{S}}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$，其中 $S = \int_{\partial B}\mathrm{d}S$，显然有 $\|\boldsymbol{e}_1\| = 1$•

令 $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{m}^2}{\|\boldsymbol{m}^2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{S}}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$，故有 $\|\boldsymbol{e}_2\| = 1, (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = 0$•

取 $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{m}^3 - (\boldsymbol{m}^3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{m}^3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{m}^3 - a_2\boldsymbol{e}_2 - a_1\boldsymbol{e}_1$，

其中 $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{S}}\int_{\partial B} - y\,\mathrm{d}S,\quad a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{S}}\int_{\partial B} x\,\mathrm{d}S$•

令 $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{g}_3}{\|\boldsymbol{g}_3\|} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{g}_3\|}\begin{Bmatrix}-y-a_1\\x-a_2\end{Bmatrix}$，

故有 $\|\boldsymbol{e}_3\| = 1, (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = 0, (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = 0$•

取

$$\boldsymbol{g}_4 = \boldsymbol{u}^t - (\boldsymbol{u}^t, \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 - (\boldsymbol{u}^t, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{u}^t, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}^t - a_3\boldsymbol{e}_3 - a_2\boldsymbol{e}_2 - a_1\boldsymbol{e}_1, \tag{15}$$

其中 $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{S}}\int_{\partial B} u_1^t \mathrm{d}S, a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{S}}\int_{\partial B} u_2^t \mathrm{d}S, a_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{g}_4\|}\int_{\partial B} u_i^t \boldsymbol{g}_{4i}\mathrm{d}S$•

令

$$\boldsymbol{e}_4 = \frac{\boldsymbol{g}_4}{\|\boldsymbol{g}_4\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{g}_4\|}\begin{Bmatrix}u_1^t + a_3 y + a_1 a_3 - a_1\\ u_2^t - a_3 x + a_2 a_3 - a_2\end{Bmatrix},$$

则有 $\|\boldsymbol{e}_4\| = 1$，

$$(\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1) = 0,\ (\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2) = 0,\ (\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3) = 0 \cdot \tag{16}$$

取位移 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_4$• 当求解问题确定时，边界$\partial B$ 和变形位移都是一定的，因而位移 $\boldsymbol{u}$ 唯一确定• 由基矢的正交性(16)，可导出

$$\int_{\partial B} u_1 \mathrm{d}S = 0, \tag{17}$$

$$\int_{\partial B} u_2 \mathrm{d}S = 0, \tag{18}$$

$$\int_{\partial B} [-y u_1 + x u_2]\mathrm{d}S = 0 \cdot \tag{19}$$

从上面演化中的(15)可以看出,位移 $\boldsymbol{u}$ 与变形位移 $\boldsymbol{u}^t$ 之间最多差一确定的刚体位移。对于三维问题,可证得类似的结论。因而,定理成立。

若将坐标系的原点取在边界的质心处,即有

$$\int_{\partial B} x\,\mathrm{d}S = \int_{\partial B} y\,\mathrm{d}S = 0.$$

容易证明,满足条件(11)的位移 $\boldsymbol{u}$ 与变形位移 $\boldsymbol{u}^t$ 之间最多差一确定的刚体平移。对这样的位移场,可任意选取一点为参考点,确定系统的相对位移。

3 唯一解的边界积分方程

对二维问题的位移边值问题和混合边值问题,有时习用的位移边界积分方程(7)的面力解不唯一。胡海昌院士提出了超定问题有解的充要条件,建立了等价的位移边界积分方程[1]

$$c_{ik}u_i(p) = -\int_{\partial B}[U_{ik}(p,q)\,t_i(q) - T_{ik}(p,q)\,u_i(q)]\,\mathrm{d}S(q) + \sum_{s=1}^{n_d}\alpha_s m_k^s(p), \tag{20}$$

$$\int_{\partial B} t_i(p)\,m_i^s(p)\,\mathrm{d}S(p) = 0. \tag{21}$$

对于力边值问题,式(21)是问题有解的必要条件,不再含有待求量,而方程(20)的位移解是不唯一的,具有 $n_{\mathrm{d}}(=3)$ 个自由度。对三维问题的位移边值问题和混合边值问题,方程(7)的解是唯一的。对力边值问题,方程(7)的位移解也不唯一,具有 $n_{\mathrm{d}}(=6)$ 个自由度。条件(11)的个数正好与位移的自由度相匹配,应用它消除位移的自由度,得到位移解唯一的位移边界积分方程

$$c_{ik}u_i(p) = -\int_{\partial B}[U_{ik}(p,q)\,t_i(q) - T_{ik}(p,q)\,u_i(q)]\,\mathrm{d}S(q) + \sum_{s=1}^{n_{\mathrm{d}}}\alpha_s m_k^s(p), \tag{22}$$

$$\int_{\partial B} u_i(p)\,m_i^s(p)\,\mathrm{d}S(p) = 0. \tag{23}$$

面力边界积分方程(9)的面力解是唯一确定的[5],但对力边值问题,其位移解同样具有 n_{d} 个自由度。用条件(11)消除位移自由度,得到位移解唯一的边界积分方程

$$0.5t_i(p) = n_j(p)\left\{-\int_{\partial B} D_{ijk}(p,q)\,t_k(q)\,\mathrm{d}S(q) - \int_{\partial B} S_{ijk}(p,q)\,u_k(q)\,\mathrm{d}S(q)\right\} + \sum_{s=1}^{n_{\mathrm{d}}}\beta_s m_i^s(p), \tag{24}$$

$$\int_{\partial B} u_i(p)\,m_i^s(p)\,\mathrm{d}S(p) = 0. \tag{25}$$

由上面的边界积分方程求得的位移解与变形位移最多差一刚体位移。由(7)式知,刚体位移对应力没有贡献,因而,求得边界量后,可用习用的算式来计算内点应力。由(4)式知,刚体位移可传递给内点位移的计算,不影响位移的相对值。为便于确定相对位移,求解时可将坐标系平移到边界的质心处。

4 数值算例

考查一承受内压的厚壁筒,内半径 $R_{\mathrm{i}} = 1$,外半径 $R_{\mathrm{o}} = 2$,取四分之一计算,如图1所示。

设定整个边界力已知, 即 AB 边上的面力

$$t_1 = 0,\quad t_2 = -\frac{p}{3}\left(1+\frac{4}{r^2}\right),$$

BC 为自由边, CD 边上的面力

$$t_1 = -\frac{p}{3}\left(1+\frac{4}{r^2}\right),\quad t_2 = 0,$$

DA 边承受内压 $p = 1$• 整个边界分成 16 个二次单元, 每条边均分成 4 个单元• 分别采用传统的边界积分方程和本文给出的唯一解方程计算• 对传统的边界积分方程, 取 A、B 点的 y 方向位移和 D 点的 x 方向位移为零• 沿 IJ 线的内点位移和应力计算结果如图 2、3 所示• 由图可见, 唯一解边界积分方程的结果具有很好的精度, 而点约束法的结果偏差较大• 这表明, 本文提出的唯一解边界积分方程是有效的•

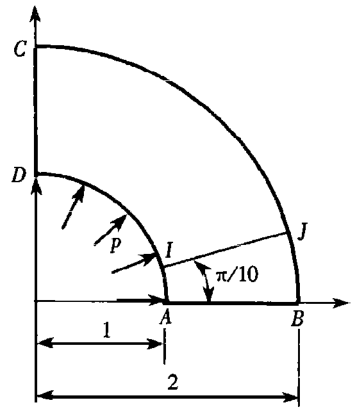

图 1 受内压厚壁筒

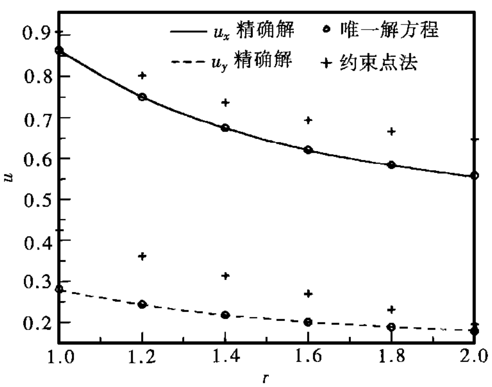

图 2 内点位移

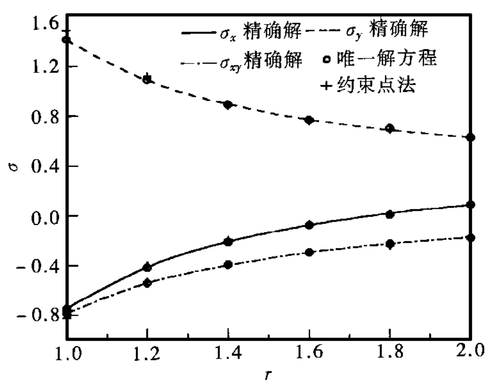

图 3 内点应力

5 结 论

本文应用基本解的特性分析说明, 在力的边界条件下, 传统的位移边界积分方程和面力边界积分方程的位移解不唯一• 提出了位移解唯一的条件, 依次来消除位移的自由度, 得到唯一解的边界积分方程• 实例计算表明, 该方法是有效的•

[参 考 文 献]

[1] 胡海昌, 丁浩江, 何文军. 弹性力学平面问题的等价的边界积分方程[J]. 中国科学(A), 1996, **26**(11): 1009~ 1014.

[2] Vable M. Importance and used of rigid body mode in boundary element method[J]. Int J Numer Meth, Eng, 1990, **29**: 453~ 472.

[3] Blazquez A, Mantic V, Paris F, et al. On the removal of rigid body motion in the solution of elastostatic problems by direct BEM[J]. Int J Numer Meth Eng, 1996, **39**: 4021~ 4038.

[4] Bannerjee P K, Butterfield R. Boundary Element Methods in Engineering Science[M]. UK:

McGraw Hill, 1981.
[5] Chen G, Zhou J. Boundary Element Methods[M]. London: Academic Press, 1992.
[6] Portela A, Aliabadi M, Rooke D P. Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique[J]. Int J Fracture, 1994, **65**: 369~ 381.
[7] 叶怀安. 泛函分析[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1984.

Boundary Integral Equations of Unique Solutions in Elasticity

Zhou Shenjie[1], Cao Zhiyuan[2], Sun Shuxun[3]
(1. Department of Chemical Engineering, Shandong University of Technology, Jinan 250061, P R China;
2. Department of Engineering Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P R China;
3. Institute of Engineering Mechanics, Shandong University of Technology, Jinan 250061, P R China)

Abstract: The properties of the fundamental solution are derived in linear elastostatics. These properties are used to show that the conventional displacement and traction boundary integral equations yield non_unique displacement solutions in a traction boundary value problem. The condition for the existence of unique displacement solutions is proposed for the traction boundary value problem. The degrees of freedom of the displacement solution are removed by the condition to obtain the boundary integral equations of unique solutions for the traction boundary value problems. Numerical example is presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the present equations.

Key words: boundary integral equation; boundary element method; elasticity