应用数学和力学, 第 20 卷 第 10 期(1999 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 10_1033_07

缺陷对结构临界载荷的影响*

朱正佑[1], 丛玉豪[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 上海师范大学 数学科学学院, 上海 200234)

(钱伟长推荐)

摘要: 利用普适开折理论研究了多重缺陷对工程结构临界载荷的影响· 对音叉问题给出了由缺陷引起的结构临界载荷改变量的下界估计公式及相应的简单、有效的数值计算方法·

关 键 词: 多重缺陷; 临界载荷; 音叉; 普适开折
中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

实际工程结构不可避免地存在缺陷· 一些重要的实验[1, 2] 表明缺陷的出现会使结构的临界载荷大大下降· 因此, 在以稳定性为主要标准的设计中必须考虑缺陷对临界载荷的影响问题· 我们分别用方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \lambda, \beta) = 0 \tag{2}$$

来描述一个完善的工程结构和具缺陷的结构的静平衡状态的控制方程, 其中 $\boldsymbol{F}: R^n \times R \to R^n$, $\boldsymbol{H}: R^n \times R \times R^l \to R^n$ 是光滑的; $\boldsymbol{x} \in R^n$ 是状态变量, $\lambda \in R$ 是载荷参数, $\beta \in R^l$ 是缺陷参数, 并且

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \lambda, 0) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \lambda) \cdot \tag{3}$$

设 λ_p 是完善结构的临界载荷, $(\boldsymbol{x}_p, \lambda_p)$ 是相应的奇点(即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_p, \lambda_p) = 0$ 并且 $\boldsymbol{F}_x(\boldsymbol{x}_p, \lambda_p)$ 奇异); 此外, 用 $\lambda^*(\beta)$ 表示具缺陷结构(2) 的临界载荷· 缺陷对临界载荷的影响就是要研究临界载荷的改变量 $\lambda^*(\beta) - \lambda_p$ 的变化规律, 特别希望给出, 当 $\|\beta\| < \varepsilon$ 时, 它的下界估计· 当 $l = 1$ 时, W.T. Koiter[3] 利用缺陷敏感度的概念给出了具缺陷的结构临界载荷急剧下降的完满解释· 当 $l > 1$ 时, 许多作者[4, 5] 利用给定缺陷模态的方法对一些简单的奇点讨论了缺陷对临界载荷的影响· 然而由于实际问题中缺陷模态的随机性, 一些作者[6, 7] 提出用统计的方法来研究随机缺陷模态的影响· 这种统计方法, 因为代价昂贵, 在工程设计中不常采用· 研究缺陷模态随机的另一方法, 是近年来由一些学者[8, 9] 提出的, 寻找使临界载荷下降最快的"临界缺陷方向" 的方法· 这是一种实际可行的简便的计算方法· 但是由于只是完善结构沿着临

* 收稿日期: 1998_10_07; 修订日期: 1999_04_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19371039)
作者简介: 朱正佑(1937~) , 男, 浙江人, 教授.

界缺陷方向临界载荷下降最快, 一般讲, 对具缺陷的结构并非沿着这个方向临界载荷下降最快, 所以这种方法对非线性较强的问题就显得比较粗糙•

本文将利用普适开折理论[10, 11], 对多重缺陷参数的音叉开折问题进行讨论• 尽管普适开折理论指出了任一开折问题必和一个特定的普适开折问题因式相通, 但由于没有一个简便可行的方法来求出这种因式相通中的坐标变换和缺陷参数映射(以下简称因式变换), 所以限制了这一理论在定量计算中的应用• 本文在第1节中利用通用分支理论[12], 对经高阶摄动的标量音叉普适开折问题给出了临界载荷改变量的下界估计• 然后在第2节中对标量的一般开折问题给出了简便易于计算的因式变换; 据此导出了一般标量开折问题临界载荷改变量的下界估计• 最后在第3节中对方程组的一般情形, 利用L_S约化和上两节的结果, 导出了临界载荷改变量的下界估计以及有关的计算方法• 本文只讨论缺陷对音叉型奇点临界载荷的改变量, 所以, 不失一般性• 下面我们总假定 $(\boldsymbol{x}_p, \lambda_p) = (0, 0)$ 是(1) 的一个音叉点•

1 正则开折问题

本节和下节讨论标量问题• 设 $f(x, \lambda): R \times R \rightarrow R$ 在原点邻域中光滑, $(0, 0)$ 是方程

$$f(x, \lambda) = 0 \tag{4}$$

的音叉点• 由音叉点的识别条件知在原点邻域中 $f(x, \lambda)$ 可表成

$$f(x, \lambda) = ax^3 + bx\lambda + \theta_{40}(x, \lambda)x^4 + \theta_{21}(x, \lambda)x^2\lambda + \theta_{02}(x, \lambda)\lambda^2, \tag{5}$$

其中 a、b 是常数, $ab < 0$; $\theta_{ij}(x, \lambda)$ 是光滑函数• 我们把形如 $\theta_{40}(x, \lambda)x^4 + \theta_{21}(x, \lambda)x^2\lambda + \theta_{02}(x, \lambda)\lambda^2$ 的项称为 f 的高阶项• 通过简单的变换 $x = (-b/a)^{1/2}\hat{x}$, 我们总可假定 $a = 1$, $b = -1$• 此外, 由普适开折定理[10], 我们还知道

$$g(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) := f(x, \lambda) + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 \tag{6}$$

是 $f(x, \lambda)$ 的一个普适开折• 本节讨论 g 经高阶项摄动后的如下形式的开折问题(简称为正则开折问题):

$$h(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta) := x^3 - x\lambda + \phi_{40}x^4 + \phi_{21}x^2\lambda + \phi_{02}\lambda^2 + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 = 0, \tag{7}$$

其中 $\phi_{ij}: R \times R \times R^l \rightarrow R$ 光滑, 满足

$$\phi_{ij}(x, \lambda, 0) = \theta_{ij}(x, \lambda)• \tag{8}$$

为了得到 h 的临界载荷, 考察奇点满足的方程组

$$h(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = 0, \tag{9a}$$

$$h_x(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = 0• \tag{9b}$$

注意到(9b) 的左端实际上不含 α_1, 并且

$$h_x(0, 0, \alpha_1, 0, \beta) = 0, \quad h_{x\lambda}(0, 0, \alpha_1, 0, \beta) = -1 \neq 0,$$

所以由隐函数定理知在原点邻域中由(9b)可解出唯一光滑函数 $\lambda = \lambda(x, \alpha_2, \beta)$ 满足 $\lambda(0, 0, \beta) = 0$• 将 $\lambda(x, \alpha_2, \beta)$ 在 $(x, \alpha_2) = (0, 0)$ 处展开得到

$$\lambda(x, \alpha_2, \beta) = 3x^2 + 2\alpha_2 x + \gamma_{30}x^3 + \gamma_{21}x^2\alpha_2 + \gamma_{12}x\alpha_2^2 + \gamma_{03}\alpha_2^3, \tag{10}$$

其中 γ_{ij} 是 (x, α_2, β) 的光滑函数• 把(10) 代入(9a) 得到 h 的奇点中 x_坐标应满足方程

$$\begin{aligned}\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \beta) := {}& 2x^3 + \alpha_2 x^2 - \alpha_1 + \psi_{40}x^4 + \psi_{31}x^3\alpha_2 + \\ & \psi_{22}x^2\alpha_2^2 + \psi_{13}x\alpha_2^3 = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

其中 ψ_{ij} 是 (x, α_2, β) 的光滑函数• 现在我们按通用分支理论[12] 的方法来讨论(11) 的小解•

首先对(11) 的解,我们有如下先验估计结果•

引理 1.1 存在 $(x, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$ 的原点邻域 V 和常数 $K > 0$, 使得(11) 在 V 中的任一解 $(x, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$ 必满足:

$$|x| \leqslant K(|\alpha_1|^{1/3} + |\alpha_2|) \bullet \tag{12}$$

证明 设其不然, 存在(11) 的解 $(x_n, \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \beta_n) \to 0$, $n \to \infty$, 使得 $|\alpha_{1n}|^{1/3}/|x_n|$ 和 $|\alpha_{2n}|/|x_n|$ 都趋于零, 当 $n \to \infty$ 时• 用 x_n^3 除(11) 两边, 得到

$$0 = \varphi(x_n, \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \beta_n)/x_n^3 = 2 + O\left(|x_n| + \left|\frac{\alpha_{2n}}{x_n}\right| + \left|\frac{\alpha_{1n}}{x_n^3}\right|\right) \to 2 \qquad (n \to \infty) \bullet$$

这一矛盾证明了引理结论成立, 证毕•

(12) 启示我们在 α_1 和 α_2 之间引入关系

$$\alpha_2 = k\alpha_1^{1/3} \text{或者 } \alpha_1 = k'\alpha_2^3 \bullet \tag{13}$$

显然只要 $d_0 > (d_0')^{-1/3}$, 例如取 $d_0 = 5$, $d_0' = 1/64$, 集合

$$\Omega_1 := \left\{(\alpha_1, \alpha_2): \alpha_2 = k\alpha_1^{1/3}, |k| \leqslant d_0, |\alpha_1| \leqslant \delta\right\}$$

和集合 $\Omega_2 := \left\{(\alpha_1, \alpha_2): \alpha_1 = k'\alpha_2^3, |k'| \leqslant d_0', |\alpha_2| \leqslant \delta\right\}$

的并集将盖住 α_1_α_2 平面中原点的某一邻域, 其中 $\delta > 0$ 是一个常数• 我们先考察集合 Ω_1 中的 (α_1, α_2)• 令

$$\alpha_2 = k\alpha_1^{1/3}, \qquad -d_0 \leqslant k \leqslant d_0 \bullet \tag{14}$$

记 $t = \alpha_1^{1/3}$, 把(14) 代入(11) 得到

$$\varphi_1(x, t, \beta, k) := 2x^3 + kx^2 t - t^3 + O(|x|^4 + |x^3 t| + |x^2 t^2| + |xt^3|) = 0 \bullet \tag{15}$$

按牛顿多边形方法[13], 并注意到 $[-d_0, d_0]$ 的紧性, 不难求得(15) 的小解有如下展式

$$x(t, \beta, k) = y(k)t(1 + o(1)), \tag{16}$$

其中 $y(k)$ 是方程

$$2y^3 + ky^2 - 1 = 0 \tag{17}$$

的实根• 当 $k > 3$ 时, (17) 有 3 个实根, 当 $k = 3$ 时, (17) 有两个实根(其中一个是二重根); 当 $k < 3$ 时(17) 只有一个实根, 这些实根我们都记为 $y(k)$• (16) 中的 $o(1)$ 是 $t \to 0$ 时关于 $|k| \leqslant d_0$ 和原点邻域中的 β 一致的无穷小量• 把(16) 代入(10), 并利用 $t^2 = (\alpha_1^{2/3} + \alpha_2^2)(1 + k^2)^{-1}$, 得到 h 的奇点中 λ_坐标的表达式:

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \xi(k)(\alpha_1^{2/3} + \alpha_2^2)(1 + o(1)), \tag{18}$$

其中

$$\xi(k) = (3y^2(k) + 2ky(k))(1 + k^2)^{-1}, \tag{19}$$

$$k = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2\alpha_1^{-1/3}, & \alpha_1 \neq 0 \bullet \end{cases} \tag{20}$$

(18) 中的 $o(1)$ 表示当 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_1$, $(\alpha_1, \alpha_2) \to 0$ 时关于 β 的原点邻域是一致的无穷小量• 利用数值方法求得当 $|k| < \infty$ 时, $\xi(k)$ 的极小值 $\xi^* = -0.3$• 于是对正则开折问题(7), 当 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_1$ 时, 临界载荷 $\lambda^*(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ 有如下的下界估计:

$$\lambda^*(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \geqslant \xi^*(\alpha_1^{2/3} + \alpha_2^2)(1 + o(1)) \bullet \tag{21}$$

对集合 Ω_2 中的 (α_1, α_2) 作完全类似的讨论, 同样得到估计式(21)• 这样我们证明了在

$(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ 的原点邻域中, (7) 的临界载荷有下界估计式(21), 其中 $o(1)$ 是当$(\alpha_1, \alpha_2) \to 0$ 时关于原点邻域中的 β 是一致的无穷小量•

2 标量的任意开折

现在设 $h(x, \lambda, \beta)$ 是 $f(x, \lambda)$ 的任一 l_参数开折, 其中 f 由(5) 给出, $a = 1$, $b = -1$• 将 h 展开得到方程

$$h(x, \lambda, \beta) = x^3 - x\lambda + \left\{\varphi_{00} + \varphi_{10}x + \varphi_{01}\lambda + \varphi_{20}x^2 + \varphi_{11}x\lambda + \varphi_{30}x^3\right\} + \left\{\psi_{40}(x, \lambda, \beta)x^4 + \psi_{21}(x, \lambda, \beta)x^2\lambda + \psi_{02}(x, \lambda, \beta)\lambda^2\right\} = 0, \tag{22}$$

其中 φ_{ij} 是 β 的光滑函数, φ_{ij} 和 ψ_{ij} 满足

$$\varphi_{ij}(0) = 0, \quad \psi_{ij}(x, \lambda, 0) = \theta_{ij}(x, \lambda)•$$

利用初等组合方法, 不难求得如下 X, Λ, α_1 和 α_2:

$$X(x, \beta) := (1 + \varphi_{30})^{1/3}x - \varphi_{01}(1 + \varphi_{30})^{1/3}(1 - \varphi_{11})^{-1}, \tag{23a}$$

$$\Lambda(\lambda, \beta) := (1 - \varphi_{11})(1 + \varphi_{30})^{-1/3}\lambda - 3\varphi_{01}^2(1 + \varphi_{20})^{2/3}(1 - \varphi_{11})^{-2} - 2\varphi_{01}\varphi_{20}(1 - \varphi_{11})^{-1}(1 + \varphi_{30})^{-1/3} - \varphi_{10}(1 + \varphi_{30})^{-1/3}, \tag{23b}$$

$$\alpha_1(\beta) := \varphi_{00} + \varphi_{10}\varphi_{01}(1 - \varphi_{11})^{-1} + \varphi_{01}^2\varphi_{20}(1 - \varphi_{11})^{-2} + \varphi_{01}^3(1 + \varphi_{30})(1 - \varphi_{11})^{-3}, \tag{23c}$$

$$\alpha_2(\beta) := \varphi_{20}(1 + \varphi_{30})^{-2/3} + 3\varphi_{01}(1 + \varphi_{30})^{1/3}(1 - \varphi_{11})^{-1}, \tag{23d}$$

使得

$$x^3 - \lambda x + \left\{\varphi_{00} + \varphi_{10}x + \varphi_{01}\lambda + \varphi_{20}x^2 + \varphi_{11}x\lambda + \varphi_{30}x^3\right\} = X^3 - \Lambda X + \alpha_1(\beta) + \alpha_2(\beta)X^2• \tag{24}$$

由(23), 我们显然有

$$X(x, 0) = x, \quad \Lambda(\lambda, 0) = \lambda, \quad \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0• \tag{25}$$

(24)、(25) 表示(24) 的左端和 $x^3 - \lambda x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2$ 因式相通, (23) 就是相应的因式变换[10]• 把 (24) 代入(22) 得到

$$h(x, \lambda, \beta) = X^3 - \Lambda X + \alpha_1 + \alpha_2 X^2 + \psi_{40}x^4 + \psi_{21}x^2\lambda + \psi_{02}\lambda^2 = 0• \tag{26}$$

现在令

$$z = X(x, \beta), \quad \mu = \Lambda(\lambda, \beta), \tag{27a}$$

它们的反变换记为

$$x = Z(z, \beta), \quad \lambda = M(\mu, \beta)• \tag{27b}$$

把它们代入(26) 得到

$$h(z, \mu, \beta) := z^3 - \mu z + \alpha_1 + \alpha_2 z^2 + \psi_{40}z^4 + \psi_{21}z^2\mu + \psi_{02}\mu^2 = 0, \tag{28}$$

其中 ψ_{ij} 是(z, μ, β) 的光滑函数• 显然, 若(z, μ, β) 是(28) 在原点邻域中的奇点, 则$(Z(z, \beta), M(\mu, \beta), \beta)$ 是(26) 在原点邻域中的奇点, 反之亦真• 现在设(z, μ, β) 是(28) 的奇点, (x, λ, β) 是和它相应的(26) 的奇点• 利用等式 $M(\mu, 0) = \mu$, 得到

$$\lambda = M(\mu, \beta) = M(\mu, 0) + M_\beta(\mu, 0)\beta + \frac{1}{2}\beta^{\mathrm{T}}M_{\beta\beta}(\mu, 0)\beta + O(\|\beta\|^3) = \mu(1 + O(\|\beta\|)) + M_\beta(0, 0)\beta + \frac{1}{2}\beta^{\mathrm{T}}M_{\beta\beta}(0, 0)\beta + O(\|\beta\|^3)• \tag{29}$$

由(23b) 及恒等式 $\Lambda(M(\mu, \beta)\beta) \equiv \mu$, 我们求得

$$M_{\beta}(0,0)\beta = (\varphi_{10})^0_{\beta}\beta, \tag{30a}$$

$$\frac{1}{2}\beta^{T}M_{\beta\beta}(0,0)\beta = [(\varphi_{10})^0_{\beta}\beta][(\varphi_{11})^0_{\beta}\beta] + 3[(\varphi_{01})^0_{\beta}\beta]^2 + 2[(\varphi_{01})^0_{\beta}\beta][(\varphi_{20})^0_{\beta}\beta] + \frac{1}{2}\beta^{T}(\varphi_{10})^0_{\beta\beta}\beta, \tag{30b}$$

其中上标“0”表示在 $\beta=0$ 处取值• 由(z,μ,β) 是(28) 的奇点,所以由上节估计式(21) 有

$$\mu \geqslant \xi^{*}(\alpha_1^{2/3}(\beta) + \alpha_2^2(\beta))(1+o(1))• \tag{31}$$

如果在全部计算中把 $(1+o(1))$ 近似作为 1 并且略去 $O(\|\beta\|^3)$,则由(29)、(30)、(31) 及(23c)、(23d) 不难求得任意开折(22) 的临界载荷的下界估计

$$\lambda^{*}(\beta) \geqslant -0.3[(\varphi_{00})^0_{\beta}\beta]^{2/3} + (\varphi_{10})^0_{\beta}\beta + \left\{0.3[(\varphi_{01})^0_{\beta}\beta]^2 + 0.2[(\varphi_{01})^0_{\beta}\beta][(\varphi_{20})^0_{\beta}\beta] - 0.3[(\varphi_{20})^0_{\beta}\beta]^2 + \frac{1}{2}\beta^{T}(\varphi_{10})^0_{\beta\beta}\beta\right\}, \tag{32}$$

这里

$$\begin{cases}(\varphi_{00})^0_{\beta} = h_{\beta}(0,0,0),\ (\varphi_{10})^0_{\beta} = h_{x\beta}(0,0,0),\\ (\varphi_{01})^0_{\beta} = h_{\lambda\beta}(0,0,0),\ (\varphi_{20})^0_{\beta} = \frac{1}{2}h_{xx\beta}(0,0,0),\\ (\varphi_{10})^0_{\beta\beta} = h_{x\beta\beta}(0,0,0)•\end{cases} \tag{33}$$

如果在下界估计式(32) 中进一步略去 $O(\|\beta\|^2)$,则得到简化的下界估计式

$$\lambda^{*}(\beta) \geqslant -0.3[h_{\beta}(0,0,0)\beta]^{2/3} + h_{x\beta}(0,0,0)\beta• \tag{34}$$

(34) 表示,当忽略 $O(\|\beta\|^2)$ 时;l_维缺陷参数 $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_l)^{T}$ 对临界载荷下降起主要作用的将是 β 在 $h_{\beta}(0,0,0)$ 和 $h_{x\beta}(0,0,0)$ 这两个方向上的投影• 最后,我们指出在上面公式的推导中,我们假定了(5) 中的 $a=1$、$b=-1$• 对一般的情形(32) 和(34) 应作如下修正:

$$\lambda^{*}(\beta) \geqslant 0.3a^{1/3}b^{-1}[(\varphi_{00})^0_{\beta}\beta]^{2/3} - b^{-1}(\varphi_{10})^0_{\beta}\beta + \left\{-0.3ab^{-3}[(\varphi_{10})^0_{\beta}\beta]^2 + 0.2b^{-2}[(\varphi_{01})^0_{\beta}\beta][(\varphi_{20})^0_{\beta}\beta] + 0.3a^{-1}b^{-1}[(\varphi_{20})^0_{\beta}\beta]^2 + 0.5b^{-2}\beta^{T}(\varphi_{10})^0_{\beta\beta}\beta\right\}, \tag{35}$$

$$\lambda^{*}(\beta) \geqslant 0.3a^{1/3}b^{-1}[h_{\beta}(0,0,0)\beta]^{2/3} - b^{-1}h_{x\beta}(0,0,0)\beta, \tag{36}$$

其中

$$a = \frac{1}{6}h_{xxx}(0,0,0),\quad b = h_{x\lambda}(0,0,0)• \tag{37}$$

3 方程组的任意开折问题

现在考察完善结构的静态平衡方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda) = 0 \tag{38}$$

和具 l_维缺陷参数的结构的静态平衡方程

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\lambda,\beta) = 0, \tag{39}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态变量,$\lambda\in R$ 是载荷参数,$\beta\in R^l$ 是缺陷参数;$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是光滑函数满足

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\lambda,0) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda)• \tag{40}$$

假设 $(\boldsymbol{x},\lambda)=(0,0)$ 是(38) 的一个音叉点• 众所周知,经Liapunov_Schmidt 约化后,(39) 在原点邻域中的解和奇点分别和标量方程

$$h(\xi,\lambda,\beta) := \boldsymbol{v}^{T}\boldsymbol{H}(\xi\boldsymbol{u} + \boldsymbol{y}(\xi,\lambda,\beta),\lambda,\beta) = 0 \tag{41}$$

在原点邻域中的解和奇点一一对应。其中 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别是 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{F}_x(0,0))$ 和 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{F}_x^{\mathrm{T}}(0,0))$ 中的单位向量；$\boldsymbol{y}(\xi,\lambda,\beta)$ 是 $R\times R\times R^l$ 的原点邻域中的光滑函数，由下面方程唯一确定

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{H}(\xi\boldsymbol{u}+\boldsymbol{y},\lambda,\beta)+\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0. \tag{42}$$

这样我们把(39)的临界载荷的计算(或估计)，化归为标量方程(42)的临界载荷的计算(或估计)。令

$$f(\xi,\lambda):=h(\xi,\lambda,0). \tag{43}$$

由 $(\boldsymbol{x},\lambda)=(0,0)$ 是(38)的音叉点，不难验证 $(\xi,\lambda)=(0,0)$ 是 f 的音叉点。于是由第2节中的分析知(41)的临界载荷，它和(39)的临界载荷相同，有估计式(35)或(36)，其中，$(\varphi_{ij})^0_\beta$ 和 a、b 分别由(33)和(37)给出。因为由(41)确定的 h 中含有 $\boldsymbol{y}(\xi,\lambda,\beta)$，所以直接使用(33)和(37)是不方便的。通过隐函数求导计算，我们列出关于 $(\varphi_{ij})^0_\beta$ 和 a、b 的计算公式如下。令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{A}=H^0_x+\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}, \tag{44}$$

则我们可求出 $\boldsymbol{y}(\xi,\lambda,\beta)$ 的各阶导数如下：

$$\boldsymbol{y}^0_\beta:=\boldsymbol{y}_\beta(0,0,0)=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}H^0_\beta, \tag{45a}$$

$$\boldsymbol{y}^0_\lambda:=\boldsymbol{y}_\lambda(0,0,0)=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}H^0_\lambda, \tag{45b}$$

$$\boldsymbol{y}^0_{\xi\xi}:=\boldsymbol{y}_{\xi\xi}(0,0,0)=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}(H^0_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}); \tag{45c}$$

$$\boldsymbol{y}^0_{\xi\beta}:=\boldsymbol{y}_{\xi\beta}(0,0,0)=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}\left\{H^0_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_\beta+H^0_{x\beta}\boldsymbol{u}\right\}, \tag{46a}$$

$$\boldsymbol{y}^0_{\beta\beta}:=\boldsymbol{y}_{\beta\beta}(0,0,0)=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}\left\{H^0_{xx}\boldsymbol{y}^0_\beta\boldsymbol{y}^0_\beta+2H^0_{x\beta}\boldsymbol{y}^0_\beta+H^0_{\beta\beta}\right\}; \tag{46b}$$

其中上标“0”表示在 $(\boldsymbol{x},\lambda,\beta)=(0,0,0)$ 处取值。然后，我们有

$$h_\beta(0,0,0)=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}H^0_\beta, \tag{47a}$$

$$h_{\xi\beta}(0,0,0)=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left\{H^0_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_\beta+H^0_{x\beta}\boldsymbol{u}\right\}; \tag{47b}$$

$$h_{\lambda\beta}(0,0,0)=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left\{H^0_{xx}\boldsymbol{y}^0_\lambda\boldsymbol{y}^0_\beta+H^0_{x\lambda}\boldsymbol{y}^0_\beta+H^0_{x\beta}\boldsymbol{y}^0_\lambda+H^0_{\lambda\beta}\right\}, \tag{48a}$$

$$\begin{aligned}h_{\xi\xi\beta}(0,0,0)=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\Big\{&H^0_{xxx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_\beta+H^0_{xx}\boldsymbol{y}^0_{\xi\xi}\boldsymbol{y}^0_\beta+2H^0_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_{\beta\xi}+\\&H^0_{xx\beta}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}+H^0_{x\beta}\boldsymbol{y}^0_{\xi\xi}\Big\},\end{aligned} \tag{48b}$$

$$\begin{aligned}h_{\xi\beta\beta}(0,0,0)=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\Big\{&H^0_{xxx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_\beta\boldsymbol{y}^0_\beta+2H^0_{xx\beta}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_\beta+H^0_{x\beta\beta}\boldsymbol{u}+\\&H^0_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_{\beta\beta}+2H^0_{xx}\boldsymbol{y}^0_\beta\boldsymbol{y}^0_{\xi\beta}+2H^0_{x\beta}\boldsymbol{y}^0_{\xi\beta}\Big\};\end{aligned} \tag{48c}$$

以及

$$a=\frac{1}{6}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left\{H^0_{xxx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}+3H^0_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_{\xi\xi}\right\}, \tag{49a}$$

$$b=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left\{H^0_{xx}\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}^0_\lambda+H^0_{x\lambda}\boldsymbol{u}\right\}. \tag{49b}$$

当采用估计式(36)式，只要利用公式(45)、(47)和(49)就够了。一般讲来在确定 $\boldsymbol{F}$ 的音叉点时，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}\in R^n$ 以及 $\boldsymbol{y}^0_\lambda$，$\boldsymbol{y}^0_{\xi\xi}$ 和 a、$b\in R$ 都已求出，所以采用估计式(36)时只需进一步计算 $\boldsymbol{y}^0_\beta$ 和 $h_\beta(0,0,0)$ 及 $h_{\xi\beta}(0,0,0)$，这并不需要大量的计算工作量。

结论　我们利用普适开折的方法对音叉型奇点给出了具缺陷的工程结构(39)的临界载荷改变量的下界估计式(35)或(36)，并给出了计算这个下界时的具体计算公式(44)～(49)。下界估计式(36)表明在临界载荷改变量中，若忽略 $O(\|\beta\|^2)$，则 l_维缺陷参数 $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_l)^{\mathrm{T}}$ 对临界载荷下降起主要作用的将是 β 在 $h_\beta(0,0,0)$ 和 $h_{\xi\beta}(0,0,0)$（它们由(47)给出）这两个方向的投影。

[参 考 文 献]

[1] Thomson J M T, Hunt G W. A General Theory of Elastic Stability[M]. New York: John Wiley, 1973.

[2] Hunt G W. Imperfection sensitivity of semi_symmetric branching[J]. Proc Royal Soc London, Ser A, 1977, **357**(2): 193~ 211.

[3] Koiter W T. On the stability of elastic equilibrium[D]. Ph D dissertation. English translation, Delft Holland: NASA Technical translation, 1967, F**10**: 833.

[4] Niwa Y, Watanabe E, Nakagawa N. Catastrophe and imperfection sensitivity of two_degree_of freedom systems[J]. Proc Japan Soc Civil Engineers, 1981, **307**(1): 99~ 111.

[5] Kirkpatrick S W, Holmen B S. Effects of initial imperfections on dynamic buckling of shells[J]. J Engrg Mech Div, 1988, **115**(5): 1025~ 1093.

[6] Elishakoff I. Stochastic simulation of an initial imperfection data bank for isotropic shell with general inperfections[A]. In: I Elishakoff et al eds. Buckling of Structures[C]. Amsterdam: Elsevier, 1988, 195~ 209.

[7] Lindberg H E. Random imperfections for dynamic pulse buckling[J]. J Engrg Mech Div, 1988, **114**(6): 1144~ 1165.

[8] Murota K, Ikada K. Critical initial imperfection of structures[J]. Int J Solid Struct, 1990, **26**(8): 865 ~ 886.

[9] Murota K, Ikada K. Critical imperfection of symmetric structures[J]. SIAM Appl Math, 1991, **51**(5): 1222~ 1254.

[10] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory[M]. Vol. **1**, Berlin Heidelberg, New York, Tokyo: Springer_Verlag, 1984.

[11] Arnold V I. Singularity theory[J]. London Math Soc Lecture Note Series, **51**, Berlin Herdelberg, New York, Tokyo: Springer_Verlag, 1981.

[12] Chow S N, Hale J K, Mallet_Paret J. Application of generic bifurcations[J]. Arch Rat Mech Anal, 1975, **59**(2): 159~ 188.

The Influence of Imperfections Upon the Critical Load of Structures

Zhu Zhengyou[1], Cong Yuhao[2]

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

2. College of Mathematical Sciences, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P R China)

Abstract: By means of the theory of universal unfolding, the influence of multi_imperfections upon the critical load of structure in engineering is analysed in this paper. For the pitchfork problem, a lower bound of increments of the critical loads caused by imperfections of the structures is given. A simple and available numerical method for computing the lower bound is described.

Key words: imperfections; critical load; pitchfork; universal unfolding