应用数学和力学, 第 20 卷 第 11 期(1999 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 11_1198_05

有序 Banach 空间中的拟弱收敛及其应用

杨光崇

(成都气象学院 基础科学系, 成都 610041)

(协平推荐)

摘要: 在有序 Banach 空间中引入拟弱收敛, 并表明拟弱收敛弱于弱收敛 由此, 在非紧性条件下, 获得了非连续增算子的不动点, 并将它应用于 Hammerstein 型非线性积分方程

关 键 词: 有序 Banach 空间; 分离性质; 拟弱收敛; 不动点
中图分类号: O177 91 文献标识码: A

引 言

众所周知, 有序 Banach 空间中的单调序列及不动点理论是研究非线性问题的重要工具之一 人们在使用这一工具时, 通常需作假定: 连续性和紧性(见[1~ 3]) 近来, 一些作者摆脱连续性限制, 在紧性(强紧或弱紧) 条件下, 获得增算子的不动点或混合单调算子的耦合不动点 (见[4~ 5]) 由此推知, 放松紧性限制, 在研究非线性问题中是有意义的

本文在有序 Banach 空间中引入拟弱收敛, 并说明拟弱收敛弱于弱收敛 由此, 我们获得了非连续和非紧性(强紧或弱紧) 条件下增算子的不动点, 并将它应用于 Hammerstein 型非线性积分方程

1 拟弱收敛及性质

设 (E, P) 是有序 Banach 空间, P 是一锥 序 由 P 引导, 即 $x \quad y$ 当且仅当 $y - x$ P P^* 是 P 的共轭锥, 即 $P^* = \left\{f \quad E^*, f(x) \quad 0, x \quad P\right\}$

定义 1 称 $P_0^* \quad P^*$ 对 P 具有分离性质, 如果 x 不属于 P, 总有 $f \quad P_0^*$, 使 $f(x) < 0$

由[6] 中的引理 1 知, $P_0^* = P^*$ 对 P 具有分离性质 后面我们将说明, 存在 $P_0^* \quad P$ 对 P 具有分离性质, 但 $P_0^* \quad P$ (见定理 1)

定义 2 设 P_0^* 具有定义 1 中的分离性质, $x_n \quad E, x \quad E$ 称 $\left\{x_n\right\}$ 拟弱收敛于 x, 如果对任意 $f \quad P_0^*$, 都有 $f(x_n) \quad f(x)$ 简记为 $x_n \quad x(P_0^*)$ 或 $\lim x_n = x(P_0^*)$

在[6] 中, 我们引入了 Qw 收敛 显然, Qw 收敛蕴含拟弱收敛 如果 P 为正规锥, 由[3] 知 P^* 是生成的, 即任意 $f \quad E^*$, 存在 f_1 和 $f_2 (f_k \quad P^*, k = 1, 2)$ 使 $f = f_1 - f_2$ 因此, Qw 收敛等价于弱收敛 因而, 拟弱收敛推广了 Qw 收敛(见注 1)

定理 1 设 $(C[a, b], P)$ 是有序 Banach 空间, $P = \left\{x(t) \quad 0: x(t) \quad C[a, b]\right\}$, 加法运

收稿日期: 1998_02_16; 修订日期: 1999_05_11
作者简介: 杨光崇(1963~) , 男, 讲师, 研究方向: 非线性泛函分析, 已发表论文十多篇.

算和数乘运算按通常定义　范数为 $x = \max\{|x(t)|: t \quad [a, b]\}$　令 $P_0^* = \{g: g \quad V_0[a, b], g\ (t)$ 连续, $g\ (t) \quad 0\}$, 则下面结论成立:

1) $P_0^* \quad P^*, P_0^* \quad P^*$

2) P_0^* 具有定义 1 中的分离性质

证明　因 $V_0[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的共轭空间, 根据[7] 中定理 4(P223), 容易知道

$$P^* = \{f: f \quad V_0[a, b], f \text{ 单增且} f(t) \quad 0\}$$

因此 1) 成立

如果 $x(t)$ 不在 P 中, 令 $x(t) = x^+(t) - x^-(t)$, 这里 $x^+(t) = \max\{x(t), 0\}$, $x^-(t) = \max\{-x(t), 0\}$, $t \quad [a, b]$　显然, $x^-(t)$ 连续, $x^-(t) \quad (t), x^-(t) \quad (t) \quad 0, t \quad [a, b]$

令 $g(t) = \int_a^x x^-(t)\,dt$, 则 $g \quad P_0^*$

根据[7] 中定理 4 的推论 1(P262) 知

$$g(x) = \int_a^b x\,dg = \int_a^b x x^-\,dt = -\int_a^b [x^-(t)]^2 dt < 0$$

因此, 2) 成立　这就完成了证明

分析[6] 中 Qw 收敛的意义, 实质是 P^* 对 P 具有分离性质　这导致了下列两个基本事实成立:

)　如果 $x_n \quad y_n,\ x_n \quad x,\ y_n \quad y$, 则 $x \quad y$　这里 $x_n \quad x$ 表示[6] 中 $\{x_n\}$ Qw 收敛于 x

)　$x =$ 　当且仅当 $f(x) = 0$, 对任意 $f \quad P^*,\ f = 1$ 成立　这里　是 E 的零元

基于 P_0^* 对于 P 具有定义 1 中的分离性质, 于是, 我们建立了定理 2

定理 2　设 (E, P) 是有序 Banach 空间, $P_0^* \quad P^*$ 具有分离性质, 那么下列四个结论成立:

1)　如果 $x_n \quad x(P_0^*), x_n \quad y(P_0^*)$, 则 $x = y$

2)　(E, P) 中单调序列在拟弱收敛意义下的极限点唯一

3)　设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是单调增加(减少) 序列, $x_n \quad y_n (n = 1, 2, \quad), x_n \quad x(P_0^*), y_n \quad y(P_0^*), f_n \quad P_0^*,\ f_n = 1,\ > 0$ 使得 $f_n(y_n - x_n)$ 　, 那么 $x \quad y$

4)　设 $\{x_n\}$ 是单调增加(减少) 序列, 如果 $\{x_n\}$ 中有子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \quad x(P_0^*)$, 则 $x_n \quad x(P_0^*)$

证明　因 P_0^* 具有分离性质, 用拟弱收敛取代 Qw 收敛, 知　) 成立　P_0^* 具有分离性质蕴含　) 成立, 因此 1) ~ 3) 的证明类似于[6] 中的引理 2 ~ 4 的证明, 故略去　关于 4), 不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加, 那么 $x_n \quad x$　因 $n_k \quad n$ 时, $x_{n_k} \quad x_n \quad x$, 故 $f(x_n) \quad f(x), f \quad P_0^*$　故 4) 成立

2　增算子的不动点定理

定理 3　设 (E, P) 是有序 Banach 空间, $u \quad V, P_0^*$ 具有分离性质　假设下列条件满足:

1)　$A: [u, v] \quad E$ 是增算子, $u \quad Au, Av \quad v$

2) $A([u,v])$ 中的单调序列$\{x_n\}$拟弱收敛于x E, 即x_n $x(P_0^*)$

那么A 在$[u, v]$ 中具有最小不动点x^*, 即对A 在$[u, v]$ 中的任意不动点x, 均有x^* x

证明 令 $=\{S: u$ S $[u,v]$ 如果$\{x_n\}$ S, x_n x, 则有x $S\}$, 易知$[u, v]$ 因此 非空 再令$M=$ $S(S$ $)$, 则

) M 非空, M $[u,v], A(M)$ M

) M 是拟弱收敛意义下的闭集, 即$\{x_n\}$ M, x_n $x(P_0^*)$, 则x M 成立

事实上, u S 对任意S 成立, 因此 u M 且$A(M)$ M $[u,v]$ 如果$\{x_n\}$ M, x_n $x(P_0^*)$, 那么, 对任意 S , 均有x S, 这表明x M

记$R=\{x: x$ Ax, x $M\}$, 那么 u R 故R 非空 在R 上定义控制函数$d(x)$ 如下:

$$d(x) = \sup_{\substack{f \ P_0^* \\ f \ =1}} \sup_{\substack{x \ u \\ u \ R}} \{f(Au - x)\} \tag{1}$$

因x R, x $A^n x$ R 因此, $d(x)$ 有意义, 且

$$0 \quad f(u-x) \quad f(Au-x) \quad f(v-u) \quad f \quad v-u \ , f \quad P_0^*$$

因此0 $d(x)$ $v-u$

如果x R, y R 且x y, 那么对 u R, u y, 有x u 且$Au-y$ $Au-x$ 因此$d(y)$ $d(x)$, 即$d(x)$ 是减函数 下证

$$\inf\{d(x): x \quad R, x \quad y\} = 0, y \quad R \tag{2}$$

如果(2)不成立, 则存在y_0 R 和 >0, 使得$d(x)$, 这里x y_0, x R 根据$d(x)$ 的定义, 在R 中有u_0, u_0 y_0, f_1 P_0^*, f_1 $=1$, 使得$f_1(Au_0-y_0)$ $/2$ 记$x_1=Au_0$, x_1 在R 中, x_1 y_0 对$x=x_1$, 在R 中有u_1, f_2 P_0^*, u_1 x_1, f_2 $=1$ 使得$f_2(Au_1-x_1)$ $/2$ 记$x_2=Au_1$, 则x_2 x_1 用归纳法, 满足(3) ~ (4) 的序列$\{x_n\}$被构造了:

$$y_0 \quad x_1 \quad x_2 \qquad x_n \qquad , x_n \quad A([u,v]), x_n \quad R \tag{3}$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}-x_n) \qquad /2, \quad f_n \quad P_0^*, \qquad f_n \ = 1 \tag{4}$$

由2) 知3) 中的$\{x_n\}$拟弱收敛于x E 由定理2 的4) 知, x_{n+1} $x(P_0^*)$ 另一方面, 记$y_{n+1}=x_n$, 根据定理2 的1) ~ 3), 4) 蕴含在拟弱收敛意义下, $\lim x_n$ $\lim x_{n+1}$ 矛盾 故(2) 成立

根据(1) 和(2), 存在下列序列$\{x_n\}$:

$$u \quad x_1 \quad x_2 \qquad x_n \qquad , x_n \quad A([u,v]), x_n \quad R, d(x_n) < \frac{1}{n} \tag{5}$$

根据假定2), (5) 中的$\{x_n\}$拟弱收敛于x^*, 那么x_n x^* M 是拟弱闭集蕴含x^* M 另一方面, A 是增算子, 又有x_n Ax_n Ax^* 因此, x^* Ax^*, 即x^* R

由于$d(x)$ 是减函数和(3), 我们有

$$0 \quad d(x^*) \quad d(x_n) < \frac{1}{n}, \text{因此 } d(x^*) = 0$$

这就证明$Ax^* = x^*$, 即x^* 是A 的不动点

设x 是A 在$[u, v]$ 中的任意不动点 因$A([u,x])$ $[u,x], [u,x]$ 是拟弱闭集, 因此M

$[u,x]$ 这表明 x^* x, 即 x^* 为 A 在 $[u,v]$ 中的最小不动点 证毕

推论 如果定理 3 的条件 2) 用下面的 2) 取代, 定理 3 仍成立

2) $A^k([u,v])$ 中的单调序列 $\{x_n\}$ 拟弱收敛于 x E 这里 k 为某一自然数, $A^{k+1}x = A(A^kx)$

证明 A^k 为增算子且满足定理 3 的所有条件, 因此 A^k 在 $[u,v]$ 中有最小不动 x^* $A^k(Ax^*) = A(A^kx) = Ax^*$ 表明, Ax^* 是 A^k 的不动点 由 x^* 的最小性, 知 x^* Ax^* 另一方面, A 是增算子, 又有

$$Ax^* \quad A^2x^* \quad\quad A^kx^* = x^*$$

因此 $Ax^* = x^*$ 这就证得 $x^* = Ax^*$ 因 A 的任意不动点都是 A^k 的不动点, 因此, x^* 是 A 在 $[u,v]$ 中的最小不动点 这就完成了证明

3 应 用

定理 4 考察下面 Hammerstein 型非线性积分方程:

$$x(s) = \ _a^b K(s,t)f(t,x(t))\mathrm{d}t = Ax(s) \tag{6}$$

假设下列条件满足:

1) $K(x,y)$ 0, (x,y) $[a,b]$ $[a,b]$, $f(x,y)$ 关于 y $(- \ , + \ )$ 是增函数, x $[a,b]$, 使得 $A: C[a,b]$ $C[a,b]$

2) 方程(6) 在 $C[a,b]$ 中有上解和下解, 即存在 $u(t), v(t)$ $C[a,b]$, $u(t)$ $v(t)$, 使得 u Au, Av v

3) $A([u,v])$ 中的单调序列 $\{x_n(t)\}$ 依勒贝格测度收敛于 $x(t)$, 即 $x_n(t) \ ^m\ x(t)$ $C[a,b]$ 这里 $[u,v] = \{x(t) \quad C[a,b]: u(t) \quad x(t) \quad v(t)\}$

则(6) 在 $[u,v]$ 中有最小解 $x^*(t)$

证明 记 $P = \{x(t) \quad C[a,b], x(t) \quad 0\}$, 序 由 P 导出 从 1) 和 2) 易知: $A: [u,v]$ $[u,v]$ 是增算子

设 $\{x_n(t)\}$ 是 $A([u,v])$ 中的单调序列, $x_n(t)$ 依勒贝格测度收敛于 $x(t)$ $C[a,b]$ 下证 $x_n(t)$ $x(t)(P_0^*)$, 这里 P_0^* 见定理 1

事实上, 由[7] 中定理 4 的推论 1(p262) , g 的绝对连续性, $g\ (t)$ 的连续性及勒贝格积分控制收敛定理, 知

$$g(x_n) - g(x) = \ _a^b x_n\mathrm{d}g - \ _a^b x\mathrm{d}g = \ _a^b (x_n - x)g\ (t)\mathrm{d}t \quad 0, \text{对} f \quad P_0^*$$

因此, 定理 3 的所有条件满足 故(6) 在 $[u,v]$ 中有最小解 $x^*(t)$ 定理证毕

注 1 众所周知, $C[a,b]$ 中的序列 $\{x_n(t)\}$ 弱收敛于 $x(t)$ $C[a,b]$, 当且仅当 $\{\ x_n\ \}$ 有界, 且 $x_n(t)$ $x(t)$, t $[a,b]$ (可见[8]) 因此, $\{x_n(t)\}$ 弱收敛 $x(t)$, 必有 $\{x_n(t)\}$ 拟弱收敛于 $x(t)$, 即 $x_n(t)$ $x(t)(P_0^*)$, P_0^* 见定理 1 记 $x_n(t) = t^n$, t $[0,1]$, 因 $m(|\ t^n - 0|\quad) = 1 - \ ^{1/n}$ 0, 便有 $x_n(t)$ $x(t)(P_0^*)$, $x(t)$ 0, t $[0,1]$, t $[0,1]$ 但 $\lim x_n(t) = 0(t \quad [0,1))$ 或 $1(t = 1)$ 不是连续函数, 因此 $\{x_n(t)\}$ 不是弱收敛序列 故拟弱收敛比弱收敛更弱

注 2 关于方程(6) , [4] 中利用 $L^P(G)$ 的弱紧性作了讨论 $(1 < P < + \quad)$ [9] 中, 一般要求 A 全连续

本文就 $G = [a, b]$ 时, 用勒贝格测度收敛代替弱收敛, 得到了(6) 的解 因此, 研究(6) 时紧性的限制得到了放松

[参 考 文 献]

[1] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces[J]. SIAM Review, 1976, **18**(4): 620~709.

[2] Ladde G S, Lakshmikantham V, Vatsala A S. Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations[M]. London: Pitman, 1985.

[3] Deimling K. Nonlinear Function Analysis[M]. Berlin, Heidelherg: Springer_Verlag Heidelherg, 1985.

[4] 孙径先, 非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性积分方程的应用[J]. 数学学报, 1988, **31**(1): 101~107.

[5] Guo Dajun, Lakshmikanthan V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 1987, **11**(5): 623~632.

[6] 杨荣先, 杨光崇. 积空间中的不动点及其应用[J]. 工程数学学报, 1996, **13**(2): 27~32.

[7] 夏道行, 等. 实变函数与泛函分析(上册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.

[8] 郑维行, 等. 实变函数与泛函分析概要(下册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980.

[9] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科技出版, 1985.

Quasi_Weak Convergence with Applications in Ordered Banach Space

Yang Guangchong

(Basic Department of Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu 610041, P R China)

Abstract: In the paper quasi_weak convergence is introduced in ordered Banach space and it is weaker than weak convergence. Besed on it, the fixed point existence theorem of increasing operator is proved without the suppose of continuity and compactness in the sense of norm and weak compactness and is applied to the Hammerstein nonlinear intergal equation.

Key words: ordered Banach space; separated property; quasi_weak convergence; fixed points