应用数学和力学, 第 20 卷 第 11 期(1999 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 11_1203_08

四元数体上矩阵的广义对角化*

姜同松[1], 陈 丽[2]

(1. 山东临沂师院 数学系, 山东 临沂 276005; 2. 山东临沂师院 物理系, 山东 临沂 276005)

(叶庆凯推荐)

摘要: 引入了复四元数环和四元数体上矩阵可 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化的概念, 研究了复四元数环上矩阵的性质, 给出了四元数体上矩阵可 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化的充分必要条件和求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化的方法•

关 键 词: 复四元数环; 四元数体; 矩阵; 对角化矩阵
中图分类号: O151.21 文献标识码: A

引 言

近年来, 四元数矩阵在刚体力学、量子力学、控制理论和陀螺技术中的应用日趋重要和广泛[1~3]• 随着上述学科的不断发展, 对四元数矩阵理论的更深刻认识, 特别是对四元数矩阵对角化理论的研究就显得愈来愈重要• 由于四元数乘法的非交换性, 给这方面的研究带来了很大的困难• 文献[4]研究了四元数矩阵的 Jordan 标准形, 在本文中, 笔者首先定义了复四元数环, 研究了复四元数环上矩阵的性质; 然后引入了四元数体上矩阵可广义对角化的概念, 给出了四元数体上矩阵可广义对角化的充分必要条件和求广义对角化的方法•

令 $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{C} = \left\{ a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ 表示复数域, $\mathbf{Q}$ 表示四元数体, $\mathbf{G}$ 表示由下列元素组成的集合

$$x = x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k}, \quad x_l \in \mathbf{C} \qquad (l = 0, 1, 2, 3),$$

且

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k},$$
$$\sqrt{-1}\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-1}\,\mathrm{j} = \mathrm{j}\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-1}\,\mathrm{k} = \mathrm{k}\sqrt{-1}•$$

容易验证, $\mathbf{G}$ 是一个环, 且 $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{G}$, 称 $\mathbf{G}$ 为复四元数环•

$\boldsymbol{F}^{m\times n}$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 上 $m \times n$ 矩阵的集合, 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}^{n\times n}$, 在 $\boldsymbol{F}$ 上相似, 则记为 $\boldsymbol{A} \overset{F}{\sim} \boldsymbol{B}$

* 收稿日期: 1998_04_29; 修订日期: 1999_06_28
基金项目: 山东省自然科学基金资助项目
作者简介: 姜同松(1962~) , 男, 教授, 研究方向: 矩阵论及环论, 发表论文 30 多篇, 多次获得省市科技进步奖.

1 复四元数环上的矩阵

由复四元数环 **G** 的定义易得

命题 1.1 1) $\forall x\in \mathbf{G}$, 存在唯一地一对 $x_1, x_2\in \mathbf{Q}$, 使 $x=x_1+x_2\sqrt{-1}$;

2) $\forall \boldsymbol{A}\in \mathbf{G}^{m\times n}$, 存在唯一地一对 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\in \mathbf{Q}^{m\times n}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\sqrt{-1}$.

对 $\forall x=x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}\in \mathbf{G}$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{G}^{m\times n}$, 定义复表示 f:

$$f(x)=\begin{pmatrix} x_0+x_1\sqrt{-1} & x_2+x_3\sqrt{-1}\\ -x_2+x_3\sqrt{-1} & x_0-x_1\sqrt{-1}\end{pmatrix}\in \mathbf{C}^{2\times 2},$$

$$f(\boldsymbol{A})=(f(a_{ij}))\in \mathbf{C}^{2m\times 2n},$$

显然, f 是一个双射, 且 $\forall\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathbf{C}^{2\times 2}$, 总有,

$$f\left(\frac{a+d}{2}+\frac{(d-a)\sqrt{-1}}{2}\mathrm{i}+\frac{b-c}{2}\mathrm{j}-\frac{(b+c)\sqrt{-1}}{2}\mathrm{k}\right)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

且对任意 $A\in \mathbf{G}^{m\times n}$, $B\in \mathbf{G}^{n\times s}$,

$$f(\boldsymbol{AB})=f(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{B}).$$

由上式和[5]易得

定理 1.2[5] 1) $\mathbf{G}\cong \mathbf{C}^{2\times 2}$,

2) $\mathbf{G}^{n\times n}\cong \mathbf{C}^{2n\times 2n}$.

由上述环同构定理可知, 复四元数环 **G** 不是一个体, 一个复四元数即为一个复二阶矩阵, 复四元数环上 $n\times n$ 矩阵的性质即为复数域上 $2n\times 2n$ 矩阵的性质.

定义 1.1 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{G}^{n\times n}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式定义为 $|\boldsymbol{A}|_{\mathbf{G}}=|f(\boldsymbol{A})|$.

命题 1.3 令 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{G}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow f(\boldsymbol{A})$ 可逆.

由定理 1.2 易得

命题 1.4 令 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in \mathbf{G}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}\overset{\mathbf{G}}{\sim}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow f(\boldsymbol{A})\overset{\mathbf{C}}{\sim}f(\boldsymbol{B})$.

命题 1.5 令 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in \mathbf{Q}^{n\times n}$, 若 $\boldsymbol{A}\overset{\mathbf{G}}{\sim}\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}\overset{\mathbf{G}}{\sim}\boldsymbol{B}$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}\overset{\mathbf{G}}{\sim}\boldsymbol{B}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in \mathbf{G}^{n\times n}$, 使 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$, 由命题 1.1 可令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\sqrt{-1}$, $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2\in \mathbf{Q}^{n\times n}$, 所以有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\sqrt{-1})=(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\sqrt{-1})\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AP}_1+\boldsymbol{AP}_2\sqrt{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}+\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\sqrt{-1}$, 又因 $\boldsymbol{AP}_1, \boldsymbol{AP}_2, \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\in \mathbf{Q}^{n\times n}$, 所以 $\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AP}_2=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}$.

令 $g(x)=|\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2x|_{\mathbf{G}}=|f(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2x)|$, $x\in \mathbf{C}$, 因为 $g(\sqrt{-1})=|\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\sqrt{-1}|_{\mathbf{G}}=|\boldsymbol{P}|_{\mathbf{G}}\neq 0$, 所以 $g(x)\neq 0$, 由定义易知 $g(x)$ 是一个次数 $\leqslant 2n$ 的复多项式, 故存在 $x_0\in \mathbf{R}$, 使 $g(x_0)=|\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2x_0|_{\mathbf{G}}\neq 0$, 则 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2x_0\in \mathbf{Q}^{n\times n}$ 可逆, 并且有 $\boldsymbol{AP}_0=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{A}\overset{\mathbf{Q}}{\sim}\boldsymbol{B}$.

由上易得

定理 1.6 令 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in \mathbf{Q}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}\overset{\mathbf{Q}}{\sim}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow f(\boldsymbol{A})\overset{\mathbf{C}}{\sim}f(\boldsymbol{B})$.

2 四元数体上可逆矩阵的$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$对角化

定义 2.1 设 $A\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 称 A 是四元数体上一个可$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$对角化的矩阵, 如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}\Lambda=(\lambda_1\varepsilon_{i_1},\lambda_2\varepsilon_{i_2},\cdots,\lambda_n\varepsilon_{i_n}),$$

其中 $\boldsymbol{P}=(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_n})$ 是一个置换矩阵, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, $\varepsilon_i=(0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0)^t$, $\lambda_i\in\mathbf{Q}$, $(i=1,2,\cdots,n)$.

显然, 可对角化的矩阵是$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$对角化矩阵, 可次对角化的矩阵是$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ n & (n-1) & \cdots & 1\end{pmatrix}$对角化的矩阵.

命题 2.1[6] 对 $\forall x=x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}\in\mathbf{Q}$, 必存在 $y\in\mathbf{Q}$, 使

$$y^{-1}xy=x_0+h\mathrm{i},\quad h=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\geqslant 0,$$

记 $x=x_0+h\mathrm{i}\in\mathbf{C}$.

定义 2.2 令 $\lambda_i\in\mathbf{Q}$, $i=1,2,\cdots,k$, 称矩阵

$$\boldsymbol{B}_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \cdots & \lambda_k\\ \lambda_1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \lambda_{k-1} & 0\end{pmatrix},$$

为 $\lambda_k\cdots\lambda_2\lambda_1$ 循环若当块.

命题 2.2 令 $d=\lambda_k\cdots\lambda_2\lambda_1$, 由命题 2.1, 存在 $y\in\mathbf{Q}$, 使 $d=y^{-1}dy$,

1) 若 $d\neq 0$, 则 $\boldsymbol{B}_k^k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)=\mathrm{diag}(\lambda_k\cdots\lambda_2\lambda_1,\lambda_1\lambda_k\cdots\lambda_2,\cdots,\lambda_{k-1}\cdots\lambda_1\lambda_k)\sim d\boldsymbol{I}_k$;

2) 若 $d\neq 0$, 则 $\boldsymbol{B}_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\sim\boldsymbol{B}_k(1,\cdots,1,d)\sim\boldsymbol{B}_k(1,\cdots,1,d)\sim\mathrm{diag}(\sqrt[k]{d}(1,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{k}},\cdots,\mathrm{e}^{\frac{2(k-1)\pi i}{k}}))$;

3) 若 $d=0$, 则 $\boldsymbol{B}_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\sim\sum_{i=1}^{t}\oplus\boldsymbol{J}_i(0)$,

其中 $\boldsymbol{J}_i(0)$ 是特征根 0 的若当块, $t=k-\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k))$;

4) 若 $d\neq 0$, 则 $f(\boldsymbol{B}_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k))\sim\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & d\\ \boldsymbol{I}_k & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & \bar{d}\\ \boldsymbol{I}_k & 0\end{pmatrix}\right)$;

5) 若 $|x\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{B}_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)|_Q=(x^k-d)(x^k-\bar{d})$;

6) $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{i_1},\boldsymbol{A}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{A}_{i_s})\sim\mathrm{diag}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)$

其中 $\boldsymbol{A}_i\in\mathbf{Q}^{n_i\times n_i}$, $i_1,i_2,\cdots,i_s$, 是 $1,2,\cdots,s$ 的一个排列.

证明 1), 6) 显然成立, 由[4]知 3) 成立.

若 $d\neq 0$, 令 $d=p^{-1}dp\in\mathbf{C}$, $p\in\mathbf{Q}$, $\boldsymbol{T}_1=\mathrm{diag}(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\cdots,\lambda_2\lambda_1)$, $\boldsymbol{T}_2=\mathrm{diag}(p,\lambda_1 p,\cdots,\lambda_{k-1}\cdots\lambda_2\lambda_1 p)$, 则

$$T_1^{-1}B_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)T_1 = B_k(1, \cdots, 1, d),$$
$$T_2^{-1}B_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)T_2 = B_k(1, \cdots, 1, d),$$

因此 2) 成立•

若 $d \neq 0$, 由定理 1.2 和 2) 易知

$$f(B_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)) \sim f(B_k(1, \cdots, 1, d)) \sim \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & d \\ I_k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bar{d} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}\right);$$

因此 4), 5) 成立, 若 $d = 0$, 则由定理 1.2 和 3) 和 5) 成立•

命题 2.3　1)　置换矩阵 P 是可逆的, 且 $P^{-1} = P^t$;

2)　若 $P = (\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n})$ 是一个置换矩阵, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 则 $P^{-1}\Lambda P = \mathrm{diag}(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_n})$•

证明　因为 $P^tP = I_n$, $P^t\Lambda P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P)$, 所以命题成立•

命题 2.4[7]　任意置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 都可写为一系列不相交的循环置换的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ j_2 & j_3 & \cdots & j_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{h_1+1} & j_{h_1+2} & \cdots & j_{h_1+h_2} \\ j_{h_1+2} & j_{h_1+3} & \cdots & j_{h_1+1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} j_{v+1} & j_{v+2} & \cdots & j_{v+h_s} \\ j_{v+2} & j_{v+3} & \cdots & j_{v+1} \end{pmatrix} =$$
$$(j_1 j_2 \cdots j_{h_1})(j_{h_1+1} j_{h_1+2} \cdots j_{h_1+h_2})\cdots(j_{v+1} j_{v+2} \cdots j_{v+h_s}), \tag{1}$$

其中 $v = \sum_{i=1}^{s-1} h_i$, $v + h_s = n$, $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列•

命题 2.5[7]　置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 的阶是 $h_1, h_2, \cdots, h_s$ 的最小公倍数•

命题 2.6　令 $A \in Q^{n\times n}$, A 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化矩阵 $\Leftrightarrow$

A 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & h_1 & h_1+1 & h_1+2 & \cdots & h_1+h_2 & \cdots & v+1 & v+2 & \cdots & v+h_s \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & h_1+2 & h_1+3 & \cdots & h_1+1 & \cdots & v+2 & v+3 & \cdots & v+1 \end{pmatrix}$ 对角化矩阵, $v = \sum_{i=1}^{s-1} h_i$, $v + h_s = n$•

证明　若 P 是一个置换矩阵, 则由[8] 存在一个置换矩阵 Q 使

$$Q^{-1}PQ = \mathrm{diag}(B_{h_1}(1, \cdots, 1), B_{h_2}(1, \cdots, 1), \cdots, B_{h_s}(1, \cdots, 1))$$

由命题 2.3 有

$$Q^{-1}P\Lambda Q = Q^{-1}PQQ^{-1}\Lambda Q =$$
$$\mathrm{diag}(B_{h_1}(1, \cdots, 1), B_{h_2}(1, \cdots, 1), \cdots, B_{h_s}(1, \cdots, 1))Q^{-1}\Lambda Q =$$
$$\mathrm{diag}(B_{h_1}(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_{h_1}}), B_{h_2}(\lambda_{j_{h_1+1}}, \lambda_{j_{h_1+2}}, \cdots, \lambda_{j_{h_1+h_2}}), \cdots, B_{h_s}(\lambda_{j_{v+1}}, \lambda_{j_{v+2}}, \cdots, \lambda_{j_{v+h_s}})),$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2 \cdots, n$ 的一个排列•

因此, 命题成立•

由命题 2.2 和命题 2.6 易得

命题 2.7　令 $A \in Q^{n\times n}$, 若 A 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化矩阵, 则

1) $A\sim\operatorname{diag}(B_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,d_{k_1}),\cdots,B_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,d_{k_r}),B_{h_{k_{r+1}}},\cdots,B_{h_{k_s}})$,

其中 $B_{h_{k_{r+j}}}\sim\sum_{i=1}^{t_i}\oplus J_{ji}(0)$, $J_{ji}(0)$ 是特征根 0 的若当块, $0\neq d_{k_i}\in\mathbf{C}$, $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是 $1,2,\cdots,s$ 的一个排列;

2) $A^{h_1h_2\cdots h_s}$, A^m 是 $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$ 对角化矩阵, m 是置换 $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ 的阶;

3) $|xI_n-A|_Q=\prod_{i=1}^{s}(x^{h_i}-d_i)(x^{h_i}-\bar{d}_i)$;

4) $f(A)$ 是

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&h_1&h_1+1&h_1+2&\cdots&2h_1&2h_1+1&2h_1+2&\cdots&2h_1+h_2\\2&3&\cdots&1&h_1+2&h_1+3&\cdots&h_1+1&2h_1+2&2h_1+3&\cdots&2h_1+1\end{pmatrix.$$
$$\begin{matrix}2h_1+h_2+1&2h_1+h_2+2&\cdots&2h_1+2h_2&\cdots&v+1&v+2&\cdots&v+h_s\\2h_1+h_2+2&2h_1+h_2+3&\cdots&2h_1+h_2+1&\cdots&v+2&v+3&\cdots&v+1\end{matrix}$$
$$\left.\begin{matrix}v+h_s+1&v+h_s+2&\cdots&v+2h_s\\v+h_s+2&v+h_s+3&\cdots&v+h_s+1\end{matrix}\right)$$

对角化矩阵, $v=2\sum_{i=1}^{s-1}h_i$. 即

$f(A)\sim\operatorname{diag}(B_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,d_{k_1}),B_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,\bar{d}_{k_1}),\cdots,$

$B_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,d_{k_r}),B_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,\bar{d}_{k_r}),B_{h_{k_{r+1}}},B_{h_{k_{r+1}}},\cdots,B_{h_{k_s}},B_{h_{k_s}})$,

由命题 2.2 和命题 2.7 得

定理 2.8 令 $A\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 若 A 可逆, 则下列等价

1) A 是 $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ 对角化矩阵;

2) $A\sim\operatorname{diag}(B_{h_1}(1,\cdots,1,d_1),B_{h_2}(1,\cdots,1,d_2),\cdots,B_{h_s}(1,\cdots,1,d_s))$, $0\neq d_i\in\mathbf{C}$.

3) $|xI_n-A|_Q=\prod_{i=1}^{s}(x^{h_i}-d_i)(x^{h_i}-\bar{d}_i)$, 且 $f(A)$ 是一个可对角化的复矩阵, $0\neq d_i\in\mathbf{C}$, $i=1,2,\cdots,s$.

证明 由命题 2.7, 1) ⇒2), 2) ⇒3) 显然成立.

因为 $|xI_n-A|_Q=|xI_{2n}-f(A)|=\prod_{i=1}^{s}(x^{h_i}-d_i)(x^{h_i}-\bar{d}_i)$, 且 $f(A)$ 可对角化, 由命题 2.2, 2) 和命题 2.7, 4) 有

$f(A)\overset{C}{\sim}\operatorname{diag}(B_{h_1}(1,\cdots,1,d_1),B_{h_1}(1,\cdots,1,\bar{d}_1),\cdots,B_{h_s}(1,\cdots,1,d_s),B_{h_s}(1,\cdots,1,\bar{d}_s))=$
$f(\operatorname{diag}(B_{h_1}(1,\cdots,1,d_1),\cdots,B_{h_s}(1,\cdots,1,d_s)))$.

由定理 1.6, $A\overset{Q}{\sim}\operatorname{diag}(B_{h_1}(1,\cdots,1,d_1),\cdots,B_{h_s}(1,\cdots,1,d_s))$, 由命题 2.6 知 A 是 $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ 对角化矩阵.

3 四元数体上一般矩阵的 $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ 对角化

由[9]易得

命题 3.1 令 $J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{s\times s}$, $\lambda\in\mathbf{C}$, 若 $J^m(\lambda)$ 是一个可对角化的矩阵, 则 $s=1$ 或 $2\leqslant s\leqslant m$ 且 $\lambda=0$.

命题 3.2 令 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 若 A^m 是一个可对角化的矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}\sim\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,J_1(0),\cdots,J_t(0))$$

其中 λ_i 是$\boldsymbol{A}$ 的非零特征根, $\boldsymbol{J}_j(0)$ 是特征根0的 $k_j\times k_j$ 若当块, $1\leqslant k_j\leqslant m$, $i=1,2,\cdots,r$, $j=1,2,\cdots,t$.

证明 由[10]可令

$$\boldsymbol{A}\sim\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_1(\lambda_1),\boldsymbol{J}_2(\lambda_2),\cdots,\boldsymbol{J}_k(\lambda_k)),$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}.$$

因此, 由[9], 命题 3.1 和命题2.2, 6) 易知结论成立.

定理 3.3 令 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 下列等价

1) $\boldsymbol{A}$ 是$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$对角化的矩阵;

2) $f(\boldsymbol{A})\sim\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,d_{k_1}),\cdots,\boldsymbol{B}_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,d_{k_r}),\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+1}}},\cdots,\boldsymbol{B}_{h_{k_s}})$,

其中 $\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+j}}}\sim\sum_{i=1}^{t_j}\oplus\boldsymbol{J}_{ji}(0)$, $\boldsymbol{J}_{ji}(0)$ 是特征根 0 的若当块, $0\neq d_{k_i}\in\mathbf{C}$, $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是 $1,2,\cdots,s$ 的一个排列;

3) $|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|_{\mathbf{Q}}=\prod_{i=1}^{s}(x^{h_i}-d_i)(x^{h_i}-d_i)$, $f^m(\boldsymbol{A})$ 是可对角化的复矩阵, 并且, 对所有的 $d_{k_{r+j}}=0$, $f(\boldsymbol{A})$ 的若当标准形中特征根0的全部若当块恰组成 $2(s-r)$ 个0循环若当块 $\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+j}}}$, $\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+j}}}$, $j=1,2,\cdots,s-r$, $d_i\in\mathbf{C}$, $i=1,2,\cdots,s$, m 是置换$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$的阶.

证明 由命题 2.7, 1) ⇒2), 2) ⇒3) 显然成立.

因为$|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|_{\mathbf{Q}}=\prod_{i=1}^{s}(x^{h_i}-d_i)(x^{h_i}-d_i)$, $d_i\in\mathbf{C}$ 且$f^m(\boldsymbol{A})$ 可对角化, 由命题2.2, 2), 4), 6) 和命题 3.2, 有

$$f(\boldsymbol{A})\overset{C}{\sim}\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,d_{k_1}),\boldsymbol{B}_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,d_{k_1}),\cdots,$$
$$\boldsymbol{B}_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,d_{k_r}),\boldsymbol{B}_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,d_{k_r}),\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+1}}},\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+1}}},\cdots,\boldsymbol{B}_{h_{k_s}},\boldsymbol{B}_{h_{k_s}})=$$
$$f(\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,d_{k_1}),\cdots,\boldsymbol{B}_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,d_{k_r}),\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+1}}},\cdots,\boldsymbol{B}_{h_{k_s}})).$$

由定理 1.6, $\boldsymbol{A}\overset{Q}{\sim}\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_{h_{k_1}}(1,\cdots,1,d_{k_1}),\cdots,\boldsymbol{B}_{h_{k_r}}(1,\cdots,1,d_{k_r}),\boldsymbol{B}_{h_{k_{r+1}}},\cdots,\boldsymbol{B}_{h_{k_s}}))$, 由命题

2.6 知 A 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化矩阵•

令 $g_A(x) = |xI - A|$ 表示复矩阵 A 的特征多项式•

推论 3.4 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Q}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}$ 是一个次对角化矩阵 $\Leftrightarrow$

1) $(f(\boldsymbol{A}))^2$ 是一个可对角化复矩阵;

2) $g_{f(A)}(x) = (x - a)^{n-2[n/2]}(x - a)^{n-2[n/2]}\prod_{i=1}^{[n/2]}(x^2 - c_i)(x^2 - c_i)$•

其中 $a, c_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, \cdots, [n/2]$•

不难看出, 上述定理不但给出了四元数体上矩阵可 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化的充分必要条件, 而且还给出了求四元数体上矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 对角化的方法•

[参 考 文 献]

[1] 肖尚彬. 四元数矩阵的乘法及其可易性[J]. 力学学报, 1984, **16**(2): 159~ 166.

[2] 王庆贵. 四元数变换及其在空间机构位移分析中的应用[J]. 力学学报, 1983, **15**(1): 54~ 61.

[3] Adler S L. *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields* [M]. New York: Oxford U P, 1994.

[4] 陈龙玄, 侯仁民, 王亮涛. 四元数矩阵的 Jordan 标准形[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(6): 533~ 541.

[5] Nathan Jacobson. *Basic Algebra*, I[M]. San Francisco: W H Freeman and Company, 1974, 95~ 97.

[6] Zhang Fuzhen. Quaternions and matrices of quaternions[J]. *Linear Algebra Appl*, 1997, **251**: 21~ 57.

[7] Birkhoff G, Saunders M L. *A Survey of Modern Algebra* [M]. Fourth edition, New York: Macmillan Publishing Co, Inc, 1977, 150~ 151.

[8] Stuart J L, Weaver J R. Matrices that commute with a permutation matrix[J]. *Linear Algebra Appl*, 1991, **150**: 255~ 265.

[9] Larry Smith. *Linear Algebra* [M]. New York: Springer_Verlag, 1978, 208.

[10] Kenneth Hoffmna, Kunze Ray. *Linear Algebra* [M]. Second Edition. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice_Hall, Inc, 1991, 244~ 246.

Generalized Diagonalization of Matrices Over Quaternion Field

Jiang Tongsong[1], Chen Li[2]
(1. Department of Mathematics, Linyi Teachers College, Linyi, Shandong 276005, P R China;
2. Department of Physics, Linyi Teachers College, Linyi, Shandong 276005, P R China)

Abstract: A concept of $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ diagonalization matrix over quaternion field is given, necessary and sufficient conditions for determining whether a quaternion matrix is a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ diagonalization one are discussed, and a method of $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ diagonalization of matrix over quaternion field is given.

Key words: complex quaternion ring; quaternion field; matrix; diagonalization matrix