应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 10_0997_07

实噪声参激一类余维 2 分叉系统的最大 Lyapunov 指数(Ⅱ)*

刘先斌[1], 陈 虬[1], 陈大鹏[2]

(1. 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031;
2. 西南交通大学 工程科学研究院, 成都 610031)

摘要: 对于三维中心流形上实噪声参激的一类余维 2 分叉系统, 为使模型更具有一般性, 取系统的参激实噪声为一线性滤波系统的输出_零均值的平稳高斯扩散过程, 满足细致平衡条件• 并在此基础上首次使用 Arnold 的渐近方法以及 Fokker_Planck 算子的特征谱展式, 求解不变测度以及最大的 Lyapunov 指数的渐近展式•

关 键 词: 实噪声; 参数激励; 余维 2 分叉; 细致平衡; FPK 方程; 奇异边界; 最大 Lyapunov 指数; 可解性条件
中图分类号: O211.63 文献标识码: A

根据扩散过程理论[1,2], Ito 随机微分方程解过程的奇点和奇异边界对其遍历分支的分布情况、不变测度的形式和存在性、系统的样本属性(包括样本稳定性) 以至于最大 Lyapunov 指数的具体形式均有着决定性的影响• 可以认为, 扩散过程的奇点和奇异边界情况是确定随机动力系统的定性性态以致于随机分叉行为的最重要的决定因素之一[3~5]•

由于相同的 FPK 方程可定义一类等价的随机系统[6], 根据 FPK 方程(63) 可构造一个一维扩散过程, 具有与随机过程 θ 完全相同的平稳的概率密度函数 $F(\theta)$• 这个意义上可将 θ 视为一个一维的扩散过程, 并可根据扩散过程的奇点理论考查方程(63) 解的具体形式• 下面首先回顾一维扩散过程的奇点和奇异边界理论•

6 一维扩散过程的奇点和奇异边界

考虑一维的扩散过程 $x(t)$, 它由下面的非线性 Ito 随机微分方程产生:

$$\mathrm{d}x(t) = m(x)\,\mathrm{d}t + \sigma(x)\,\mathrm{d}W(t), \tag{66}$$

其中 $m(x)$ 和 $\sigma(x)$ 不显含时间 t 并分别是漂移系数和扩散系数, $W(t)$ 是单位的 Wiener 过程•

扩散过程 $x(t)$ 的边界对其样本属性、不变测度的形式和存在性均有着重要的影响• Ito 和 Feller 将扩散过程的边界分成了 4 类[1], 即:

1) 规则边界(regular boundary), 扩散过程既可以从内点到达边界也可从边界进入任何一

* 收稿日期: 1998_05_29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19602016)
作者简介: 刘先斌(1965~), 男, 副教授, 博士, 发表论文 30 余篇, 专著一本(合著).

个内点•

2) 离出边界(exit boundary),扩散过程只能从内点到达边界而不能从边界进入任何一个内点•

3) 进入边界(entrance boundary),扩散过程可以从边界进入任一个内点而不能从内点到达边界•

4) 自然边界(natural boundary),扩散过程既不能从内点到达边界亦不能从边界到达内点•

Ito 还指出,在一维扩散过程的样本轨线上,还存在着一些奇点,它们对样本属性将会产生重要的影响• 这样的奇点有两类[1,2]:

1) 第一类奇点 x_s,若 $\sigma(x_s) = 0$;

2) 第二类奇点 x_s,若 $m(x_s) = \infty$•

这二类奇点的边界称之为奇异边界(singular boundary)•

Y K Lin 和 G Q Cai[7] 根据漂移系数和扩散系数在奇异边界处的极限性质得到了有关第二类奇异边界分类的判别准则• 对于奇异边界 $x_s(x_l, x_r)$(x_l, x_r 分别表示左边界和右边界),他们定义了 3 个指数:扩散指数 α_s、漂移指数 β_s、特征指数 c_s,其中

$$\sigma^2(x) = O(|x|^{\alpha_s}), \qquad \alpha_s \geqslant 0, x \to x_s, \tag{67}$$

$$m(x) = O(|x|^{\beta_s}), \qquad \beta_s \geqslant 0, x \to x_s, \tag{68}$$

$$c_l = \lim_{x \to x_l^+} \frac{2m(x)|x|^{\alpha_l - \beta_l}}{\sigma^2(x)}, \quad c_r = -\lim_{x \to -x_l^-} \frac{2m(x)|x|^{\alpha_r - \beta_r}}{\sigma^2(x)}• \tag{69}$$

表 1　　　　有限的第二类奇异边界分类[7]

状　态	条　件			边界分类
$\lvert m(x_s)\rvert = \infty$ ($\beta_s > 0$) $\sigma(x_s) < \infty$ ($\alpha_s = 0$)	$\beta_s < 1$			规则(regular)
	$\beta_s = 1$	$c_s < -1$		离出(exit)
		$-1 < c_s < 1$		规则(regular)
		$c_s > 1$		进入(entrance)
	$\beta_s > 1$	$m(x_l^+) < 0$ 或 $m(x_l^-) > 0$		离出(exit)
		$m(x_l) > 0$ 或 $m(x_l) < 0$		进入(entrance)
$\lvert m(x_s)\rvert = \infty$ ($\beta_s > 0$) $\sigma(x_s) = \infty$ ($\alpha_s > 0$)	$\beta_s < 1 + \alpha_s$			规则(regular)
	$\beta_s > 1 + \alpha_s$	$m(x_l^+) < 0$ 或 $m(x_l^-) > 0$		规则(regular)
		$m(x_l) > 0$ 或 $m(x_l) < 0$		进入(entrance)
	$\beta_s = 1 + \alpha_s$	$c_s \geqslant \beta_s$	$c_s \geqslant 1$	严格自然(strictly natural)
			$c_s < 1$	离出(exit)
		$c_s < \beta_s$	$c_s \geqslant 1$	进入(entrance)
			$c_s < 1$	规则(regular)

7 $F(\theta)$ 满足的 FPK 方程的平稳解

根据漂移系数 $\varphi(\theta)$ 的表达式(65) 可知, 当 $\theta=\pi/2$时, $\varphi(\pi/2)=-\infty(\beta_2\neq 0)$; 这时 $\theta=\pi/2$ 为第二类奇点[1, 2]• 由于在$[0,\pi]$ 上存在奇点, 因此必须将$[0,\pi]$ 分成$[0,\pi/2]$ 和$[\pi/2,\pi]$ 两个区间, 分别考查 FPK 方程(63) 在这两个区间上的解•

由于在 $[0,\pi/2]$ 上, $\theta=\pi/2$ 为第二类奇异边界且由于当 $\theta\rightarrow\pi/2$ 时

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\theta\right]}\propto\frac{1}{\left[\dfrac{\pi}{2}-\theta\right]},$$

于是根据第二类奇异边界的扩散指数、漂移指数及特征指数的定义式(67) ~ (69) 可知

$$\begin{cases}\alpha_r=0,\ \beta_r=1,\\ c_r=-\lim\limits_{\theta\rightarrow\pi/2}\dfrac{2\varphi(\theta)\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)^{1-0}}{\phi^2(\theta)}=-\dfrac{2\beta_2\cos\pi\sin\dfrac{\pi}{2}}{2\beta_2\cos^2\pi}=1,\end{cases}\tag{70}$$

因此 $\pi/2$ 为扩散过程 $\theta(t)$ 的进入边界, 而$[0,\pi/2]$ 的另一边界 $\theta=0$ 以及边界 $\theta=\pi$ 均为规则边界• 由此可得, 在$[0,\pi/2]$ 和$[\pi/2,\pi]$ 上 $F(\theta)$ 均具形式[2, 8]

$$F(\theta)=\frac{C}{\phi^2(\theta)U(\theta)},\tag{71}$$

其中, C 为归一化常数, 而

$$\begin{cases}U(\theta)=\exp[-2B(\theta)],&(72)\\ B(\theta)=\displaystyle\int\frac{\varphi(\theta)}{\phi^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int\frac{B_1\sin4\theta+B_2\sin2\theta+B_3\cos2\theta\tan\theta}{A_1\cos^22\theta+A_2\sin^22\theta}\mathrm{d}\theta,&(73)\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}A_1=\left(2\beta_0+\dfrac{1}{2}\beta_1\right)=\dfrac{J_1^2}{8}S(0)+\dfrac{(H_1^2+J_2^2)}{16}S(2\omega),\\ A_2=2\beta_2=(b_{13}^2+b_{23}^2)S(\omega),\\ B_1=\beta_0+\dfrac{1}{4}\beta_1-\beta_2=\dfrac{J_1^2}{16}S(0)+\dfrac{(H_1^2+J_2^2)}{32}S(2\omega)-\dfrac{1}{2}S(\omega)(b_{13}^2+b_{23}^2),\\ B_2=-\left[\dfrac{\delta_2-\delta_1}{2}+\beta_1\right]=-\left[\dfrac{\delta_2-\delta_1}{2}+\dfrac{1}{8}S(2\omega)(H_1^2+J_2^2)\right],\\ B_3=\beta_2=\dfrac{1}{2}S(\omega)(b_{13}^2+b_{23}^2)\bullet\end{cases}\tag{74}$$

要得到(73) 中的积分式并不难, 但要得到系统(16) 的最大 Lyapunov 指数的渐近解析显式还必须对系数 A_1、A_2 附加条件• 取 $A_1=A_2$, 此时有 $B_1=0$, $2B_3=A_1$, 于是

$$B(\theta)=\frac{(B_2+B_3)}{A_1}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\ln|\cos\theta|,\tag{75}$$

$$F(\theta)=\frac{C}{A_1}|\cos\theta|\exp\left[\frac{2(B_1+B_2)}{A_1}\sin^2\theta\right]\bullet\tag{76}$$

将(76) 代入(42), 可得 $p_0(\theta,\phi,\boldsymbol{u})$• 将(76) 代入(49) 可得 $p_{1/2}(\theta,\phi,\boldsymbol{u})$ 除 $p_0^{(1/2)}(\theta)\phi_0(\boldsymbol{u})$ 之外的其余各项的具体表达式•

8 最大 Lyapunov 指数的表达式

容易证明, 由式(23) 定义的Fokker_Planck 算子 L_ε 为遍历算子, 则 Oseledec 乘法遍历定理[9] 成立• 这时由此算子:“生成” 的扩散过程$(\theta,\phi,\boldsymbol{u})$ 在区域$[0,2\pi]\times[0,\pi]\times R^n$ 是遍历的向量

过程• 于是随机分叉系统(16) 的最大Lyapunov 指数为

$$\lambda_\varepsilon = \langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon \rangle = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int d\boldsymbol{u}[\rho_\varepsilon p_\varepsilon] + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int d\boldsymbol{u}[\rho_\varepsilon p_\varepsilon], \tag{77}$$

其中，$p_\varepsilon(\theta, \phi, \boldsymbol{u})$ 是由(26) 式给出的不变测度的渐近展式，ρ_ε 则由(21) 式给出

$$\rho_\varepsilon = -\varepsilon\rho_1 + \varepsilon^{1/2} u_1 \rho_{1/2}, \tag{78}$$

上式中，ρ_1、$\rho_{1/2}$ 均由(22) 式给出•

一般地，若 ρ_ε 具有渐近展式

$$\rho_\varepsilon = \rho_0 + \varepsilon^{1/2}\rho_{1/2} + \varepsilon\rho_1 + \cdots, \tag{79}$$

则由(77) 式定义的最大 Lyapunov 指数，可以证明，具有渐近展式

$$\begin{aligned}\langle \rho_\varepsilon, p_0 \rangle = {} & \langle \rho_0, p_0 \rangle + \varepsilon^{1/2}[\langle \rho_{1/2}, p_0 \rangle + \langle \rho_0, p_{1/2} \rangle] + \\ & \varepsilon[\langle \rho_1, p_0 \rangle + \langle \rho_{1/2}, p_{1/2} \rangle + \langle \rho_{1/2}, p_{1/2} \rangle] + \cdots \bullet\end{aligned} \tag{80}$$

8.1 渐近分析的合理性

对于渐近展式(80)，还存在着一个问题，即在什么条件下，以上的渐近展式及其近似式是有效的• 下面将研究以上渐近分析方法的合理性•

根据 L. Arnold 的思路[10]，考虑 FPK 方程(25) 的伴随问题

$$L_\varepsilon^* p_\varepsilon^* = \rho_\varepsilon, \tag{81}$$

并取方程(81) 的解 p_ε^* 为

$$p_\varepsilon^* = p_0^* + \varepsilon^{1/2} p_{1/2}^* + \cdots + \varepsilon^N p_N^* \bullet \tag{82}$$

L_ε^* 是 L_ε 的伴随算子，定义为

$$L_\varepsilon^* = L_0^* + \varepsilon^{1/2} L_{1/2}^* + \varepsilon L_1^*, \tag{83}$$

其中

$$L_0^* = \omega\frac{\partial}{\partial\phi} + L_{\boldsymbol{u}}^*,\ L_{1/2}^* = u_1\theta_{1/2}\frac{\partial}{\partial\theta} + u_1 F_\varphi\frac{\partial}{\partial\phi},\ L_1^* = \theta_1\frac{\partial}{\partial\theta}\bullet \tag{84}$$

一般情况下，方程(81) 并不可能具有形如(82) 的解，但根据(82) 可构造以下的"伴随"方程[10]

$$\begin{aligned}&(L_0^* + \varepsilon^{1/2}L_{1/2}^* + \varepsilon L_1^*)(p_0^* + \varepsilon^{1/2}p_{1/2}^* + \cdots + \varepsilon^N p_N^*) = \\ &\quad \rho_\varepsilon - (q_0 + \varepsilon^{1/2} q_{1/2} + \cdots + \varepsilon^N q_N) + \\ &\quad \varepsilon^{N+1/2}(L_{1/2}^* p_N^* + L_1^* p_{N-1/2}^*) + \varepsilon^{N+1}(L_1^* p_N^*),\end{aligned} \tag{85}$$

其中，$q_0, q_{1/2}, \cdots, q_N$ 为一族待定的，独立于 θ、ϕ 的常数• 通过选择这族常数可使以下方程

$$\begin{cases} L_0^* p_0^* = \rho_0 - q_0, \\ L_0^* p_{1/2}^* = \rho_{1/2} - q_{1/2} - L_{1/2}^* p_0^*, \\ L_0^* p_1^* = \rho_1 - q_1 - L_{1/2}^* p_{1/2}^* - L_1^* p_0^*, \\ \cdots\cdots, \\ L_0^* p_N^* = -q_N - L_{1/2}^* p_{N-1/2}^* - L_1^* p_{N-1}^* \end{cases} \tag{86}$$

及其相应的可解性条件

$$\begin{cases}\langle \rho_0 - q_0, p_0\rangle = 0,\\ \langle \rho_{1/2} - q_{1/2} - L_{1/2}^* p_0^*, p_0\rangle = 0,\\ \langle \rho_1 - q_1 - L_{1/2}^* p_{1/2}^* - L_1^* p_0^*, p_0\rangle = 0,\\ \cdots\cdots,\\ \langle - q_N - L_{1/2}^* p_{N-1/2}^* - L_1^* p_{N-1}^*, p_0\rangle = 0\end{cases} \tag{87}$$

成立•

作为 FPK 方程(25)的解 $p_\varepsilon(\theta, \phi, \boldsymbol{u})$ 的近似式, $p_\varepsilon(\theta, \phi, \boldsymbol{u})$ 定义为

$$p_\varepsilon(\theta, \phi, \boldsymbol{u}) = p_0(\theta, \phi, \boldsymbol{u}) + \varepsilon^{1/2} p_{1/2}(\theta, \phi, \boldsymbol{u}) + \cdots + \varepsilon^N p_N(\theta, \phi, \boldsymbol{u}), \tag{88}$$

于是可知

$$L_\varepsilon p_\varepsilon = \varepsilon^{N+1/2}(L_{1/2} p_N + L_1 p_{N-1/2}) + \varepsilon^{N+1} L_1 p_N \bullet \tag{89}$$

用 p_ε 替代(80)式中的 p_ε, 并根据(85)式可得

$$\begin{aligned}\langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle = {} & \langle [L_\varepsilon^* p_\varepsilon^* + q_\varepsilon - \varepsilon^{N+1/2}(L_{1/2}^* p_N^* + L_1^* p_{N-1/2}^*) - \varepsilon^{N+1}(L_1^* p_N^*)], p_\varepsilon\rangle = \\ & \langle q_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle + \langle L_\varepsilon^* p_\varepsilon^*, p_\varepsilon\rangle - \varepsilon^{N+1/2}\langle L_{1/2}^* p_N^* + L_1^* p_{N-1/2}^*, p_\varepsilon\rangle - \varepsilon^{N+1}\langle L_1^* p_N^*, p_\varepsilon\rangle = \\ & \langle q_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle + \varepsilon^{N+1/2}[\langle p_\varepsilon^*, L_{1/2} p_N + L_1 p_{N-1/2}\rangle - \langle L_{1/2}^* p_N^* + L_1^* p_{N-1/2}^*, p_\varepsilon\rangle] + \\ & \varepsilon^{N+1}[\langle p_\varepsilon^*, L_1 p_N\rangle - \langle L_1^* p_N^*, p_\varepsilon\rangle],\end{aligned} \tag{90}$$

而同时

$$\langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle = \langle q_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle - \varepsilon^{N+1/2}\langle L_{1/2}^* p_N^* + L_1^* p_{N-1/2}^*, p_\varepsilon\rangle - \varepsilon^{N+1}\langle L_1^* p_N^*, p_\varepsilon\rangle \bullet \tag{91}$$

由(90)和(91)可得最大 Lyapunov 指数(80)与其近似式的误差为

$$\begin{aligned}\langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle - \langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle = {} & \varepsilon^{N+1/2}\langle 2p_\varepsilon^* - p_\varepsilon^*, L_{1/2} p_N + L_1 p_{N-1/2}\rangle + \\ & \varepsilon^{N+1}\langle 2p_\varepsilon^* - p_\varepsilon^*, L_1 p_N\rangle \bullet\end{aligned} \tag{92}$$

从(92)式易证, 当

$$\sup_{\theta, \phi, \boldsymbol{u}} |L_{1/2} p_N + L_1 p_{N-1/2}| \leqslant k_1 < \infty, \quad |L_1 p_N| \leqslant k_2 < \infty$$

以及当 N 充分大时, $\langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle$ 是 $\langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle$ 很好的近似, 而此时 Lyapunov 指数 λ_ε 的渐近展式为

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon = {} & \langle \rho_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon^N) = \langle \rho_0, p_0\rangle + \varepsilon^{1/2}[\langle \rho_{1/2}, p_0\rangle + \langle \rho_0, p_{1/2}\rangle] + \\ & + \varepsilon[\langle \rho_1, p_0\rangle + \langle \rho_{1/2}, p_{1/2}\rangle + \langle \rho_0, p_1\rangle] + o(\varepsilon^{3/2}) \bullet\end{aligned} \tag{93}$$

8.2 最大 Lyapunov 指数的渐近展式

对于随机分叉系统(16), 有 $\rho_0 = 0$, 于是相应的 Lyapunov 指数的渐近展式为

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{1/2}\langle u_1 \rho_{1/2}, p_0\rangle + \varepsilon[\langle \rho_1, p_0\rangle + \langle u_1 \rho_{1/2}, p_{1/2}\rangle] + \cdots,$$

相应于随机向量过程 $\boldsymbol{u}(t)$, 其均值为 $\langle \boldsymbol{u}(t)\rangle = 0$, 于是

$$\langle u_1 \rho_{1/2}(\theta, \phi), p_0\rangle = \frac{1}{2\pi}\int u_1 \psi_0(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \rho_{1/2}(\theta, \phi) F(\theta)\, \mathrm{d}\theta = 0 \bullet$$

因此可知, Lyapunov 指数 λ_ε 的渐近展式为

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon[\langle \rho_1, p_0\rangle + \langle u_1 \rho_{1/2}, p_{1/2}\rangle] + \cdots \bullet \tag{94}$$

显然当(74)式确定的常数 $A_1 \neq A_2$ 时, Lyapunov 指数 λ_ε 不可能具有分析显式• 本文只研究 Lyapunov 指数 λ_ε 具有分析显式的情况• 设 $A_1 = A_2$, 于是

$$p_0(\theta, \phi, \boldsymbol{u}) = \frac{C}{A_1}|\cos\theta| \exp\left[\frac{2(B_1 + B_2)}{A_1}\sin^2\theta\right]\psi_0(\boldsymbol{u}),$$

其中 C 为积分常数•

由(22)式易知

$$\rho_1 = \delta_1\cos^2\theta + \delta_2\sin^2\theta,$$

$$\rho_{1/2} = 0.5(F_{r2} + F_{z1})\sin 2\theta + F_{r1}\cos^2\theta + F_{z2}\sin^2\theta,$$

$$F_{r1} = 0.5[J_1 + J_2\cos 2\phi + H_1\sin 2\phi],$$

$$F_{r2} = b_{13}\sin\phi + b_{23}\cos\phi,$$

$$F_{z1} = b_{31}\sin\phi + b_{32}\cos\phi,\quad F_{z2} = b_{33}.$$

将以上各式代入(94)可得

$$\langle\rho_1, p_0\rangle = \frac{I_+ + I_-}{C_+ + C_-} = \delta_1 + \frac{(\delta_1 - \delta_2)}{2A} + \frac{[\delta_2 - \delta_1]\exp[A]}{\sqrt{\pi}\sqrt{A}\,\mathrm{erf}[\sqrt{A}]}, \tag{95}$$

$$\langle u_1\rho_{1/2}, p_{1/2}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left\{\langle u_1, \phi_k(\boldsymbol{u})\rangle_{\boldsymbol{u}}\langle\rho_{1/2}, p_k^{(1/2)}\rangle_{\phi,\theta}\right\} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\xi_k\langle\rho_{1/2}, p_k^{(1/2)}\rangle_{\phi,\theta}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\xi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}[\rho_{1/2}, p_k^{(1/2)}]\,\mathrm{d}\phi\right\} =$$

$$2\beta_1 + 4\beta_2 - \frac{(4\beta_0 - 5\beta_2)}{A} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{[\beta_1 + \beta_2]\exp[A]}{\sqrt{A}\,\mathrm{erf}[\sqrt{A}]}, \tag{96}$$

其中

$$I_+ = \int_0^{\pi/2}[\delta_1\cos^2\theta + \delta_2\sin^2\theta][\cos\theta\exp(A\sin^2\theta)]\,\mathrm{d}\theta,$$

$$I_- = -\int_{\pi/2}^{\pi}[\delta_1\cos^2\theta + \delta_2\sin^2\theta][\cos\theta\exp(A\sin^2\theta)]\,\mathrm{d}\theta,$$

$$C_+ = \int_0^{\pi/2}[\cos\theta\exp(A\sin^2\theta)]\,\mathrm{d}\theta,$$

$$C_- = -\int_{\pi/2}^{\pi}[\cos\theta\exp(A\sin^2\theta)]\,\mathrm{d}\theta,$$

$$A = \frac{2(B_2 + B_3)}{A_1} = 1 - \frac{\left[\delta_2 - \delta_1 + \frac{1}{4}S(2\omega)(H_1^2 + J_2^2)\right]}{S(\omega)(b_{13}^2 + b_{23}^2)},$$

$\mathrm{erf}(y)$ 为误差函数.

综合(95)、(96)可知, 对于随机扰动的余维2分叉系统(16), 当 $A_1 = A_2$ 时, 其Lyapunov指数渐近展式为

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\left\{\delta_1 + 2(\beta_1 + 2\beta_2) + \frac{(\delta_1 - \delta_2) - 2(4\beta_0 + 5\beta_2)}{2A} + \right.$$

$$\left.\frac{\exp[A]}{\sqrt{\pi}\sqrt{A}\,\mathrm{erf}\sqrt{A}}[[\delta_2 - \delta_1] - 2[\beta_1 + \beta_2]]\right\} + \cdots \tag{97}$$

9 总 结

对于受小参数实噪声激励的余维2分叉系统, 本文在[11]的基础上, 使用L. Arnold的渐近方法以及Fokker_Planck算子的特征谱展式, 并根据一维扩散过程的奇点和奇异边界理论, 确定了 $F(\theta)$ 满足FPK方程的平稳解以及系统的最大Lyapunov指数的渐近展式.

为使模型更具有一般性, 取系统的参激实噪声为一线性滤波系统的输出_零均值的平稳高斯扩散过程并满足细致平衡条件, 因而随机平均法不再适用.

Lyapunov指数是研究非线性随机系统非常重要的指标. 本文的结果可用来确定相关系统

概率 1 意义上的随机分叉点的位置•

本文的方法可用于计算高于三维系统的最大 Lyapunov 指数的渐近展式•

[参 考 文 献]

[1] Ito K, McKean H P, Jr. Diffusion Processes and Their Sample Paths[M]. New York: Springer_Verlag, 1965.

[2] Karlin S, Taylor H M. A Second Course in Stochastic Processes[M]. New York: Academic Press, 1981.

[3] 刘先斌. 随机力学系统的分叉行为与变分方法研究[D]. 博士学位论文. 成都: 西南交通大学, 1995.

[4] 刘先斌,陈虬,陈大鹏. 非线性随机动力系统的稳定性和分岔研究[J]. 力学进展, 1996, **26**(4): 437~452.

[5] 刘先斌,陈虬,孙训方. 白噪声参激一类余维 2 分岔系统研究[J]. 力学学报, 1997, **29**(5): 563~572.

[6] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

[7] Lin Y K, Cai G Q. Stochastic stability of nonlinear systems[J]. Int J Nonlinear Mech, 1994, **29**(4): 539~555.

[8] Ariaratnam S T, Xie W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of two_dimensional parametrically excited random systems[J]. ASME J Appl Mech, 1993, **60**(5): 677~682.

[9] Arnold L, Wihstutz V. Lyapunov Exponents[M]. Lecture Notes in Mathematics, 1186, Berlin: Springer_Verlag, 1986.

[10] Arnold L, Papanicolaou G, Wihstutz V. Asympototic analysis of the Lyapunov exponents and rotation numbers of the random oscilltor and applications[J]. SIAM J Appl Math, 1986, **46**(3): 427~450.

[11] 刘先斌,陈大鹏,陈虬. 实噪声参激一类余维 2 分叉系统的最大 Lyapunov 指数(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(9): 902~913.

On the Maximal Lyapunov Exponent for a Real Noise Parametrically Excited Co_Dimension Two Bifurcation System(Ⅱ)

Liu Xianbin[1], Chen Qiu[1], Chen Dapeng[2]

(1. Institute of Applied Mechanics & Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China;

2. Department of Engineering Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China)

Abstract: For a co_dimension two bifurcation system on a three_dimensional central manifold, which is parametrically excited by a real noise, a rather general model is obtained by assuming that the real noise is an output of a linear filter system_a zeromean stationary Gaussian diffusion process which satisfies detailed balance condition. By means of the asymptotic analysis approach given by L. Arnold and the expression of the eigenvalue spectrum of Fokker_Planck operator, the asymptotic expansions of invariant measure and maximal Lyapunov exponent for the relevant system are obtained.

Key words: real noise; parametric excitation; co_dimension two bifurcation; detailed balance; FPK equation; singular boundary; maximal Lyapunov exponent; solvability condition